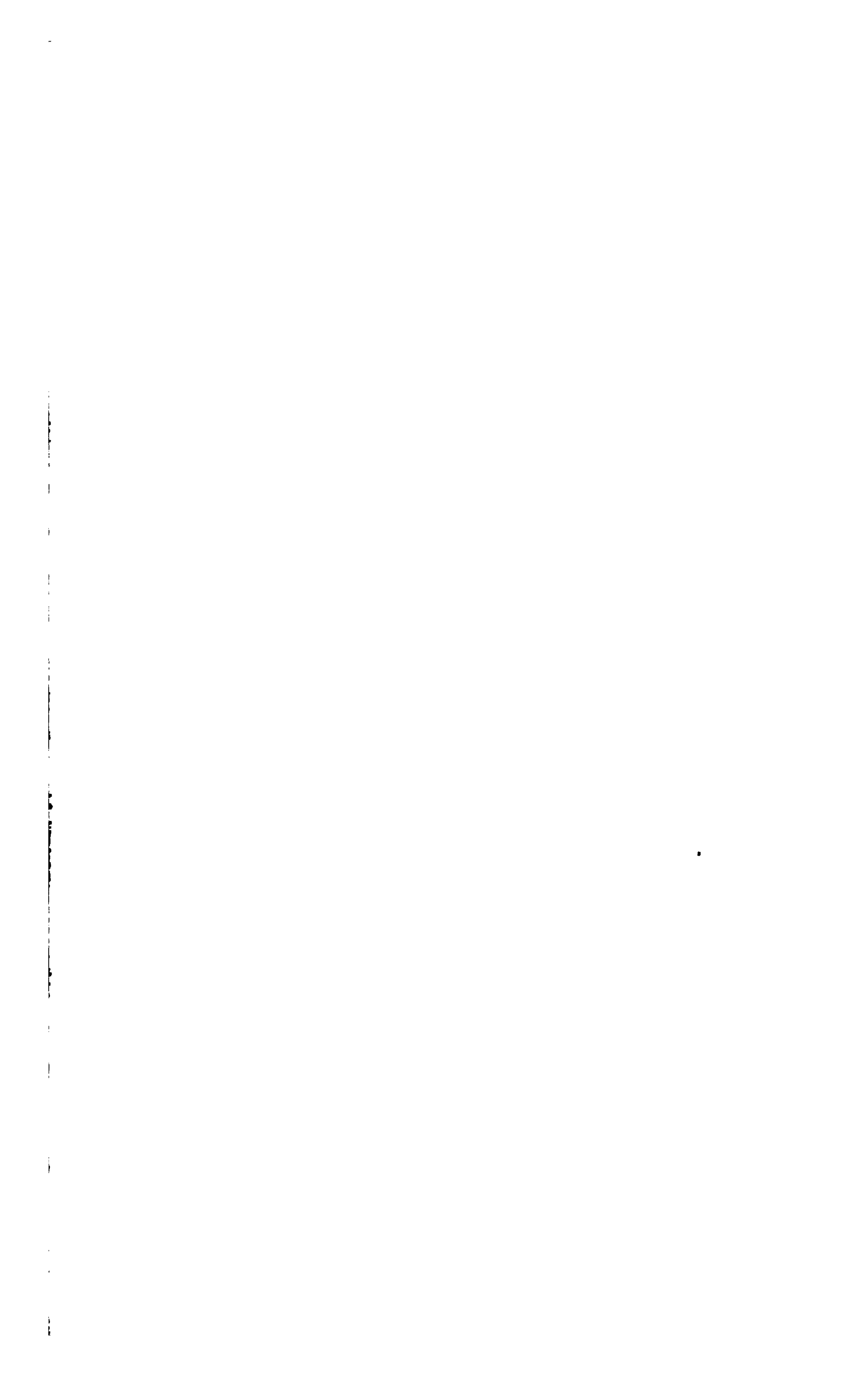
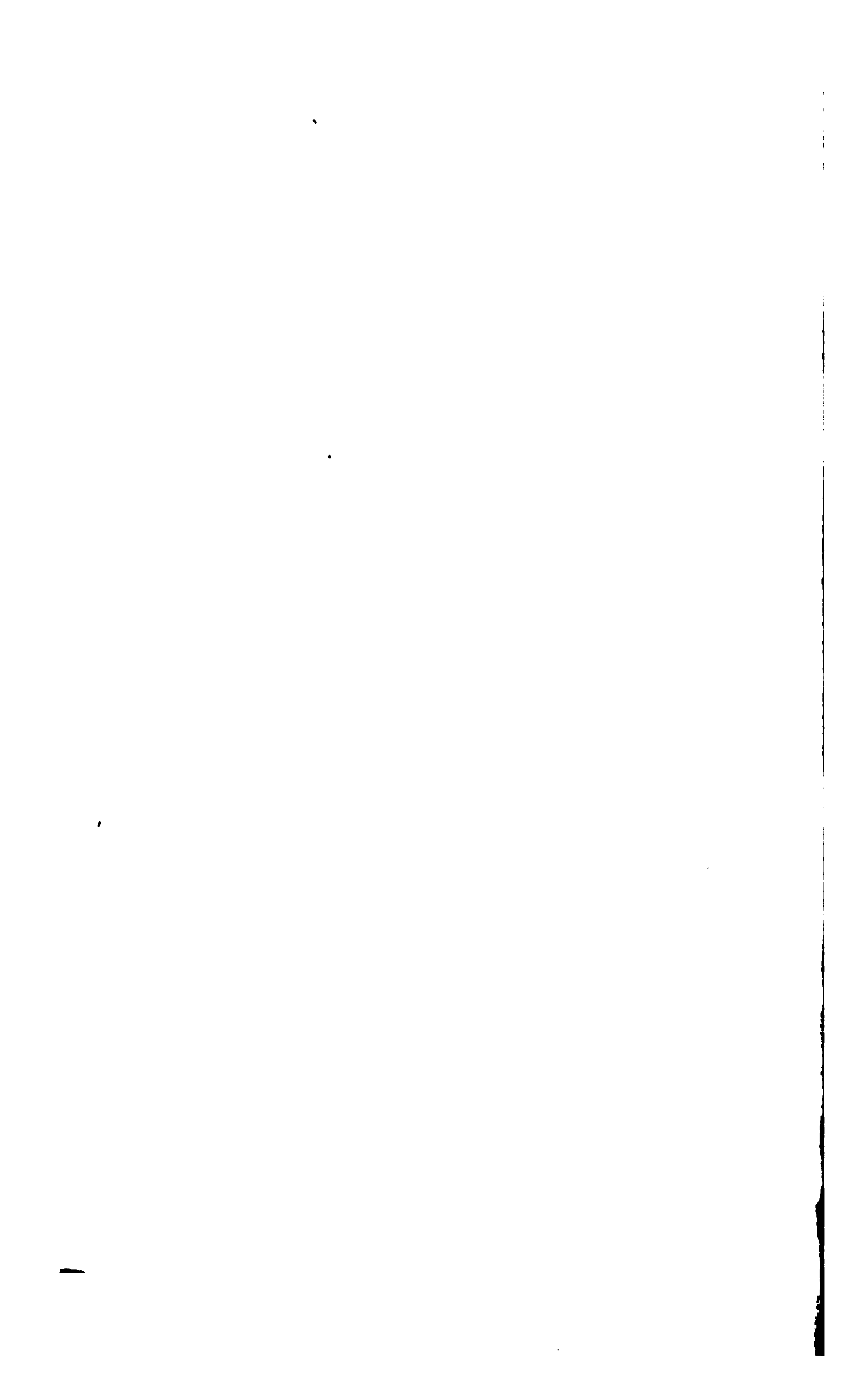




HANDBUCH

DER

THEORETISCHEN PHYSIK.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

HANDBUCH

DER

HEORETISCHEN PHYSIK

VON

W. THOMSON UND P. G. TAIT.

AUTORISIRTE DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

VON

DR. H. HELMHOLTZ UND G. WERTHEIM.

ERSTER BAND.

ERSTER THEIL.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1871.

VORREDE.

> Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation, et dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle.
>
> Fourier.

Der Ausdruck „Natural Philosophy" *) wurde von Newton gebraucht und wird noch jetzt auf den britischen Universitäten angewandt, um die Erforschung der Gesetze der materiellen Welt und die Herleitung nicht direct beobachteter Resultate aus ihnen zu bezeichnen. Beobachtung, Classification und Beschreibung der Erscheinungen muss der Theorie in jedem Theile der Naturwissenschaften nothwendig vorhergehen. Diese frühere Stufe wird in einzelnen Zweigen der Wissenschaft Naturgeschichte genannt und könnte mit demselben Rechte auch in allen übrigen diesen Namen führen.

Unsere Aufgabe ist eine zweifache: einen einigermaassen vollständigen Bericht über die jetzt bekannten Resultate dieser Wissenschaft in einer dem nichtmathematischen Leser verständlichen Sprache zu geben, und denen, welche des Privilegiums tieferer mathematischer Kenntnisse theilhaftig sind, einen zusammenhängenden Umriss der analytischen Processe zu liefern, durch welche die meisten jener Resultate auch in Gebiete ausgedehnt worden sind, deren die experimentelle Untersuchung sich noch nicht hat bemächtigen können.

*) Dies ist der englische Titel des Buches, entsprechend dem Titel von Newton's berühmten Werke „Philosophiae Naturalis Principia"; im Deutschen entspricht diesem Begriffe etwa der der „theoretischen Naturwissenschaft", oder auch in noch speciellerem Sinne geradezu: „Physik".

In dem vorliegenden Bande nimmt die (durch kleineren Druck unterschiedene) mathematische Entwicklung nothwendig weit mehr Raum ein, als der experimentelle und beschreibende Theil.

Wir beginnen mit einem Capitel über die Bewegung, einem von der Existenz der Materie und der Kraft völlig unabhängigen Gegenstande. Wir werden darin naturgemäss zur Betrachtung der Krümmung und Windung von Curven, der Krümmung von Flächen und verschiedener anderer rein geometrischer Gegenstände geführt.

Die Gesetze der Bewegung, das Gesetz der Gravitation und der elektrischen und magnetischen Attraction, Hooke's Gesetz und andere direct auf experimentellem Wege hergeleitete Fundamentalprincipien führen mittels mathematischer Operationen zu manchen interessanten und nützlichen Resultaten, für deren Prüfung freilich auch unsere feinsten Versuchsmethoden bis jetzt völlig ungenügend sind. Ein grosser Theil unseres ersten Bandes ist diesen Entwicklungen gewidmet, die zwar nicht unmittelbar experimentell bestätigt werden können, aber so sicher wahr sind, wie die elementaren Gesetze, aus denen sie durch die mathematische Analysis hergeleitet wurden.

Wir wenden in der Regel diejenigen analytischen Processe an, welche am directesten zu den herzuleitenden Resultaten führen. Das Verständniss des Werkes wird daher für den gewöhnlichen Leser oft schwierig sein. Ein kleineres Buch, welches einen grossen Theil der nichtmathematischen Entwicklungen des vorliegenden Bandes und von den mathematischen Entwicklungen nur so viel enthält, als sich leicht mittels der elementaren Geometrie und Algebra herleiten lässt, wird in Kurzem erscheinen.

Nach Ampère's Vorschlag bedienen wir uns für die rein geometrische Bewegungslehre des Ausdrucks Kinematik. Ferner wenden wir den Ausdruck Dynamik in seinem etymologisch richtigen Sinne an, bezeichnen also damit die Wissenschaft, welche von der Wirkung der Kraft handelt, mag letztere nun relative Ruhe unterhalten oder eine Beschleunigung

der relativen Bewegung hervorbringen. Die diesen beiden Fällen entsprechenden Theile der Dynamik werden zweckmässig Statik und Kinetik genannt.

Ein Gegenstand, den wir beständig im Auge behalten haben, ist das wichtige Princip der Erhaltung der Energie. Die Resultate neuerer experimenteller Forschungen, besonders die von Joule, lehren übereinstimmend, dass die Energie ebenso real und unzerstörbar ist, wie die Materie. Es gewährt uns hohe Befriedigung, zu finden, dass Newton, soweit es der Zustand der experimentellen Wissenschaft seiner Zeit gestattete, diese herrliche moderne Verallgemeinerung anticipirte.

Wir bitten zu beachten, dass an vielen Stellen unseres Werkes, wo es scheinen könnte, als hätten wir heutzutage allgemein angenommene Methoden und Beweisarten rasch und unnöthiger Weise verlassen, wir nicht sowohl Neuerer als vielmehr Wiederhersteller sind.

In unserem einleitenden Capitel über Kinematik führt uns die Betrachtung der harmonischen Bewegung naturgemäss zum Fourier'schen Satze, der, was den Nutzen für die Wissenschaft der Physik betrifft, zu den wichtigsten aller analytischen Resultate gehört. In den Anhängen zu diesem Capitel haben wir eine Ausdehnung des Green'schen Satzes und eine kurze Abhandlung über die bemerkenswerthen Functionen gegeben, die unter dem Namen von Laplace's Coefficienten bekannt sind. Ueber die Eleganz und den Nutzen dieser Analyse von Laplace kann nur eine Ansicht herrschen. Aber die Art und Weise, in der sie bis jetzt dargestellt wurde, ist den fähigsten Mathematikern abstossend und den minder fähigen allzu schwierig erschienen. Man wird finden, dass sie in der vereinfachten und symmetrischen Form, in der wir sie geben, völlig im Bereiche derjenigen Leser liegt, die nur einigermaassen mit den neueren mathematischen Methoden vertraut sind.

Im zweiten Capitel geben wir Newton's Bewegungsgesetze in seinen eigenen Worten und mit einigen seiner eigenen Commentare. In der That ist jeder Versuch, diese Gesetze bei Seite zu drängen, völlig misslungen. Vielleicht in keiner Wissen-

schaft ist jemals einem System eine so einfache und zu gleicher Zeit so umfassende Grundlage gegeben worden. Die Anwendung der Lagrange'schen allgemeinen Coordinaten auf die Dynamik, Hamilton's variirende Wirkung und damit in Zusammenhang stehende Gegenstände vervollständigen das Capitel.

Das dritte Capitel, „Erfahrung", handelt kurz von der Beobachtung und dem Experiment als den Grundlagen der Naturlehre.

Das vierte Capitel hat es mit den bei der Messung der Zeit, des Raumes und der Kraft gebrauchten Fundamentaleinheiten und mit den wichtigsten Instrumenten zu thun.

Damit schliesst der erste Theil des Werkes, welcher streng genommen nur die Einleitung bildet.

Der zweite Theil ist der abstracten Dynamik gewidmet (die in neuerer Zeit nicht gerade passend Mechanik genannt wird). Sein Gegenstand ist in dem einleitenden (fünften) Capitel kurz dargelegt. Der Rest des vorliegenden Bandes behandelt die Statik.

Im sechsten Capitel gehen wir, nachdem wir die Statik eines materiellen Punktes kurz behandelt haben, sehr ausführlich auf das wichtige Thema der Attraction ein. Das siebente Capitel enthält die Statik der festen und flüssigen Körper, und finden darin verschiedene wichtige Gegenstände, wie die Deformation elastischer fester Körper, die statische Theorie der Ebbe und Fluth, die Gestalt und Festigkeit der Erde eine eingehende Berücksichtigung.

Im zweiten Bande wird der zweite Theil durch Capitel über die Kinetik eines materiellen Punktes und über die Kinetik der festen und der flüssigen Körper vervollständigt werden. Wir werden darin auch die Vibrationen fester Körper und die Wellenbewegung im Allgemeinen behandeln. Dieser Band wird wahrscheinlich auch den dritten Theil: „Ueber die Eigenschaften der Materie" enthalten.

Wir glauben, dass der mathematisch gebildete Leser hauptsächlich durch die Lectüre des gross gedruckten Theils dieses

Bandes Nutzen haben wird; denn er wird dadurch genöthigt werden, durch eigenes Nachdenken das zu finden, was er zu oft gewohnt war, vermittels einer bloss mechanischen Anwendung der Analysis zu erreichen. Nichts kann für den Fortschritt verhängnissvoller sein, als ein zu grosses Vertrauen auf mathematische Symbole; denn der Studirende ist nur zu sehr geneigt, den bequemeren Weg einzuschlagen und die Formel, nicht die Thatsache als die physikalische Realität anzusehen.

Der vorliegende Band enthält eine Menge anscheinend zweckloses Material. Es wird sich jedoch zeigen, dass dasselbe sich direct auf Abschnitte der drei übrigen Bände bezieht. Die Nothwendigkeit, die Bedürfnisse der folgenden Bände so zu anticipiren, ist eine der Hauptursachen des langsamen Erscheinens dieses Bandes, dessen Druck seit dem November 1862 in unregelmässigen Intervallen vorgeschritten ist.

[Folgen Bemerkungen über den Druck der englischen Ausgabe.]

Juli 1867.

W. Thomson. P. G. Tait.

VORREDE

ZUR

DEUTSCHEN ÜBERSETZUNG.

Im vorliegenden Bande wird dem deutschen naturwissenschaftlichen und mathematischen Publicum der Anfang eines Werkes von hoher wissenschaftlicher Bedeutung übergeben, welches eine in der Literatur sehr fühlbare Lücke in ausgezeichnetester Weise ausfüllen wird. Während es an zweckmässigen populären Lehrbüchern der Physik nicht fehlte, musste sich jeder, der ein eingehendes wissenschaftliches Verständniss auch nur einzelner Theile dieser Wissenschaft suchte, ein Verständniss, wie es ohne mathematische Behandlung eben nicht zu gewinnen ist, dem Studium der einzelnen Original-Abhandlungen zuwenden. Diese sind aber fast alle in akademischen Denkschriften oder anderen wenig verbreiteten periodischen Schriften enthalten und gewöhnlich nur in grösseren Bibliotheken zu finden, selbst wenn man weiss, wo man zu suchen hat. Strengere mathematische Studien werden im Allgemeinen freilich nie ein sehr grosses Publicum finden, aber es ist wohl nicht zu bezweifeln, dass die genannte rein äusserliche Schwierigkeit einen wesentlichen Theil der Schuld davon trägt, dass mathematisch-physikalische Kenntnisse auch bei uns in Deutschland nur eine sehr geringe Verbreitung haben, trotzdem an deutschen Universitäten einige der ausgezeichnetesten Vertreter dieser Richtung gelehrt haben und noch lehren.

Wenigstens der eine der Verfasser des vorliegenden Buches, Sir William Thomson, ist längst auch in Deutschland bekannt als einer der durchdringendsten und erfindungsreichsten Denker, welche sich unserer Wissenschaft je zugewendet haben. Wenn ein solcher es unternimmt, uns gleichsam in die Werkstatt seiner Gedanken einzuführen und die Anschauungsweisen zu enthüllen, die leitenden Fäden auseinander zu wickeln, die ihm in seinen kühnen Gedankencombinationen geholfen haben, den widerstrebenden und verwirrten Stoff zu beherrschen und zu ordnen, so sind wir ihm alle dafür den höchsten Dank schuldig. Er hat dabei in Herrn P. G. Tait, Professor der Physik in Edinburg, für dieses Werk, welches sonst die Kräfte eines einzelnen vielbeschäftigten Mannes übersteigen würde, einen höchst geeigneten und talentvollen Helfer gefunden. Nur durch eine solche glückliche Vereinigung war die Aufgabe vielleicht überhaupt zu lösen.

Das Werk arbeitet auf eine möglichst allseitige und eindringende Einsicht in die Wechselbeziehungen der Naturkräfte hin, wobei es wesentlich die Hervorhebung des physikalischen Zusammenhangs im Gegensatz zu der Eleganz der mathematischen Methoden bevorzugt. Wird die Wissenschaft einst vollendet sein, so werden die physikalische und mathematische Consequenz vielleicht zusammenfallen. Bei den ausserordentlich mannigfaltigen Wechselbeziehungen der Naturkräfte zu einander liegt es in der Natur der Sache, dass man sie nur verstehen kann, wenn man sich die Verhältnisse von den mannigfaltigsten Gesichtspunkten aus betrachtet, und sich jedesmal denjenigen sucht, der am tiefsten in den Kern der gerade vorliegenden Frage blicken lässt. Dadurch wird allerdings die Einheit der Methode gestört, die die besseren französischen Lehrbücher so bequem und angenehm macht, und es wird dem Leser, wie auch die Verfasser in der Vorrede zum Original anerkennen, mehr Arbeit eigenen Denkens zugemuthet. Der Leser aber, der diese Arbeit nicht scheut, wird reichlichen Lohn davon haben; er wird sich zu eigener Erweiterung seines Verständnisses viel besser ausgerüstet finden, als durch die einseitig consequenten

Methoden, die meist nicht weiter führen, als bis zu dem Ziel, auf das sie berechnet sind.

Dieser Richtung ihrer Arbeit entsprechend haben die Verfasser sich auch bemüht, wo es anging, mathematische Methoden zu gebrauchen und Begriffe einzuführen, welche einer Anschauung fähig sind. Eine solche sich herauszuarbeiten, ist im Anfang allerdings oft schwerer, als den gegebenen analytischen Methoden in der Rechnung einfach zu folgen; aber es bleibt durch die dabei gewonnene grössere Uebersichtlichkeit des Verfahrens auch ein dauernder Gewinn bestehen.

Die Uebersetzung eines solchen Buches, wo die grösste Genauigkeit im Ausdrucke nöthig ist, während die Wörter der beiden Sprachen sich nicht immer vollständig decken, ist keine ganz leichte Sache. Dazu kam, dass die Verfasser selbst eine Reihe neuer englischer Wörter in die wissenschaftlichen Ausdrucksweisen eingeführt haben. Die Hauptarbeit ist Herrn G. Wertheim zugefallen. Der Unterzeichnete glaubte bei der Einführung eines so wichtigen Werkes in die deutsche wissenschaftliche Literatur seine Hilfe trotz starker Ueberladung mit Arbeiten nicht versagen zu dürfen, so weit sie von den übrigen Betheiligten, den ihm nahe befreundeten Verfassern, dem Herrn Verleger und dem Uebersetzer, in Anspruch genommen wurde. Ich habe deshalb eine Correctur gelesen, und namentlich in den schwierigeren Fällen der Accommodation zum Theil neuer deutscher Ausdrücke an die englischen zu helfen gesucht, so gut ich konnte.

Endlich ist auch noch eine Reihe Correcturbogen von den Verfassern selbst durchgesehen worden, um dadurch möglichste Sicherung gegen Missverständnisse oder Ungenauigkeiten des Ausdrucks zu erzielen.

Der Herr Verleger, indem er seinerseits eine so verwickelte und zeitraubende Art der Controlle möglich machte, hat sich ohne Zweifel dadurch den Dank der deutschen Leser in hohem Grade verdient.

Berlin, im Mai 1871.

Helmholtz.

Verzeichniss neuer oder in deutschen Büchern weniger gebrauchter Benennungen mit Angabe des Ortes ihrer Erklärung.

Grösse der Windung (*Tortuosity*) einer Curve, § 7 bis 9.
Gesammtkrümmung und mittlere Krümmung (*Integral curvature* und *average curvature*) einer Curve, § 10 bis 13.
Hodograph eines bewegten Punktes, § 37 bis 39.
Verfolgungscurve (*Curve of Pursuit*), § 40.
Einfache harmonische Bewegung, § 52 bis 57, ist gleich dem, was sonst einfache Schwingung, pendelartige oder Sinusbewegung genannt worden ist. Der englische Ausdruck musste wegen der darauf gebauten weiteren Terminologie hier beibehalten werden.
Harmonische Kugelfunctionen (*Spherical Harmonics*), S. 156.
Vorrückende Rotation (*Precessional Rotation*), § 104.
Hooke's Schlüssel, § 109.
Gleiten, Rollen, Kreiseln (*sliding*, *rolling*, *spinning*) eines Körpers auf einem anderen, § 110.
Drillung oder Torsion (*twist*), § 119.
Synclastische und anticlastische Flächen, § 128.
Sphärischer Excess, § 134.
Gesammtkrümmung, mittlere Krümmung, specifische Krümmung und Horograph einer Fläche, § 136.
Wendungscurve einer Fläche (*Edge of regression*), § 148.
Deformation (*strain*) eines Körpers, § 154.
Einfache Schiebung (*Simple shear*), § 171.
Reine Deformation oder Verzerrung (*Pure strain*), § 183.
Tangentiale Verschiebung einer Curve, § 186.
Verschiebungsfunction (*Displacement function*), § 190, l.
Grade der Freiheit, § 195 bis 201.
Kinetische Energie, § 213, gleich „Lebendige Kraft", auch § 280.
Potentielle Energie, § 241, § 269.
Trägheitsmittelpunkt (*Centre of Inertia*), § 230, gleich „Schwerpunkt", oder besser als letzterer Ausdruck.
Conservatives System von Körpern, § 271.
Gyrationsradius, § 281.
Wirkung (*Action*), § 318.
Charakteristische Function (W. R. Hamilton's), § 323.

INHALTSVERZEICHNISS
DES
ERSTEN THEILS.

Erstes Capitel.
Kinematik.

Zweites Capitel.

Gesetze und Principien der Dynamik.

Drittes Capitel.

Erfahrung.

Viertes Capitel.

Maasse und Messinstrumente.

Druckfehler.

Seite 60, Zeile 10 v. u., lies $\frac{\pi}{2}$ statt π.

„ 199, „ 10 v. o. „ Energie statt Kraft.

ERSTER THEIL.

EINLEITENDE BEGRIFFE.

Erstes Capitel.

Kinematik.

1. Es giebt viele Eigenschaften der Bewegung, der Orts- und Formveränderung, welche völlig unabhängig von physikalischen Begriffen, wie Kraft, Masse, Elasticität, Temperatur, Magnetismus, Elektricität, betrachtet werden können. Da eine vorläufige abstracte Untersuchung dieser Eigenschaften von grossem Nutzen für die theoretische Physik ist, so widmen wir ihr das ganze erste Capitel. Dieselbe wird gewissermaassen die Geometrie unseres Gegenstandes ausmachen und Alles umfassen, was rücksichtlich der vorhandenen Bewegungen beobachtet oder durch Schlüsse entdeckt werden kann, so lange nicht nach der Ursache gefragt wird.

2. Mit dieser Beschränkung werden wir zuerst die freie Bewegung eines Punktes, darauf die Bewegung eines an einem unausdehnsamen Faden befestigten Punktes, dann die Bewegungen und Verschiebungen starrer Systeme, und endlich die Formveränderungen von Flächen und festen oder flüssigen Massen betrachten. Beiläufig werden wir auch veranlasst sein, einen grossen Theil des Gebietes der elementaren Geometrie zu berühren, das mit der Krümmung der Linien und Flächen im Zusammenhange steht.

3. Bewegung eines Punktes. — Wenn sich ein Punkt aus einer Lage in eine andere bewegt, so muss er offenbar eine continuirliche Linie beschreiben, welche krumm oder gerade sein kann, oder die auch wohl aus Theilen von geraden und krummen Linien besteht, welche unter irgend welchen Winkeln zusammentreffen. Bei der Bewegung eines materiellen Punktes jedoch kann eine solche

plötzliche Richtungsänderung, ausser wo die Geschwindigkeit Null ist, nicht vorkommen, da dies (wie wir später sehen werden) die Wirkung einer unendlich grossen Kraft voraussetzen würde. Es ist zweckmässig, beim Beginn einige Sätze ins Auge zu fassen, die aus dem geometrischen Begriff der von einem bewegten Punkte beschriebenen Bahn abzuleiten sind; diese Sätze wollen wir jetzt folgen lassen und die Betrachtung der Geschwindigkeit, die schon in näherer Beziehung zu physikalischen Begriffen steht, auf einen spätern Paragraphen verschieben.

4. Die Richtung der Bewegung eines Punktes ist in jedem Augenblick die an seine Bahn gezogene Tangente, falls diese Bahn gekrümmt ist. Ist die Bahn eine Gerade, so ist die Bewegungsrichtung diese Gerade selbst.

5. **Krümmung einer ebenen Curve.** — Wenn die Bahn nicht gerade ist, so ändert sich die Bewegungsrichtung von Punkt zu Punkt, und der verhältnissmässige Betrag dieser Aenderung, für die Längeneinheit der Curve berechnet, wird Krümmung genannt.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, nehmen wir an, es seien zwei Tangenten an einen Kreis gezogen und die Berührungspunkte derselben mit dem Mittelpunkte verbunden. Der von den Tangenten eingeschlossene Winkel ist die verlangte Richtungsänderung, und die Grösse der Krümmung ist demnach durch das Verhältniss zwischen diesem Winkel und der Länge des zugehörigen Kreisbogens zu messen. Bezeichnet nun ϑ den Winkel, s den Bogen und ϱ den Radius, so sehen wir auf der Stelle (da der von den Radien gebildete Winkel dem zwischen den Tangenten enthaltenen gleich ist), dass

$$\varrho\vartheta = s,$$

und folglich $\frac{\vartheta}{s} = \frac{1}{\varrho}$ das Maass der Krümmung ist. Danach ist die Krümmung eines Kreises dem Radius umgekehrt proportional; sie ist einfach gleich dem reciproken Werth des Radius, wenn wir als Einheit der Krümmung die Krümmung eines Kreises annehmen, dessen Radius gleich der Längeneinheit ist.

6. Jedes kleine Stück einer Curve kann näherungsweise als ein Kreisbogen angesehen werden, und diese Annahme kommt der Wahrheit desto näher, je kleiner der betrachtete Bogen ist. Die Krümmung desselben ist dann der reciproke Werth des Radius dieses Kreises.

Ist $\delta\vartheta$ der Winkel zwischen zwei Tangenten einer Curve, deren Berührungspunkte um den Curvenbogen δs von einander abstehen, so giebt

uns die Definition der Krümmung sofort das Maass derselben: es ist der Grenzwerth, welchen $\frac{\delta \vartheta}{\delta s}$ hat, wenn δs unbegrenzt abnimmt, oder nach der in der Differentialrechnung üblichen Bezeichnung $\frac{d\vartheta}{ds}$. Wir haben aber

$$tan\, \vartheta = \frac{dy}{dx},$$

wenn wir die Curve, die als eben vorausgesetzt wird, nach Cartesius' Methode auf zwei rechtwinklige Axen OX, OY beziehen und die Neigung, welche ihre Tangente in irgend einem Punkte x, y gegen die Axe OX hat, mit ϑ bezeichnen. Daraus folgt

$$\vartheta = arctan \frac{dy}{dx},$$

und die Differentiation in Beziehung auf irgend eine unabhängig Veränderliche t liefert:

$$d\vartheta = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2}.$$

Da nun

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

ist, so erhalten wir, wenn ϱ den Krümmungsradius bezeichnet, wenn also $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{ds}$ ist,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}.$$

Obwohl es im Allgemeinen gut ist, in kinematischen und kinetischen Formeln die Zeit als die unabhängig Veränderliche anzusehen und alle veränderlichen geometrischen Elemente als Functionen derselben zu betrachten, so giebt es doch auch Fälle, in denen es sich empfiehlt, die Länge des Bogens oder Weges, den ein Punkt beschreibt, zur unabhängig Veränderlichen zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung haben wir

$$d(ds^2) = d(dx^2 + dy^2) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn durch Anfügung eines Index an den Buchstaben d ausgedrückt wird, nach welcher Grösse differentiirt werden soll,

$$\frac{d_s^2 y}{dx} = -\frac{d_s^2 x}{dy} = \frac{\{(d_s^2 y)^2 + (d_s^2 x)^2\}^{1/2}}{(dx^2 + dy^2)^{1/2}},$$

oder

$$\frac{dx}{d_s^2 y} \cdot \frac{\{(d_s^2 x)^2 + (d_s^2 y)^2\}^{1/2}}{(dy^2 + dx^2)^{1/2}} = -\frac{dy}{d_s^2 x} \cdot \frac{\{(d_s^2 x)^2 + (d_s^2 y)^2\}^{1/2}}{(dy^2 + dx^2)^{1/2}} = 1.$$

Diese beiden der Einheit gleichen Ausdrücke benutzen wir, um den oben für $\frac{1}{\varrho}$ erhaltenen Werth auf eine andere Form zu bringen. Mit dem erstern multipliciren wir $dx\, d^2y$, mit dem zweiten $dy\, d^2x$ und gelangen auf diese Weise zu dem Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\{(d_s^2 y)^2 + (d_s^2 x)^2\}^{1/2}}{ds^2},$$

oder nach der gewöhnlichen kurzen, obwohl nicht ganz vollständigen Bezeichnung

$$\frac{1}{\varrho} = \left\{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

7. **Gewundene Curve.** — Wenn alle Punkte der Curve in einer Ebene liegen, so heisst sie eine ebene Curve; ebenso sprechen wir von einem ebenen Polygon oder einer ebenen gebrochenen Linie. Wenn verschiedene Punkte der Linie nicht in einer Ebene liegen, so haben wir im einen Falle eine sogenannte Curve doppelter Krümmung, im andern ein unebenes Polygon. Der Ausdruck „Curve doppelter Krümmung" ist sehr schlecht gewählt, und obgleich man sich desselben allgemein bedient, so hoffen wir doch, dass er wird beseitigt werden können. Es sind nämlich nicht zwei Krümmungen vorhanden, sondern nur eine einzige (nach der obigen Definition), deren Ebene beständig eine andere wird oder sich um die Tangente dreht und auf diese Weise eine Windung darstellt. Der Lauf einer solchen Curve wird im gewöhnlichen Leben treffend „gewunden" genannt, und daher empfiehlt es sich, das Maass der entsprechenden Eigenschaft die „Grösse der Windung" zu nennen.

8. Das Wesen der Windung wird am besten verstanden werden, wenn wir die Curve als ein Polygon mit unendlich kleinen Seiten ansehen. Jede zwei auf einander folgenden Seiten liegen natürlich in einer Ebene, und in dieser Ebene wird die Krümmung wie oben gemessen. Bei einer Curve, die nicht eben ist, wird aber die dritte Polygonseite mit den beiden ersten nicht in derselben Ebene liegen, und daher ist die neue Ebene, in welcher die Krümmung gemessen werden muss, von der alten verschieden. Die Ebene, in welcher man die Krümmung einer gewundenen Curve zu beiden Seiten irgend eines Punktes misst, wird zuweilen die diesem Punkte zugehörige osculatorische Ebene der Curve genannt. Da zwei aufeinander folgende Lagen dieser Ebene die zweite Seite des oben erwähnten Polygons enthalten, so leuchtet ein, dass die osculatorische Ebene von einer Lage in die nächstfolgende durch eine Drehung um die an die Curve gezogene Tangente übergeht.

9. **Krümmung und Windung.** — Verfolgen wir den Lauf einer solchen Curve, so sehen wir, dass die Krümmung im Allgemeinen sich ändert, und dass zu gleicher Zeit die Ebene, in welcher die Krümmung liegt, sich um die Curventangente dreht. Der verhältnissmässige Betrag dieser Drehung, oder die Windung, muss daher gemessen werden durch das Verhältniss der Grösse der Drehung der osculatorischen Ebene zur Längeneinheit der Curve.

Um den Krümmungsradius, die Richtungscosinus der osculatorischen Ebene und die Grösse der Windung einer nicht ebenen Curve mittels Cartesius'scher Raumcoordinaten auszudrücken, bezeichnen wir wieder mit $\delta\vartheta$ den Winkel zwischen den Tangenten an zwei Punkten der Curve, zwischen welchen der Curvenbogen δs liegt. Ferner sei $\delta\varphi$ der Winkel zwischen den diesen Punkten zugehörigen osculatorischen Ebenen. Stellt dann ϱ den Krümmungsradius und τ die Grösse der Windung dar, so haben wir

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{ds}, \tag{1}$$

$$\tau = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{2}$$

wenn, wie es gewöhnlich geschieht, die Grenzwerthe von $\frac{\delta\vartheta}{\delta s}$, $\frac{\delta\varphi}{\delta s}$ für ein unbegrenzt abnehmendes δs mit $\frac{d\vartheta}{ds}$, $\frac{d\varphi}{ds}$ bezeichnet werden.

Es seien nun OL, OL' zwei Gerade, welche durch einen beliebigen festen Punkt O irgend zwei aufeinander folgenden Lagen einer in Bewegung befindlichen Geraden PT parallel gezogen sind, jede in der durch die Folge der Buchstaben angegebenen Richtung. Auf diesen Geraden errichten wir eine Senkrechte OS, der wir eine solche Richtung ertheilen, dass OL, OL', OS in Beziehung aufeinander im Raum ebenso geordnet sind, wie die positiven Coordinatenaxen OX, OY, OZ. Ferner möge OQ den Winkel LOL' und OR den Winkel halbiren, welchen OL' mit der Verlängerung von OL bildet. Endlich seien a, b, c die Richtungscosinus von OL; a', b', c' diejenigen von OL'; l, m, n diejenigen von OQ; α, β, γ diejenigen von OR und λ, μ, ν diejenigen von OS, und es werde der Winkel LOL' mit $\delta\vartheta$ bezeichnet. Dann ist nach den Elementen der analytischen Geometrie

$$\cos\delta\vartheta = aa' + bb' + cc', \tag{3}$$

$$l = \frac{a+a'}{2\cos\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad m = \frac{b+b'}{2\cos\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad n = \frac{c+c'}{2\cos\frac{1}{2}\delta\vartheta}, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{a'-a}{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad \beta = \frac{b'-b}{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta},\quad \gamma = \frac{c'-c}{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta}, \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{bc'-b'c}{\sin\delta\vartheta},\quad \mu = \frac{ca'-c'a}{\sin\delta\vartheta},\quad \nu = \frac{ab'-a'b}{\sin\delta\vartheta}. \tag{6}$$

Sind jetzt die beiden aufeinander folgenden Lagen von PT Tangenten an eine Curve, deren Berührungspunkte durch einen Curvenbogen von der Länge δs von einander getrennt sind, so hat man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\delta\vartheta}{\delta s} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\delta\vartheta}{\delta s} = \frac{\sin\delta\vartheta}{\delta s}, \tag{7}$$

wenn δs unendlich klein ist. In demselben Grenzfall ist

$$l = \frac{dx}{ds},\quad m = \frac{dy}{ds},\quad n = \frac{dz}{ds},$$

$$a'-a = d\frac{dx}{ds},\quad b'-b = d\frac{dy}{ds},\quad c'-c = d\frac{dz}{ds}, \tag{8}$$

$$bc'-b'c = \frac{dy}{ds}\,d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\frac{dy}{ds},\ \text{u. s. w.,} \tag{9}$$

und α, β, γ werden die Richtungscosinus der nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gezogenen Normale PC, während λ, μ, ν die Richtungscosinus der Geraden sind, welche senkrecht auf der osculatorischen Ebene nach derselben Richtung in Beziehung auf PT und PC hin gezogen ist, welche OZ in Beziehung auf OX und OY inne hat. Durch Anwendung der Formeln (7), (8) und (9) erhält man aus (5) und (6)

$$(10)\qquad \alpha = \frac{d\frac{dx}{ds}}{\varrho^{-1}ds}, \quad \beta = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\varrho^{-1}ds}, \quad \gamma = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\varrho^{-1}ds},$$

$$(11)\qquad \lambda = \frac{\frac{dy}{ds}\,d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\frac{dy}{ds}}{\varrho^{-1}ds}, \quad \mu = \text{u. s. w.}, \quad \nu = \text{u. s. w.}$$

Wenn die Wahl der unabhängig Veränderlichen unserm Belieben überlassen ist, so erhält man aus (10) den einfachsten Ausdruck für die Krümmung. Es ist folgender:

$$(12)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\left\{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}^{1/2}}{ds}.$$

Werden die Brüche $\frac{dx}{ds}$, u. s. w. wirklich differentiirt, so geht dieser Ausdruck, bei Anwendung der Formel

$$(13)\qquad ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z,$$

über in

$$(14)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\}^{1/2}}{ds^2}.$$

Aus (11) ergiebt sich unmittelbar noch ein anderer Ausdruck für $\frac{1}{\varrho}$, nämlich

$$(15)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2\}^{1/2}}{ds^3}.$$

Wir werden sehen, dass jeder dieser Ausdrücke eine besondere Bedeutung in der Kinetik eines materiellen Punktes und der Statik einer biegsamen Schnur hat.

Um die Grösse der Windung $\frac{d\varphi}{ds}$ zu ermitteln, haben wir nur λ, μ, ν statt l, m, n und $\frac{d_i\lambda}{ds}, \frac{d_i\mu}{ds}, \frac{d_i\nu}{ds}$ statt α, β, γ zu setzen. Wir erhalten

$$\tau = \left\{\left(\mu\frac{d_i\nu}{ds} - \nu\frac{d_i\mu}{ds}\right)^2 + \left(\nu\frac{d_i\lambda}{ds} - \lambda\frac{d_i\nu}{ds}\right)^2 + \left(\lambda\frac{d_i\mu}{ds} - \mu\frac{d_i\lambda}{ds}\right)^2\right\}^{1/2},$$

und darin bezeichnen λ, μ, ν die durch die vorhergehenden Formeln bestimmten Richtungscosinus der osculatorischen Ebene.

10. Gesammtkrümmung. — Die Gesammtkrümmung oder die ganze Richtungsänderung eines Bogens einer ebenen Curve ist der Winkel, um welchen die Tangente sich gedreht hat, wenn wir vom einen Ende des Bogens zum andern gehen. Die mittlere Krümmung irgend eines Theils ist gleich der ganzen Krümmung dieses Theils,

dividirt durch seine Länge. Nehmen wir an, eine von einem festen Punkte aus gezogene Gerade bewege sich so, dass sie der Bewegungsrichtung eines die Curve beschreibenden Punktes beständig parallel sei, so stellt der Winkel, durch welchen die Gerade sich während der Bewegung des Punktes dreht, das dar, was wir eben als Gesammtkrümmung definirt haben. Bei der Bestimmung derselben müssen wir uns natürlich an den modernen umfassendern Begriff des Winkels halten, der auch Winkel, die grösser als zwei Rechte sind, und ebenso negative Winkel in sich schliesst. So ist die Gesammtkrümmung irgend einer geschlossenen Curve, mag dieselbe irgendwo, von aussen betrachtet, concav erscheinen oder nicht, vier rechte Winkel, vorausgesetzt, dass die Curve sich nicht selbst schneidet. Die Gesammtkrümmung einer Lemniscate oder der Figur 8 ist Null, die der Epicycloide ⊙ acht Rechte, u. s. w.

11. Die im letzten Paragraphen gegebene Definition kann offenbar auf ein ebenes Polygon ausgedehnt werden. Die gesammte Richtungsänderung oder der Winkel zwischen der ersten und letzten Seite ist dann gleich der Summe der Aussenwinkel, und zwar ist jede Seite in der Richtung zu verlängern, in welcher sie von dem das Polygon beschreibenden Punkte durchlaufen wird. Dies ist richtig, das Polygon mag geschlossen sein oder nicht. Ist dasselbe geschlossen, so ist diese Summe vier Rechte, so lange keine Seite von einer andern durchkreuzt wird — eine Ausdehnung des Euclid'schen Satzes, der die Polygone mit einspringenden Ecken nicht umfasst. Im Falle der sternförmigen Figur ☆ ist die Summe zehn Rechte weniger der Summe der fünf spitzen Winkel der Figur, also acht Rechte, u. s. w.

12. Die Gesammtkrümmung und die mittlere Krümmung einer nicht ebenen Curve können in folgender Weise definirt werden: — Wir denken uns von einem festen Punkte aus gerade Linien gezogen, welche den Tangenten der Curve parallel und gleichgerichtet sind. Diese Linien werden eine Kegelfläche bilden. Weiter nehmen wir an, diese Kegelfläche werde von einer Kugel geschnitten, deren Mittelpunkt der feste Punkt und deren Radius die Längeneinheit ist. Dann misst die Länge der Durchschnittslinie beider Flächen die Gesammtkrümmung der gegebenen Curve, und wenn wir diese Gesammtkrümmung durch die Länge der Curve dividiren, so erhalten wir, wie im Falle einer ebenen Curve, die mittlere Krümmung.

13. Zwei aufeinander folgende Tangenten liegen in der oscu-

latorischen Ebene. Diese Ebene ist daher der Tangentialebene an die im vorhergehenden Paragraphen beschriebene Kegelfläche parallel, und so kann die Windung mittels derselben sphärischen Curve gemessen werden, die wir soeben zur Definition der Gesammtkrümmung benutzt haben. Wir können dies jetzt nicht vollständig darlegen, da dazu die erst später zu behandelnde Theorie der auf Oberflächen gezogenen Curven nöthig sein würde. Wir werden aber Folgendes sehen: Wenn eine Ebene so auf der Kugel rollt, dass sie dieselbe beständig längs der in Rede stehenden Curve berührt, und dass die augenblickliche Axe beständig senkrecht gegen die Curve gerichtet und für die Kugel selbst Tangente ist, so ist die Gesammtkrümmung der Berührungscurve oder der Spur des Rollens auf der Ebene ein genaues Maass der ganzen Drehung oder Gesammtwindung. Weiter werden wir uns überzeugen, dass die Krümmung dieser ebenen Curve in jedem Punkte oder, was dasselbe ist, die Projection der Krümmung der sphärischen Curve auf eine Tangentialebene der Kugel gleich der Windung, dividirt durch die Krümmung der gegebenen Curve ist.

Es sei $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung, τ die Grösse der Windung der gegebenen Curve und ds ein Element ihrer Länge. Dann sind $\int \frac{ds}{\varrho}$ und $\int \tau\, ds$ beziehungsweise die Gesammtkrümmung und Gesammtwindung, vorausgesetzt, dass jede Integration sich über irgend eine festgesetzte Länge l der Curve erstreckt. Die mittlere Krümmung und die mittlere Windung sind beziehungsweise

$$\frac{1}{l}\int \frac{ds}{\varrho} \text{ und } \frac{1}{l}\int \tau\, ds.$$

Unendliche Windung wird leicht verstanden werden durch Betrachtung einer Schraubenlinie, die unter einem Steigungswinkel α auf einem geraden Cylinder beschrieben ist, dessen Basis ein Kreis vom Radius r ist. Da die Krümmung im Kreise $\frac{1}{r}$ ist, so ist die der Schraubenlinie natürlich $\frac{\cos^2 \alpha}{r}$. Die Grösse der Windung ist $\frac{\sin \alpha . \cos \alpha}{r}$ oder gleich dem Product der Krümmung in $\tan \alpha$. Krümmung und Windung sind folglich einander gleich, wenn $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ist.

Wir wollen die Krümmung wieder mit $\frac{1}{\varrho}$ bezeichnen, so dass $\cos^2 \alpha = \frac{r}{\varrho}$ ist. Die Höhe eines Schraubenganges ist $2\pi r \tan \alpha$ $= 2\pi \sqrt{r\varrho}\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)^{1/2}$ und wird folglich, wenn ϱ endlich bleibt, aber r unbegrenzt abnimmt, im Grenzfall gleich $2\pi\sqrt{r\varrho}$, d. h. unendlich klein. Danach wird die Bewegung eines Punktes in der Curve, obgleich sie un-

endlich wenig von der Bewegung in einer Geraden verschieden ist (die Bahn ist beständig in dem unendlich kleinen Abstande r von der festen Geraden, der Axe des Cylinders), eine endliche Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ besitzen. Die Windung, die gleich $\frac{1}{\varrho}$ $\tan \alpha$ oder $\frac{1}{\sqrt{\varrho r}}\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)^{1/2}$ ist, wird im Grenzfall eine mittlere Proportionale zwischen der unendlichen Krümmung der kreisförmigen Cylinderbasis und der endlichen Krümmung der Curve sein.

Die Beschleunigung (oder Kraft), welche erforderlich ist, um eine solche Bewegung eines materiellen Punktes zu erzeugen, wird später untersucht werden.

14. **Biegsame Linien.** — Eine Kette, Schnur, ein feiner Draht, eine feine Faser oder ein Haar führen uns zu dem Begriff einer vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Linie, die sich weder in der Natur vorfindet, noch künstlich hergestellt werden kann.

Die elementare Kinematik dieses Gegenstandes erfordert keine Untersuchung. Die mathematische Bedingung, die in jedem Falle derselben auszudrücken ist, besteht einfach darin, dass die längs der Linie gemessene Entfernung irgend eines Punktes von irgend einem andern Punkte constant bleibe, wie auch immer die Linie gebogen sei.

15. Der Gebrauch einer Schnur bei Maschinen liefert uns viele praktische Anwendungen dieser Theorie, die im Allgemeinen sehr einfach sind, obgleich merkwürdige und nicht immer sehr leichte geometrische Probleme in Verbindung damit vorkommen. Wir wollen hier bei solchen Fällen, wie Knoten, Weben, Stricken, u. s. w., nicht verweilen, da die allgemeine Entwicklung äusserst schwierig ist, während die gewöhnlichen Fälle allzu einfach sind, als dass eine Erklärung erforderlich wäre.

16. Bei der mechanischen Zeichnung von Curven wird oft eine biegsame und unausdehnbare Schnur vorausgesetzt. Will man z. B. eine Ellipse ziehen, so zeigt die Eigenschaft der Brennpunkte der Curve, dass, wenn man die Enden einer solchen Schnur an diese Punkte befestigt und die Schnur durch einen Stift beständig gespannt hält, der Stift die Curve verzeichnen wird.

Mittels eines um einen Brennpunkt beweglichen Lineals und einer an den andern Brennpunkt und einen Punkt des Lineals befestigten Schnur kann mit Rücksicht auf die analoge Eigenschaft ihrer Brennpunkte die Hyperbel beschrieben werden, u. s. w.

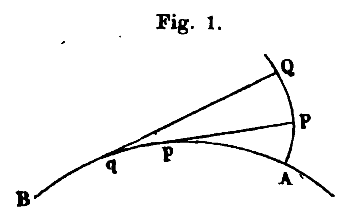
17. **Evolute.** — Von einiger Wichtigkeit in der theoretischen Physik, namentlich in gewissen Fragen der Optik, ist die Betrachtung der Evoluten, und daher wollen wir dieser Anwendung der Kinematik einige Paragraphen widmen.

Definition. — Wenn ein an einem Punkte einer ebenen Curve befestigter biegsamer und unausdehnbarer Faden längs der Curve gespannt und darauf in der Ebene der Curve abgewickelt wird, so beschreibt sein Endpunkt eine Evolvente der Curve. Die ursprüngliche Curve wird mit Rücksicht auf die neu entstandene die Evolute genannt.

18. In der vorstehenden Definition sprechen wir von einer Evolvente und von der Evolute einer Curve. Es lässt sich nämlich leicht einsehen, dass eine Curve nur eine Evolute haben kann, während sie unendlich viele Evolventen besitzt. Denn um eine andere und andere Evolvente zu erhalten, haben wir nur den Curvenpunkt zu ändern, von welchem der zeichnende Punkt seinen Ausgang nimmt, oder die Evolvente zu betrachten, die jeder Punkt des Fadens beschreibt, und diese werden im Allgemeinen verschiedene Curven sein. Dagegen zeigt der folgende Paragraph, dass es nur eine Evolute giebt.

19. Es seien AB irgend eine Curve, PQ ein Theil einer Evolvente und pP, qQ Lagen des freien Theils des Fadens. Man sieht auf der Stelle, dass pP, qQ Tangenten an den Bogen AB in den Punkten p, q sein müssen. Auch dreht sich der Faden in jeder Lage wie pP um den Punkt p, so dass das in P liegende unendlich kleine Curvenelement als Bogen eines Kreises anzusehen ist, der den Mittelpunkt p und den Radius pP hat: folglich ist pP eine Normale der Curve PQ. Danach ist die Evolute von PQ eine ganz bestimmte Curve, nämlich die einhüllende Linie der in allen Punkten von PQ errichteten Normalen oder, was dasselbe ist, der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Curve PQ. Wir erwähnen nur noch einen Satz, der sich auf der Stelle aus der Entstehungsart von PQ ergiebt, nämlich dass der Bogen qp gleich der Differenz von qQ und pP, oder dass der Bogen pA gleich pP ist.

Fig. 1.



20. **Geschwindigkeit.** — Die Intensität der Bewegung eines Punktes heisst seine Geschwindigkeit. Dieselbe wird offenbar grösser oder kleiner sein, je nachdem der in einer gegebenen Zeit durchlaufene Weg grösser oder kleiner ist. Die Geschwindigkeit kann gleichförmig, d. h. in jedem Augenblick dieselbe, oder veränderlich sein.

Eine gleichförmige Geschwindigkeit wird durch den während

der Zeiteinheit zurückgelegten Weg gemessen und im Allgemeinen durch die Anzahl der auf die Secunde kommenden Fuss ausgedrückt. Wenn sie sehr gross ist, wie beim Licht, so drückt man sie durch die Anzahl der auf die Secunde kommenden Meilen aus. Es ist zu bemerken, dass die Zeit hier in dem abstracten Sinne einer gleichförmig zunehmenden Grösse gebraucht wird, was man in der Differentialrechnung eine unabhängig Veränderliche nennt; ihre physikalische Definition wird im nächsten Capitel gegeben werden.

21. Wenn danach v die Geschwindigkeit eines in gleichförmiger Bewegung begriffenen Punktes ist, so legt derselbe jede Secunde einen Weg von v Fuss, also in t Secunden, wo t irgend eine Zahl bezeichnet, einen Weg von vt Fuss zurück, und wenn der durchlaufene Weg mit s bezeichnet wird, so haben wir

$$s = vt.$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher während der Zeiteinheit die Raumeinheit zurücklegt.

22. Es ist gut, Folgendes zu beachten: Da unsere Formel uns allgemein

$$v = \frac{s}{t}$$

liefert, und da wir durchaus keine Voraussetzung über die Grösse von s und t gemacht haben, so können wir s und t so klein, als wir nur wollen, annehmen. Wir erhalten also dasselbe Resultat, mögen wir nun v von dem in 1000000 Secunden oder von dem in $^1/_{1000000}$ Secunden zurückgelegten Wege herleiten. Dieser Gedanke ist von grossem Nutzen, da er uns Vertrauen in das Ergebniss eines spätern Paragraphen einflössen wird, in welchem wir, um eine veränderliche Geschwindigkeit zu messen, genöthigt sein werden, uns dem Werthe derselben durch Betrachtung des Weges zu nähern, der während einer so kurzen Zeit durchlaufen ist, dass die Geschwindigkeit während derselben ihre Grösse nicht merklich ändert.

23. Wenn der Punkt sich nicht gleichförmig bewegt, so ist die Geschwindigkeit veränderlich oder zu verschiedenen aufeinander folgenden Augenblicken verschieden. Wir verstehen dann unter der mittleren Geschwindigkeit während irgend einer Zeit den während dieser Zeit zurückgelegten Weg, dividirt durch die Zeit. Ferner definiren wir die wirkliche Geschwindigkeit, die der Punkt zu irgend einer Zeit besitzt, als den Weg, den er während einer Secunde zurückgelegt haben würde, wenn er für diese Zeit seine Geschwindig-

keit unverändert beibehalten hätte. Dass jeder in Bewegung befindliche Körper in jedem Augenblick eine bestimmte Geschwindigkeit hat, ist Allen einleuchtend und Gegenstand des täglichen Gesprächs. So nimmt die Schnelligkeit eines Eisenbahnzuges vom Augenblick der Abfahrt an nach und nach zu, und wir halten es nicht für ungereimt, zu sagen, er bewege sich in einem bestimmten Augenblick mit einer Geschwindigkeit von 10 oder 50 Meilen die Stunde, obgleich er sich während einer Stunde vielleicht überhaupt keine Meile fortbewegt hat. In der That können wir voraussetzen, in irgend einem Augenblick während der Bewegung werde der Dampf so adjustirt, dass er den Zug einige Zeit hindurch sich mit vollkommen gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen lasse. Dies würde die Geschwindigkeit sein, welche der Zug in dem in Rede stehenden Moment besässe. Aber auch ohne vorauszusetzen, dass die bewegende Kraft in dieser Weise adjustirt werde, können wir offenbar diese augenblickliche Geschwindigkeit näherungsweise erhalten, indem wir die Bewegung während einer so kurzen Zeit betrachten, dass die während derselben wirklich erfolgte Geschwindigkeitsänderung klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können.

24. Bezeichnet v die Geschwindigkeit, die der Punkt beim Beginn oder beim Ende oder zu irgend einem Augenblicke während der Bewegung besitzt, und s den während der Zeit t wirklich zurückgelegten Weg, so ist die Gleichung $v = \frac{s}{t}$ um so mehr annähernd richtig, je mehr die Geschwindigkeit während der Zeit t eine annähernd gleichförmige ist. Nehmen wir also t als $^1/_{10}$ Secunde an, und ergiebt sich, dass der während dieser Zeit zurückgelegte Weg s_1 ist, so ist $\frac{s_1}{^1/_{10}}$ oder $10\, s_1$ ein Näherungswerth der in jedem Augenblick während der Zeit t stattfindenden Geschwindigkeit. Nehmen wir für t $^1/_{100}$ Secunde und ist s_2 der entsprechende Weg, so ist $\frac{s_2}{^1/_{100}}$ oder $100\, s_2$ ein schon genauerer Näherungswerth. Die Reihe der Werthe:

der in einer Secunde zurückgelegte Weg,
das Zehnfache des im ersten Zehntel einer Sec. zurückgelegt. Weges,
d. Hundertfache „ „ „ Hundertel „ „ „ „ ,

u. s. w., bringen uns also der beim Beginn der ersten Secunde stattfindenden Geschwindigkeit immer näher. Die ganze Grundlage der Differentialrechnung ist thatsächlich in der einfachen Frage ent-

halten: „Welches ist der verhältnissmässige Betrag der Zunahme des zurückgelegten Weges?", d. h.: Was ist die Geschwindigkeit des in Bewegung befindlichen Punktes?

Ein Punkt, welcher während der Zeit t einen Weg s zurückgelegt hat, möge seine Bewegung noch einen Zeittheil δt hindurch fortsetzen und während desselben den Weg δs beschreiben. Ist dann v_1 die grösste und v_2 die kleinste Geschwindigkeit, welche der Punkt während δt besitzt, so hat man offenbar:

$$\delta s < v_1 . \delta t, \ \delta s > v_2 . \delta t,$$

also

$$\frac{\delta s}{\delta t} < v_1, \ \frac{\delta s}{\delta t} > v_2.$$

Je mehr aber δt abnimmt, desto mehr nähern sich v_1 und v_2, und im Grenzfall fallen beide Grössen mit der zur Zeit t stattfindenden Geschwindigkeit zusammen; folglich ist

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

25. Zerlegung einer Geschwindigkeit. — Die obige Definition der Geschwindigkeit ist stets auf dieselbe Weise anwendbar, der Punkt mag sich in einer geraden oder in einer krummen Linie bewegen. Da aber im letztern Falle sich die Bewegungsrichtung beständig ändert, so ist der blosse Betrag der Geschwindigkeit nicht hinreichend, die Bewegung vollständig zu bestimmen, und wir müssen in jedem solchen Falle noch andere Data haben, um die Unbestimmtheit zu beseitigen.

In allen Fällen dieser Art, mögen wir es wie hier mit Geschwindigkeiten, oder wie später mit Beschleunigungen und Kräften zu thun haben, besteht die gewöhnlich angewandte Methode vornehmlich darin, dass man nicht die Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft direct studirt, sondern sich mit den Theilen derselben beschäftigt, die parallel zu irgend drei auf einander senkrechten Geraden genommen sind. Wenn z. B. ein Zug auf einer geneigten Bahn nach Nord-Westen hin ansteigt, so kann die ganze Geschwindigkeit und die Neigung der Bahn gegeben sein. Dieselben Begriffe lassen sich aber auch so ausdrücken: der Zug bewegt sich zugleich nach Norden, nach Westen und nach oben, und die Bewegung wird sowohl der Grösse wie der Richtung nach vollkommen bekannt sein, wenn wir die in diesen Richtungen stattfindenden Geschwindigkeiten einzeln kennen. Diese Geschwindigkeiten werden die nach den drei auf einander senkrechten Richtungen: Norden, Westen, Oben genommenen Componenten der ganzen Geschwindigkeit genannt.

Im Allgemeinen ist (wie wir gesehen haben) die Geschwindigkeit eines in x, y, z befindlichen Punktes gleich $\frac{ds}{dt}$, oder, was dasselbe ist:

$$\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Nun ist $\frac{dx}{dt}$ die verhältnissmässige Zunahme von x, oder die der x Axe parallele Geschwindigkeit, die wir mit v_x bezeichnen wollen. Eine analoge Bedeutung hat jeder der Ausdrücke $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Sind also α, β, γ die Winkel, welche die Bewegungsrichtung mit den Axen bildet, so ist

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{v_x}{v},$$

folglich

$$v_x = v\cos\alpha,$$

und diese Gleichung lehrt Folgendes: —

26. Eine Geschwindigkeit von beliebiger Richtung kann nach jeder andern Richtung und senkrecht zu derselben zerlegt werden. Die erstere dieser beiden Componenten erhält man dadurch, dass man die Geschwindigkeit mit dem Cosinus des von beiden Richtungen eingeschlossenen Winkels multiplicirt; bei der Bestimmung der zweiten Componente hat man den Sinus dieses Winkels als Factor zu benutzen. Ferner kann jede Geschwindigkeit in drei Componenten zerlegt werden, die zu drei beliebigen auf einander senkrechten Geraden parallel sind, und jede Componente wird gebildet durch Multiplication der ganzen Geschwindigkeit mit dem Cosinus des zwischen den Richtungen der Geschwindigkeit und der betreffenden Componente enthaltenen Winkels.

Es ist nützlich, zu beachten, dass, wenn die Axen der x, y, z nicht senkrecht auf einander stehen, die den Axen parallelen Geschwindigkeiten immer noch $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sein werden. Es ist dann aber nicht mehr

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Wir überlassen es dem Leser, in diesem Falle die ganze Geschwindigkeit durch ihre Componenten genau auszudrücken.

Wenn wir die Geschwindigkeit längs einer Geraden zerlegen, die mit den Axen die Winkel λ, μ, ν und mit der Bewegungsrichtung den Winkel ϑ bildet, so ergeben sich, je nachdem wir direct v oder die Componenten v_x, v_y, v_z von v zerlegen, zwei Ausdrücke, die natürlich einander gleich sein müssen, nämlich

$$v\cos\vartheta = v_x\cos\lambda + v_y\cos\mu + v_z\cos\nu.$$

Werden in diese Gleichung die (§. 25) schon gegebenen Werthe von v_x, v_y, v_z eingesetzt, so erhalten wir den bekannten geometrischen Satz:

$$\cos\vartheta = \cos\alpha \,.\, \cos\lambda + \cos\beta \,.\, \cos\mu + \cos\gamma \,.\, \cos\nu$$

über den Winkel zwischen zwei Geraden, die mit den Axen gegebene Winkel bilden. Aus dem obigen Ausdruck ersehen wir auf der Stelle Folgendes: —

27. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. — Die nach irgend einer Richtung genommene Componente einer Geschwindigkeit ist die Summe der nach derselben Richtung genommenen Theile der drei rechtwinkligen Componenten der ganzen Geschwindigkeit. Dieser Satz behält seine Gültigkeit, wenn die Bewegung auf eine Ebene beschränkt ist; nur haben wir dann bloss zwei rechtwinklige Componenten. Diese Resultate führen zu der folgenden an sich klaren geometrischen Construction: —

Es sollen zwei beliebige Geschwindigkeiten, wie OA, OB, zusammengesetzt werden. Man ziehe von A aus AC parallel und gleich OB und verbinde O mit C, so ist OC die resultirende Geschwindigkeit in Grösse und Richtung.

Fig. 2.

OC ist augenscheinlich die Diagonale des Parallelogramms, welches OA und OB zu Seiten hat.

Hieraus ergeben sich weiter folgende Sätze: —

Die Resultante von Geschwindigkeiten, welche durch die sämmtlich in demselben Sinne genommenen Seiten irgend eines geschlossenen Polygons dargestellt werden, ist Null, das Polygon mag eben sein oder nicht.

Wenn alle Seiten eines Polygons, mit Ausnahme einer einzigen, Geschwindigkeiten darstellen, so wird die Resultante dieser Geschwindigkeiten durch die eine ausgeschlossene Seite dargestellt, vorausgesetzt, dass letztere im entgegengesetzten Sinne wie alle übrigen genommen wird.

Sind zwei oder drei Geschwindigkeiten in zwei oder drei aufeinander senkrechten Richtungen gegeben, so ist die Resultante die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate, und die Cosinus der Winkel, welche die Resultante mit den gegebenen Richtungen bildet, sind die Verhältnisse der Componenten zur Resultante.

Da δs im Grenzfall in δr und $r\delta\vartheta$ zerlegt werden kann, wo r und ϑ Polarcoordinaten einer ebenen Curve sind, so ist leicht zu sehen, dass $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\vartheta}{dt}$ die in der Richtung des Radiusvector und senkrecht zu

dieser Richtung genommenen Componenten der Geschwindigkeit sind. Wir können dasselbe Resultat noch auf eine andere Weise erlangen. Es ist

$$x = r \cdot \cos\vartheta,\ y = r \cdot \sin\vartheta,$$

folglich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\vartheta - r\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\vartheta + r\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Nach §. 26 ist aber die ganze in der Richtung von r genommene Geschwindigkeitscomponente

$$\frac{dx}{dt}\cos\vartheta + \frac{dy}{dt}\sin\vartheta,$$

und dieser Ausdruck hat, den letzten Formeln zufolge, den Werth $\frac{dr}{dt}$. In derselben Weise erhält man für die zu r senkrechte Componente

$$\frac{dy}{dt}\cos\vartheta - \frac{dx}{dt}\sin\vartheta, \text{ oder } r\frac{d\vartheta}{dt}.$$

28. **Beschleunigung.** — Man nennt die Geschwindigkeit eines Punktes beschleunigt oder verzögert, je nachdem dieselbe zu- oder abnimmt. Es ist jedoch üblich, in beiden Fällen das Wort Beschleunigung zu gebrauchen, und dieselbe im erstern Falle als positive, im zweiten Falle als negative Grösse anzusehen. Die Beschleunigung einer Geschwindigkeit kann natürlich gleichförmig oder veränderlich sein. Sie heisst gleichförmig, wenn der Punkt in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszunahmen empfängt, und wird dann gemessen durch die während der Zeiteinheit wirklich erfolgte Geschwindigkeitszunahme. Wenn wir als Einheit der Beschleunigung die Beschleunigung annehmen, welche der Geschwindigkeit eines Punktes während der Zeiteinheit eine Einheit der Geschwindigkeit hinzufügt, so wird eine Beschleunigung α in der Zeiteinheit α und somit in t Zeiteinheiten αt Einheiten der Geschwindigkeit hinzufügen. Bezeichnet also V die während der Zeit t erfolgte Geschwindigkeitsänderung, so ist

$$V = \alpha t.$$

29. Wenn der Punkt in aufeinander folgenden gleichen Zeitabschnitten nicht gleiche Geschwindigkeitszunahmen empfängt, so ist die Beschleunigung veränderlich. Sie wird dann durch die Geschwindigkeitszunahme gemessen, welche in der Zeiteinheit erzeugt sein würde, wenn die Beschleunigung während derselben ihren anfänglichen Werth unverändert beibehalten hätte. Die mittlere Beschleunigung für irgend eine Zeit ergiebt sich, wenn man die

ganze während dieser Zeit gewonnene Geschwindigkeit durch die Zeit dividirt.

Es sei v die Geschwindigkeit zur Zeit t, δv die Geschwindigkeitsänderung während des Zeitraums δt, und α_1, α_2 beziehungsweise der grösste und der kleinste Werth der während δt eingetretenen Beschleunigung. Dann ist offenbar

$$\delta v < \alpha_1 \delta t, \; \delta v > \alpha_2 \delta t,$$

oder

$$\frac{\delta v}{\delta t} < \alpha_1, \; \frac{\delta v}{\delta t} > \alpha_2.$$

Wird δt immer kleiner und kleiner angenommen, so nähern sich die Werthe von α_1 und α_2 immer mehr einander, und im Grenzfall fallen sie mit der zur Zeit t stattfindenden Beschleunigung α zusammen. Es ist also

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.$$

Es ist von Nutzen, zu bemerken, dass wir (bei Annahme einer andern unabhängig Veränderlichen) auch

$$\alpha = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

schreiben können.

Da $v = \frac{ds}{dt}$, so haben wir $\alpha = \frac{d^2s}{dt^2}$, und aus Betrachtungen, die den oben angestellten ganz analog sind, erhellt, dass

$$\alpha_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ u. s. w.}$$

die den Axen parallelen Beschleunigungen sind. Man übersehe aber durchaus nicht, dass $\frac{d^2s}{dt^2}$ nicht die vollständige Resultante von $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ist; denn wir haben im Allgemeinen nicht

$$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

Die Richtungscosinus der in irgend einem Punkte x, y, z an die Bahn gezogenen Tangente sind

$$\frac{1}{v}\frac{dx}{dt}, \; \frac{1}{v}\frac{dy}{dt}, \; \frac{1}{v}\frac{dz}{dt}.$$

Diejenigen der Geraden, welche die resultirende Beschleunigung darstellt, sind

$$\frac{1}{f}\frac{d^2x}{dt^2}, \; \frac{1}{f}\frac{d^2y}{dt^2}, \; \frac{1}{f}\frac{d^2z}{dt^2},$$

wo die resultirende Beschleunigung der Kürze wegen mit f bezeichnet ist. Die Richtungscosinus der Ebene dieser beiden Linien sind daher

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{\{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2\}^{1/2}}, \text{ u. s. w.}$$

Diese Ausdrücke zeigen (§ 9), dass diese Ebene die osculatorische Ebene

der Curve ist. Bezeichnet ferner ϑ den von jenen beiden Geraden eingeschlossenen Winkel, so ist

$$\sin\vartheta = \frac{\{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2\}^{1/2}}{vf\,dt^3},$$

oder mit Rücksicht auf den in § 9 erhaltenen Ausdruck der Krümmung

$$\sin\vartheta = \frac{ds^3}{\varrho\,vf\,dt^3} = \frac{v^2}{f\varrho}.$$

Es ist folglich

$$f\sin\vartheta = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Weiter ist

$$\cos\vartheta = \frac{1}{vf}\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{ds\,d^2s}{vf\,dt^3} = \frac{d^2s}{f\,dt^2}$$

also

$$f\cos\vartheta = \frac{d^2s}{dt^2},$$

und wir erhalten somit folgenden Satz: —

30. Zerlegung und Zusammensetzung von Beschleunigungen. — Die nach irgend einer Richtung genommene Gesammtbeschleunigung ist die Summe der (nach jener Richtung genommenen) Componenten der zu drei beliebigen auf einander senkrechten Axen parallelen Beschleunigungen; jede Componente einer Beschleunigung wird auf dieselbe Weise wie die Componente einer Geschwindigkeit gefunden, nämlich durch Multiplication mit dem Cosinus des Winkels zwischen der Richtung der Beschleunigung und der Geraden, längs welcher dieselbe genommen werden soll.

31. Wenn sich ein Punkt in einer Curve bewegt, so kann die Gesammtbeschleunigung in zwei Theile zerlegt werden, von denen der eine die Richtung der Bewegung hat und der Beschleunigung der Geschwindigkeit gleich ist; der andere ist gegen den Krümmungsmittelpunkt hin (also senkrecht gegen die Bewegungsrichtung) gerichtet, und seine Grösse ist dem Quadrate der Geschwindigkeit und zugleich der Krümmung der Bahn proportional. Der erstere dieser Theile ändert die Geschwindigkeit, der zweite wirkt nur auf die Gestalt der Bahn oder auf die Bewegungsrichtung ein. Ist demnach ein in Bewegung befindlicher Punkt einer constanten oder veränderlichen Beschleunigung unterworfen, die beständig senkrecht zur Bewegungsrichtung ist, so erleidet die Geschwindigkeit keine Aenderung, und die Wirkung der Beschleunigung besteht einzig und allein darin, dass sie den Punkt sich in einer Curve bewegen lässt, deren Krümmung in jedem Augenblick der Beschleunigung proportional ist.

32. Es lässt sich dies noch in anderer Weise ausdrücken: Wenn sich ein Punkt mit gleichförmiger oder veränderlicher Geschwindigkeit in einer Curve bewegt, so ist seine Richtungsänderung als gleichbedeutend mit einer gegen den Krümmungsmittelpunkt hin gerichteten Beschleunigung anzusehen, deren Grösse gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser ist. Die Gesammtbeschleunigung ist in jedem Falle die Resultante der die Richtungsänderung in der angegebenen Weise ersetzenden Beschleunigung und der Beschleunigung der längs der Curve wirklich stattfindenden Geschwindigkeit.

Wenn die Bewegung in einer ebenen Curve erfolgt, so können wir die Beschleunigung noch auf eine andere Weise zerlegen, die zuweilen von Nutzen ist, nämlich längs der Richtung des Radiusvector und senkrecht zu dieser Richtung. Durch eine der in § 27 angewandten ganz ähnliche Methode finden wir ohne Mühe für die nach der Richtung des Radiusvector genommene Componente

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

und für die zum Radiusvector senkrechte Componente

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

33. Bestimmung der Bewegung aus der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung. — Wenn in irgend einem Falle der Bewegung eines Punktes die ganze Geschwindigkeit und deren Richtung, oder einfach die nach drei auf einander senkrechten Richtungen genommenen Geschwindigkeitscomponenten für irgend eine Zeit, oder, wie es meist geschieht, für irgend eine Lage gegeben sind, so ist es eine Aufgabe der reinen Mathematik, die Gestalt der beschriebenen Bahn und andere die Bewegung betreffende Umstände zu bestimmen, und diese Aufgabe kann in allen Fällen, wenn auch nicht ganz exact, so doch mit jedem nur wünschenswerthen Grade der Genauigkeit gelöst werden.

Ebenso verhält es sich, wenn in jedem Augenblick die Gesammtbeschleunigung und deren Richtung, oder einfach deren rechtwinklige Componenten gegeben sind, vorausgesetzt, dass in irgend einem Augenblicke die Geschwindigkeit, die Bewegungsrichtung und zugleich die Lage des Punktes bekannt sind.

Denn wir haben im ersteren Falle

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v \cos \alpha, \text{ u. s. w.,}$$

und da diese drei simultanen Gleichungen nur x, y, z und t enthalten

können, so werden wir nach Integration derselben im Stande sein, x, y, z als Functionen von t auszudrücken. Wird aus den letzterhaltenen Gleichungen t eliminirt, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen x, y und z, von denen jede eine Oberfläche darstellt, auf welcher die vom Punkte beschriebene Bahn liegt; letztere ist daher durch den Schnitt dieser beiden Oberflächen vollständig bestimmt.

Im zweiten Falle haben wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha_x, \text{ u. s. w.,}$$

und auch für diese Gleichungen gelten die obigen Bemerkungen; nur ist hier jede Gleichung zweimal zu integriren.

Die durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten lassen sich sofort bestimmen, wenn die Coordinaten des Punktes und die Componenten seiner Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick bekannt sind.

34. **Beispiele von Geschwindigkeiten.** — Aus den dargelegten Principien lassen sich eine Menge interessanter Resultate herleiten, von denen wir einige der wichtigsten anführen wollen:

a. Wenn die Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen Punktes gleichförmig ist, und wenn die Richtung derselben sich gleichförmig in einer Ebene dreht, so ist die Bahn, welche der Punkt beschreibt, ein Kreis.

b. Wenn sich ein Punkt in einer Ebene bewegt und die jeder von zwei rechtwinkligen Axen parallelen Geschwindigkeitscomponenten ihren Entfernungen von diesen Axen beziehungsweise proportional sind, so ist die Bahn ein Kegelschnitt, dessen Hauptdurchmesser mit jenen Axen zusammenfallen; ausserdem ist die Beschleunigung beständig gegen den Anfangspunkt der Coordinaten hin oder von diesem Punkte weggerichtet.

c. Wenn jede der beiden je einer Axe parallelen Geschwindigkeitscomponenten das nämliche Vielfache ihres Abstandes von der andern Axe ist, so ist die Bahn eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade.

d. Wenn die Geschwindigkeit gleichförmig ist, sich aber, was ihre Richtung betrifft, gleichförmig um einen geraden Kegel von kreisförmiger Basis dreht, so bewegt sich der Punkt in einer Schraubenlinie, auf einem Cylinder von kreisförmiger Basis, dessen Axe der des Kegels parallel ist.

a. Es sei a die Geschwindigkeit und α der Winkel, durch welchen ihre Richtung sich während der Zeiteinheit dreht; dann haben wir bei passender Wahl der Axen

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin \alpha t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos \alpha t,$$

und daraus ergiebt sich

$$(x-A)^2+(y-B)^2=\frac{a^2}{\alpha^2}.$$

b. Aus

$$\frac{dx}{dt}=\mu y,\ \frac{dy}{dt}=\nu x$$

folgt

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mu\nu x,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\mu\nu y;$$

die ganze Beschleunigung ist also gegen den Anfangspunkt hin oder von diesem Punkte weg gerichtet.

Ferner ist $\frac{dy}{dx}=\frac{\nu}{\mu}\frac{x}{y}$, mithin $\mu y^2-\nu x^2=C$, und dies ist die Gleichung eines auf seine Hauptaxen bezogenen Kegelschnitts.

c. Ist

$$\frac{dx}{dt}=\mu x,\ \frac{dy}{dt}=\mu y,$$

so erhalten wir

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

oder

$$y=Cx.$$

35. Beispiele von Beschleunigungen. — a. Wenn sich ein Punkt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit V in einem Kreise vom Radius R bewegt, so ist die ganze Beschleunigung gegen den Mittelpunkt hin gerichtet und hat den constanten Werth $\frac{V^2}{R}$. (S. § 31.)

b. Bei gleichförmiger Beschleunigung in der Richtung der Bewegung beschreibt ein Punkt Wege, welche den Quadraten der seit Beginn der Bewegung verflossenen Zeiten proportional sind.

Der während irgend eines Zeitraums zurückgelegte Weg ist in diesem Falle gleich dem Wege, der in derselben Zeit beschrieben sein würde, wenn die Bewegung gleichförmig mit der in der Mitte des in Rede stehenden Zeitraums stattfindenden Geschwindigkeit erfolgt wäre. Mit anderen Worten: die mittlere Geschwindigkeit während irgend einer Zeit ist (bei gleichförmiger Beschleunigung) das arithmetische Mittel aus der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit. Dies ist der Fall bei einem in verticaler Richtung fallenden Steine.

Es sei nämlich die Beschleunigung der x Axe parallel, so haben wir

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha,$$

folglich

$$\frac{dx}{dt}=v=\alpha t \text{ und } x=\tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Nach § 29 können wir die obige Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$v\frac{dv}{dx}=\alpha,$$

und daraus ergiebt sich

$$\frac{v^2}{2} = \alpha x.$$

Wenn der Punkt zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit V besass, so gehen diese Gleichungen über in

$$v = V + \alpha t,\ x = Vt + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \text{ und } \frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} + \alpha x.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Die Anfangsgeschwindigkeit ist also} &&= V,\\
&\text{die Endgeschwindigkeit} &&= V + \alpha t,\\
&\text{das arithmetische Mittel beider Werthe} &&= V + \tfrac{1}{2}\alpha t\\
& &&= \frac{x}{t},
\end{aligned}$$

und dies beweist die Richtigkeit des zweiten Theils der obigen Behauptung.

c. **Wenn die Beschleunigung gleichförmig und von constanter Richtung ist, so beschreibt der Punkt eine Parabel, deren Axe jener Richtung parallel ist. Dies ist der Fall eines im leeren Raum sich bewegenden Projectils.**

Denn wenn die y Axe der Beschleunigung α parallel ist und die Bewegung zu irgend einer Zeit in der xy Ebene erfolgt, so ist

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0,\ \frac{dz}{dt} = 0,\ z = 0,$$

die Bewegung folglich ganz auf die xy Ebene beschränkt.

Dann ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0,\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \alpha,$$

und wenn

$$\frac{dx}{dt} = const. = U$$

ist, so erhalten wir sofort

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\alpha}{U^2},$$

oder

$$y = \frac{\alpha x^2}{2U^2} + Cx + C',$$

und

$$y = \frac{\alpha x^2}{2U^2} + \frac{Vx}{U},$$

vorausgesetzt, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ und $\frac{dy}{dt} = V$ ist. Die letzte Gleichung kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$\frac{2U^2}{\alpha}\left(y + \frac{V^2}{2\alpha}\right) = \left(x + \frac{UV}{\alpha}\right)^2$$

und stellt eine Parabel dar, deren Axe parallel der y Axe, deren Parameter gleich $\frac{U^2}{2\alpha}$, und deren Scheitel der durch die Coordinaten

$$x = -\frac{UV}{\alpha},\ y = -\frac{V^2}{2\alpha}$$

bestimmte Punkt ist.

d. Als Beispiel einer Beschleunigung in einer gewundenen Curve nehmen wir den Fall des § 13 oder des § 34, d.

Ein Punkt bewege sich in einem Kreise vom Radius r mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω (in Beziehung auf den Mittelpunkt); zugleich möge sich dieser Kreis senkrecht gegen seine Ebene mit der Geschwindigkeit V bewegen. Dann beschreibt der Punkt eine Schraubenlinie auf einem Cylinder vom Radius r, und der Steigungswinkel oder die Neigung α wird durch die Formel

$$tan\,\alpha = \frac{V}{r\omega}$$

bestimmt. Die Krümmung der Bahn ist

$$\frac{1}{r}\frac{r^2\omega^2}{V^2 + r^2\omega^2} \text{ oder } \frac{r\omega^2}{V^2 + r^2\omega^2},$$

und das Maass der Windung

$$\frac{\omega}{V}\cdot\frac{V^2}{V^2 + r^2\omega^2} = \frac{V\omega}{V^2 + r^2\omega^2}.$$

Die Beschleunigung ist senkrecht gegen die Axe des Cylinders gerichtet und gleich $r\omega^2$. Wird dieselbe mit A bezeichnet, so ist

$$\text{die Krümmung} = \frac{A}{V^2 + Ar} = \frac{A}{V^2 + \frac{A^2}{\omega^2}},$$

$$\text{die Windung} = \frac{V}{VAr}\cdot\frac{A}{V^2 + Ar} = \frac{V\omega}{V^2 + \frac{A^2}{\omega^2}}.$$

Nehmen wir nun an, A bleibe endlich und r werde unendlich klein, also ω unendlich gross, so ist im Grenzfall

$$\text{die Krümmung} = \frac{A}{V^2},$$

$$\text{die Windung} = \frac{\omega}{V}.$$

Wenn wir danach einen materiellen-Punkt haben, der sich in der dargelegten Weise bewegt, und die Kraft (s. das zweite Capitel) betrachten, welche erforderlich ist, um die Beschleunigung hervorzubringen, so finden wir, dass eine endliche, zur Bewegungsbahn senkrechte Kraft, deren Richtung sich mit einer unendlich grossen Winkelgeschwindigkeit dreht, eine constante unendlich kleine Abweichung (in einer ihrer eigenen entgegengesetzten Richtung) von der Linie der ungestörten Bewegung, sowie endliche Krümmung und unendliche Windung unterhält.

e. Wenn die Beschleunigung senkrecht gegen eine gegebene Ebene und der Entfernung von derselben proportional ist, so ist die Bahn eine ebene Curve, und zwar die harmonische Linie, wenn die Beschleunigung gegen die Ebene hin gerichtet ist, dagegen eine

mehr oder weniger gestreckte Kettenlinie, wenn die Beschleunigung von der Ebene abgewandt ist.

Wenn die z-Axe in irgend einem Augenblick senkrecht gegen die Beschleunigung und gegen die Bewegungsrichtung ist, so haben wir, wie im Falle c,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dz}{dt} = z = 0.$$

Wird der Anfangspunkt der Coordinaten in der Ebene angenommen, so ist auch

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ \frac{d^2y}{dt^2} = \mu y,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = const. = a,$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{a^2}\, y = \mp \frac{y}{b^2}.$$

Hieraus folgt, wenn μ negativ ist,

$$y = P\cos\left(\frac{x}{b} + Q\right),$$

die Gleichung der harmonischen oder Sinus-Linie. Für ein positives μ erhält man

$$y = Pe^{\frac{x}{b}} + Qe^{-\frac{x}{b}},$$

und dieser Gleichung können wir durch Verschiebung des Anfangspunktes längs der x Axe die Form

$$y = R(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}})$$

geben. Wenn $2R = b$ ist, so stellt diese Gleichung die gemeine, sonst eine in der Richtung der y gestreckte oder verbreiterte Kettenlinie dar.

36. Beschleunigung, gegen einen festen Punkt gerichtet. — a. Wenn die Beschleunigung gegen einen festen Punkt gerichtet ist, so liegt die Bahn in einer durch diesen Punkt gehenden Ebene, und die vom Radiusvector in dieser Ebene beschriebenen Flächenstücke sind den verflossenen Zeiten proportional. Dies umfasst den Fall eines Trabanten oder eines Planeten, der sich um sein Hauptgestirn bewegt.

Offenbar findet keine Beschleunigung senkrecht gegen die Ebene statt, welche in irgend einem Augenblicke den festen und den beweglichen Punkt, sowie die Bewegungsrichtung des letztern enthält, und da beim Beginn der Bewegung keine senkrecht gegen diese Ebene gerichtete Geschwindigkeit vorhanden ist, so findet eine solche auch während der ganzen Bewegung nicht statt; der Punkt bewegt sich also in der Ebene. Wäre nun keine Beschleunigung

vorhanden, so würde der Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine gerade Linie beschreiben, und in diesem Falle wären die vom Radiusvector beschriebenen Flächen der Zeit proportional. Auch hängt die Grösse der in irgend einem Augenblick wirklich beschriebenen Fläche von der Länge des Radiusvector und der zu demselben senkrechten Geschwindigkeit ab und erleidet, wie unten gezeigt wird, durch eine dem Radiusvector parallele Beschleunigung keine Aenderung. Dies beweist den zweiten Theil des Satzes.

Wir haben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = P\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = P\frac{z}{r},$$

wenn der feste Punkt der Anfangspunkt der Coordinaten und P eine Function von x, y, z ist. (In der Natur hängt P nur von r ab.) Es ergiebt sich daraus

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ u. s. w.},$$

und eine Integration liefert jetzt

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C_1,$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C_2,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_3.$$

Hieraus erhält man sofort

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0,$$

d. h. die Bewegung findet in einer durch den Anfangspunkt gehenden Ebene statt. Wird diese Ebene als xy Ebene angenommen, so haben wir nur die eine Gleichung

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_3 = h.$$

In Polarcoordinaten ist dies

$$h = r^2\frac{d\vartheta}{dt} = 2\frac{dA}{dt},$$

wenn A die von der Curve, einem festen Radiusvector und dem Radiusvector des in Bewegung befindlichen Punktes begrenzte Fläche bezeichnet. Diese Fläche nimmt daher gleichmässig mit der Zeit zu.

b. In demselben Falle ist die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte dem vom festen Punkte auf die augenblickliche Bewegungsrichtung, die Tangente an die Bahn, gefällten Lothe umgekehrt proportional.

Denn das Product dieses Lothes in die Geschwindigkeit ist offenbar das Doppelte der während einer Secunde um den festen Punkt beschriebenen Fläche.

Man kann dies auch auf folgende Weise darthun: —

Wird das Loth auf die Tangente mit p bezeichnet, so ist

$$p = x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds},$$

folglich

$$p\frac{ds}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h.$$

Wenn wir die Bewegung auf Coordinaten in ihrer eigenen Ebene beziehen, so haben wir nur die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Px}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Py}{r},$$

und daraus ergiebt sich, wie oben,

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = h.$$

Wenn wir mittels der letzten Gleichung t aus

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Px}{r}$$

eliminiren, indem wir Polarcoordinaten statt der rechtwinkligen einsetzen, so gelangen wir zur Differentialgleichung der Bahn in Polarcoordinaten.

Der Abwechslung wegen wollen wir dieselbe aus den Formeln des § 32 herleiten. Diese geben

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = P, \quad r^2\frac{d\vartheta}{dt} = h,$$

oder, wenn $\frac{1}{r} = u$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{u}\right)}{dt^2} - \frac{1}{u}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = P \text{ und } \frac{d\vartheta}{dt} = hu^2.$$

Es ist aber

$$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = hu^2\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{d\vartheta} = -h\frac{du}{d\vartheta},$$

folglich

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{u}\right)}{dt^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\vartheta^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{u}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = h^2u^3,$$

und die Einsetzung dieser Werthe liefert uns die verlangte Gleichung

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{P}{h^2u^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung enthält ausser h noch zwei willkürliche Constanten. Die den beiden obigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung noch zukommende vierte Constante ist einzuführen, wenn man die Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = hu^2$$

integrirt, nachdem darin u durch seinen mittels der Gleichung der Bahn in ϑ ausgedrückten Werth ersetzt worden ist.

Andere Beispiele dieser Principien werden wir in den Capiteln über die Kinetik antreffen.

37. **Hodograph.** — Wenn sich ein Punkt irgend wie in irgend einer Bahn bewegt und von einem beliebigen festen Punkte aus Linien gezogen werden, welche die Geschwindigkeit des bewegten Punktes für jeden Augenblick in Grösse und Richtung darstellen, so bilden die Endpunkte dieser Linien eine Curve, welche Hodograph genannt wird. Die Erfindung dieser Construction verdanken wir W. R. Hamilton, und der schönste unter den vielen bemerkenswerthen Sätzen, zu denen sie führt, ist folgender: Der Hodograph für die Bewegung eines Planeten oder Kometen ist immer ein Kreis, welches auch die Form und Ausdehnung der Bahn sein mögen.

Da der Radiusvector des Hodographen in jedem Augenblick die Geschwindigkeit darstellt, so muss (§ 27) ein Bogenelement die Beschleunigung, also ein endlicher Bogen die während der entsprechenden Zeit stattgefundene Gesammtbeschleunigung des in Bewegung befindlichen Punktes darstellen. Auch leuchtet ein, dass die Tangente an den Hodographen parallel der Richtung ist, welche die Beschleunigung eines Punktes in der entsprechenden Stelle seiner Bahn hat.

Wenn x, y, z die Coordinaten des in Bewegung befindlichen und ξ, η, ζ die Coordinaten des entsprechenden Hodographenpunktes sind, so hat man offenbar

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt}, \quad \zeta = \frac{dz}{dt},$$

folglich

$$\frac{d\xi}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{d\eta}{\frac{d^2y}{dt^2}} = \frac{d\zeta}{\frac{d^2z}{dt^2}},$$

oder die Tangente an den Hodographen ist der Beschleunigung in der Bahn parallel. Bezeichnet ferner σ den Bogen des Hodographen, so ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

oder die Geschwindigkeit im Hodographen ist gleich der Grösse der Beschleunigung in der Bahn.

38. Im Falle eines Planeten oder Kometen ist die Beschleunigung gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet. Die Geschwindig-

keit ist also (§ 36, b.) dem von jenem Punkte auf die Tangente an die Bahn gefällten Lothe umgekehrt proportional. Die Bahn nehmen wir als Kegelschnitt und den Mittelpunkt der Sonne als einen Brennpunkt desselben an. Nun wissen wir aber, dass, wenn die Bahn eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, die Punkte, in welchen die vom Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lothe die Tangenten schneiden, auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser die grössere Axe ist; im Falle einer Parabel liegen diese Punkte in der im Scheitel errichteten Tangente. Wird also auf jedem dieser Lothe ein Stück abgetragen, welches eine dritte Proportionale zur Länge des Lothes und einer beliebigen constanten Länge ist, so wird die abgetragene Strecke die Geschwindigkeit der Grösse nach darstellen, während ihre Richtung zu derjenigen der Geschwindigkeit senkrecht ist. Der geometrische Ort der Endpunkte dieser auf den Lothen abgetragenen Stücke ist daher der um einen rechten Winkel gedrehte Hodograph. Die Geometrie lehrt aber, dass die fraglichen Punkte immer in einem Kreise liegen, und damit ist der in § 37 erwähnte Satz bewiesen. Der Hodograph umgiebt seinen festen Punkt, wenn die Bahn eine Ellipse ist; er geht durch den festen Punkt im Falle einer Parabel; der feste Punkt liegt endlich ausserhalb des Hodographen, wenn die Bahn eine Hyperbel ist.

Für ein Projectil, das durch die Luft keinen Widerstand erfährt, haben wir, wie in der Kinetik gezeigt werden wird, die (im § 35, c. vorausgesetzten) Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

wenn die y Axe vertical nach oben angenommen wird. Für den Hodographen ist also

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = -g,$$

oder $\xi = C$, $\eta = C' - gt$, d. h. der Hodograph ist eine verticale Gerade, längs welcher der beschreibende Punkt sich gleichförmig bewegt.

Ebenso werden wir in der Kinetik sehen, dass die Bewegungsgleichungen eines Planeten oder Kometen in der Ebene ihrer Bahn folgende sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mu y}{r^3},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ist. Hieraus folgt, wie in § 36,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\mu x}{h} \cdot \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu}{h} \cdot \frac{(x^2 + y^2)\frac{dy}{dt} - y\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)}{r^3}$$

$$= \frac{\mu}{h} \cdot \frac{r^2\frac{dy}{dt} - yr\frac{dr}{dt}}{r^3}.$$

Eine Integration liefert jetzt

$$\frac{dx}{dt} + A = \frac{\mu}{h} \cdot \frac{y}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{dy}{dt} + B = -\frac{\mu}{h} \cdot \frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)},$$

und die Gleichung des Hodographen ist somit

$$(\xi + A)^2 + (\eta + B)^2 = \frac{\mu^2}{h^2},$$

d. h. der Hodograph ist ein Kreis, wie oben angegeben wurde. Wir erwähnen nur, dass die Gleichung der Bahn auf der Stelle erhalten wird, wenn man $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ aus den drei ersten obigen Integralen (I), (II), (III) eliminirt. Wir finden auf diese Weise

$$-h + Ay - Bx = \frac{\mu}{h} r,$$

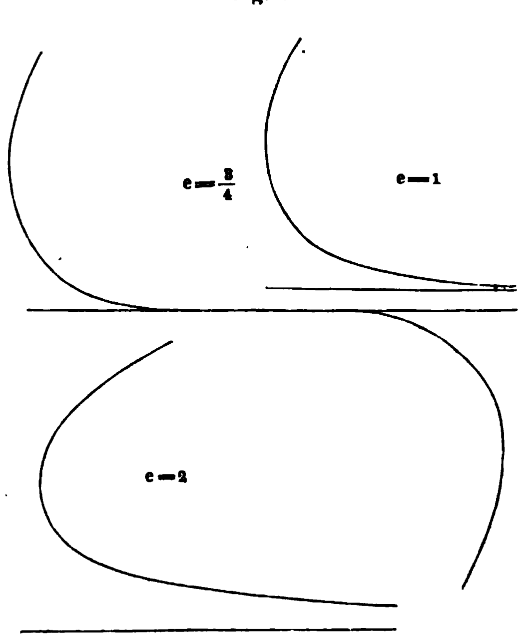
die Gleichung eines Kegelschnitts, auf einen Brennpunkt als Coordinatenanfangspunkt bezogen.

39. Anwendungen des Hodographen. — Die Intensität der Wärme und des Lichts, die von einem Punkte oder von einer gleichförmig strahlenden Kugeloberfläche ausströmen, nimmt nach demselben Gesetz wie die Schwerkraft mit zunehmender Entfernung ab. Die Wärme- und Lichtmenge, welche ein Planet während irgend einer Zeit von der Sonne empfängt, ist folglich der während dieser Zeit eintretenden Gesammtbeschleunigung, d. i. dem entsprechenden Bogen des Hodographen proportional. Hieraus ersieht man leicht, dass, wenn sich z. B. ein Komet in einer Parabel bewegt, die Wärmemenge, die er während irgend einer Zeit von der Sonne erhält, dem Winkel proportional ist, durch welchen seine Bewegungsrichtung sich während dieser Zeit dreht. Für einen in einer Ellipse sich bewegenden Planeten giebt es einen entsprechenden Satz, der aber etwas complicirter ist.

40. Verfolgungscurve. — Wenn einer von zwei Punkten, deren jeder eine bestimmte gleichförmige Geschwindigkeit besitzt, sich

in einer gegebenen Curve bewegt, während der zweite Punkt in jedem Augenblick seinen Weg nach dem erstern zu hinlenkt, so beschreibt der zweite Punkt eine Bahn, welche Verfolgungscurve genannt wird. Auf diesen Gedanken soll man durch die alte Regel gekommen sein, nach welcher ein Kaperschiff beständig auf das verfolgte Schiff hingesteuert wird (Bouguer, Mém. de l'Acad. 1732). Es ist die Curve, welche ein Hund beschreibt, der seinem Herrn nachsetzt.

Fig. 3.



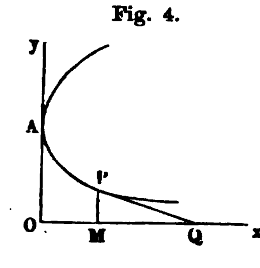
Die einfachsten Fälle sind natürlich diejenigen, in denen der erstere Punkt sich in einer geraden Linie bewegt. Solcher Fälle giebt es drei; denn die Geschwindigkeit des ersteren Punktes kann grösser oder kleiner als die des zweiten, oder gleich derselben sein. Die vorstehenden Figuren enthalten die diesen drei Fällen entsprechenden Curven; die Geschwindigkeit des nachsetzenden Punktes ist darin beziehungsweise $^4/_3$, 1, $^1/_2$ mal so gross, als die des verfolgten. Im zweiten und dritten Falle kann der zweite Punkt den ersteren nie einholen, und folglich ist die Gerade, in welcher der erstere Punkt sich bewegt, eine Asymptote an die Bahn des zweiten. Im ersten Falle holt der zweite Punkt den ersteren ein, und an der Stelle, wo

dies geschieht, findet eine Berührung beider Bahnen statt. Der weitere Theil der Curve genügt einer etwas modificirten Fassung der ursprünglichen Frage und wird Fluchtcurve genannt.

Wir beschränken uns darauf, die Differentialgleichung der Curve zu bilden und ihr Integral anzugeben; die Integration selbst überlassen wir dem Leser.

Es sei Ox die Bahn des ersteren Punktes, der die Geschwindigkeit v besitzt, und AP die Curve, in welcher sich der nachsetzende Punkt mit der Geschwindigkeit u bewegt. Sind dann P und Q zwei gleichzeitige Lagen der beiden Punkte, so muss die in P an die Curve gelegte Tangente durch Q gehen. Eine augenblickliche Ueberlegung überzeugt uns, dass die Curve AP eine auf Ox senkrechte Tangente besitzen muss. Diese Tangente nehmen wir zur y Axe und setzen $OA = a$. Ist dann

Fig. 4.



$$OQ = \xi, \quad AP = s,$$

und bezeichnen x, y die Coordinaten von P, so haben wir

$$\frac{AP}{u} = \frac{OQ}{v},$$

da A, O ebenso wie P, Q ein Paar gleichzeitiger Lagen beider Punkte ist. Dies liefert

$$\frac{v}{u} s = es = x - y\frac{dx}{dy},$$

und wir erhalten, wenn e von 1 verschieden ist,

$$2\left(x + \frac{ae}{e^2 - 1}\right) = \frac{y^{e+1}}{a^e(e+1)} + \frac{a^e}{y^{e-1}(e-1)},$$

dagegen für $e = 1$

$$2\left(x + \frac{a}{4}\right) = \frac{y^2}{2a} - a \log nat \frac{y}{a}.$$

$e = 1$ ist der einzige Fall, in welchem sich keine algebraische Curve ergiebt. Wenn $e >$ oder $= 1$ ist, so sieht man leicht, dass die x Axe eine Asymptote an die Curve ist.

41. Winkelgeschwindigkeit. — Wenn sich ein Punkt in irgend einer Weise bewegt, so ändert die Gerade, die ihn mit einem festen Punkte verbindet, im Allgemeinen ihre Richtung. Der Einfachheit wegen betrachten wir eine Bewegung, die auf eine durch den festen Punkt gehende Ebene beschränkt ist. Der Winkel, den die beide Punkte verbindende Gerade mit einer in der Ebene festliegenden Geraden bildet, ändert sich beständig, und die verhältnissmässige Grösse der in irgend einem Augenblicke erfolgenden Aenderung wird die Winkelgeschwindigkeit des ersteren Punktes in Beziehung auf

den zweiten genannt. Wenn die Winkelgeschwindigkeit gleichförmig ist, so wird sie natürlich durch den in der Zeiteinheit beschriebenen Winkel gemessen; ist sie veränderlich, so misst man sie durch den Winkel, der in der Zeiteinheit beschrieben sein würde, wenn die in dem fraglichen Augenblick vorhandene Winkelgeschwindigkeit eine Zeiteinheit hindurch unverändert dieselbe geblieben wäre. In dieser Beziehung ist das Verfahren demjenigen völlig ähnlich, das wir bereits für die Messung einer linearen Geschwindigkeit und Beschleunigung dargelegt haben.

Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist die Winkelgeschwindigkeit eines Punktes, welcher während der Zeiteinheit in Beziehung auf einen festen Punkt die Winkeleinheit beschreibt oder beschreiben würde. Die gewöhnliche Winkeleinheit ist (wie in den Lehrbüchern der ebenen Trigonometrie dargelegt wird) der Winkel, dessen Schenkel aus einem um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kreise einen Bogen von der Länge des Radius ausschneiden. Es ist dies ein Winkel von $\frac{180^0}{\pi} = 57^0, 29578\ldots$, also ungefähr $57^0\, 17'\, 44{,}8''$.

42. **Winkelbeschleunigung.** — Wenn die Winkelgeschwindigkeit veränderlich ist, so wird die Intensität ihrer Zu- oder Abnahme Winkelbeschleunigung genannt. Sie wird auf dieselbe Weise und mittels derselben Einheit wie die Winkelgeschwindigkeit gemessen.

In ganz ähnlicher Weise, wie wir bei der linearen Geschwindigkeit und Beschleunigung verfuhren, sehen wir hier, dass, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, den der Radiusvector des beweglichen Punktes mit einer in der Ebene der Bewegung fest liegenden Geraden bildet,

$$\text{die Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\text{und die Winkelbeschleunigung } \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\vartheta}$$

ist.

Da (§ 27) $r\frac{d\vartheta}{dt}$ die zum Radiusvector senkrechte Geschwindigkeitscomponente ist, so erhalten wir den Satz: —

Die Winkelgeschwindigkeit eines sich in einer Ebene bewegenden Punktes ist gleich der zum Radiusvector senkrechten Geschwindigkeitscomponente, dividirt durch die Länge des Radiusvector.

43. **Winkelgeschwindigkeit.** — Wenn ein Punkt um einen andern gleichförmig einen Kreis beschreibt und zur Zurücklegung

der ganzen Peripherie die Zeit T nöthig hat, so wird der Winkel 2π in der Zeit T gleichförmig beschrieben, die Winkelgeschwindigkeit ist folglich $\frac{2\pi}{T}$. Auch wenn die Winkelgeschwindigkeit nicht gleichförmig ist, wie bei der Bewegung eines Planeten, so ist es doch nützlich, die Grösse $\frac{2\pi}{T}$ einzuführen, die dann mittlere Winkelgeschwindigkeit genannt wird.

Wenn sich ein Punkt gleichförmig in einer geraden Linie bewegt, so wird seine Winkelgeschwindigkeit offenbar immer kleiner, je weiter er sich von dem Punkte entfernt, in Beziehung auf welchen die Winkel gemessen werden.

Die Gleichung einer geraden Linie in Polarcoordinaten ist, wenn die Axe zur Geraden senkrecht steht und der Anfangspunkt den Abstand a von derselben hat,

$$r = a \sec \vartheta.$$

Die beiden Radiivectoren, welche den Winkeln 0 und ϑ entsprechen, schneiden aus der Geraden eine Strecke von der Länge $a \tan \vartheta$ aus, die mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v zunimmt. Es ist folglich

$$v = \frac{d}{dt}(a \tan \vartheta) = a \sec^2 \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{r^2}{a} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{av}{r^2}$$

dem Quadrat des Radiusvector umgekehrt proportional ist.

In ähnlicher Weise erhalten wir durch eine zweite Differentiation für die Winkelbeschleunigung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2 \tan \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 0,$$

d. h. es ist

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{2av^2}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2},$$

und die Winkelbeschleunigung ändert sich zuletzt umgekehrt wie die dritte Potenz des Radiusvector.

44. Winkelgeschwindigkeit einer Ebene. — Wir können auch von der Winkelgeschwindigkeit einer in Bewegung befindlichen Ebene in Beziehung auf eine feste Ebene sprechen, indem wir darunter die Geschwindigkeit der Zunahme des zwischen beiden Ebenen enthaltenen Winkels verstehen. Doch gilt diese Definition so ohne Weiteres nur, wenn die Durchschnittslinie beider Ebenen fest oder wenigstens parallel zu sich selbst bleibt; sonst ist eine etwas eingehendere Darlegung erforderlich, um bestimmte Auskunft zu geben. Wir werden hierauf in einem spätern Paragraphen zurückkommen.

45. **Relative Bewegung.** — Alle Bewegung, mit der wir bekannt sind oder bekannt sein können, ist nur relativ. Wir können aus astronomischen Daten berechnen, in welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit wir uns in irgend einem Augenblick mit Rücksicht auf die tägliche Umdrehung der Erde bewegen. Wir können dies zusammensetzen mit der gleichfalls berechenbaren Geschwindigkeit, welche die Erde in ihrer Bahn um die Sonne besitzt. Die dadurch erhaltene Resultante kann wieder vereinigt werden mit der (ungefähr bekannten) Geschwindigkeit der Sonne in Beziehung auf die sogenannten Fixsterne. Aber auch wenn alle diese Elemente ganz genau bekannt wären, so könnte man doch nicht sagen, dass wir dadurch eine Vorstellung von einer absoluten Geschwindigkeit erlangt hätten. Denn wir können nur die relative Bewegung der Sonne unter den Sternen beobachten, und aller Wahrscheinlichkeit nach bewegen sich Sonne und Sterne (vielleicht mit unfassbarer Geschwindigkeit) in Beziehung auf andere Körper des Weltraums. Wir müssen daher betrachten, wie man aus den wirklichen Bewegungen einer Anzahl von Punkten ihre relativen Bewegungen in Beziehung auf irgend einen derselben finden kann, und wie umgekehrt, wenn die wirkliche Bewegung eines Punktes und in Beziehung auf diesen einen Punkt die relativen Bewegungen aller übrigen gegeben sind, die wirklichen Bewegungen aller ermittelt werden können. Die Frage ist sehr leicht zu beantworten. Betrachten wir für einen Augenblick eine Anzahl Passagiere, die auf dem Verdeck eines Dampfschiffes umhergehen. Ihre relativen Bewegungen mit Rücksicht auf das Verdeck beobachten wir unmittelbar. Wird hiermit die Geschwindigkeit des Dampfschiffes selbst verbunden, so erhalten wir offenbar die wirklichen Bewegungen der Passagiere in Beziehung auf die Erde. Um wieder die relative Bewegung Aller in Beziehung auf das Verdeck zu erhalten, abstrahiren wir ganz und gar von der Bewegung des Dampfschiffes, d. h. wir ändern die Geschwindigkeit eines Jeden, indem wir sie mit der in entgegengesetzter Richtung genommenen wirklichen Geschwindigkeit des Schiffes verbinden.

Um also die relativen Bewegungen einer beliebigen Anzahl von Punkten in Beziehung auf einen derselben zu finden, denken wir uns zu der Geschwindigkeit eines jeden eine Geschwindigkeit hinzugefügt, die der Geschwindigkeit dieses einen gleich und entgegengesetzt ist; dadurch wird der eine Punkt zur Ruhe gebracht, und die Bewegungen der übrigen Punkte in Beziehung auf ihn sind dieselben wie vorher.

So mögen, um ein einfaches Beispiel zu nehmen, zwei Eisen-

bahnzüge sich nach entgegengesetzten Richtungen, etwa nach Norden und Süden, bewegen, der erstere mit einer Geschwindigkeit von 10, der zweite mit einer Geschwindigkeit von 7 Meilen die Stunde. Um die relative Geschwindigkeit des zweiten in Beziehung auf den ersteren zu erhalten, ertheilen wir beiden Zügen eine nach Süden gerichtete Geschwindigkeit von 10 Meilen die Stunde. Die Folge davon ist, dass der erstere Zug zur Ruhe kommt und dass der zweite eine südwärts gerichtete Geschwindigkeit von 17 Meilen die Stunde erhält, was die gesuchte relative Bewegung ist.

Oder es bewege sich ein Zug nordwärts mit einer Geschwindigkeit von 7 Meilen die Stunde, und ein anderer Zug in Beziehung auf den erstern südwärts mit einer (relativen) Geschwindigkeit von 5 Meilen die Stunde, so ist die wirkliche Bewegung des zweiten 7 Meilen nach Norden und 5 Meilen nach Süden die Stunde, d. i. 2 Meilen nach Norden. Da jeder von selbst auf solche Beispiele kommen muss, so ist es unnöthig, deren noch weitere anzuführen.

46. Relative Beschleunigung. — Genau dieselben Bemerkungen passen für die relative Beschleunigung, verglichen mit der absoluten. Wir können dies leicht daraus erkennen, dass Beschleunigungen in allen Fällen nach ganz denselben Gesetzen wie Geschwindigkeiten zerlegt und zusammengesetzt werden.

Wenn x, y, z und x', y', z' die Coordinaten zweier Punkte in Beziehung auf Axen sind, die als fest angesehen werden, und ξ, η, ζ ihre relativen Coordinaten bezeichnen, so haben wir

$$\xi = x' - x,\ \eta = y' - y,\ \zeta = z' - z.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}, \text{ u. s. w.,}$$

und

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ u. s. w.}$$

Die erstere Reihe dieser Formeln drückt die relativen Geschwindigkeiten durch die absoluten aus, die zweite beweist unsere obige Behauptung über relative und absolute Beschleunigungen.

Die entsprechenden Ausdrücke in Polarcoordinaten sind etwas complicirter und durchaus nicht bequem. Der Leser kann sie leicht selbst niederschreiben.

47. Relative Bewegung. — Der folgende die relative Bewegung betreffende Satz ist von grosser Wichtigkeit:

Irgend zwei in Bewegung befindliche Punkte beschreiben ähnliche Bahnen relativ zu einander, oder relativ zu irgend einem

Punkt, welcher ihre Verbindungslinie in einem constanten Verhältnisse theilt.

Es seien A und B zwei beliebige gleichzeitige Lagen der Punkte. Wir nehmen auf AB einen Punkt G oder G' so an, dass das Verhältniss $\frac{GA}{GB}$ oder $\frac{G'A}{G'B}$ einen constanten Werth hat. Die

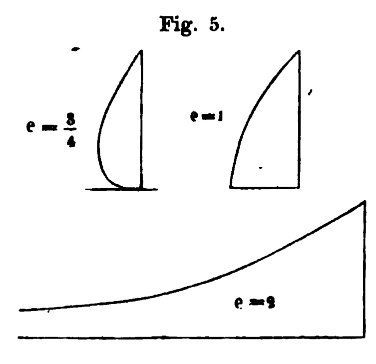
G' A G B

Gestalt der relativen Bahn hängt nur von der Länge und Richtung der Verbindungslinie der beiden Punkte in jedem Augenblick ab, und es liegt auf der Hand, dass diese Bestimmungsstücke für A in Beziehung auf B die nämlichen, wie für B in Beziehung auf A sind, ausser dass die Verbindungslinie im zweiten Falle die umgekehrte Richtung hat. Die Bahn, welche B in Beziehung auf A beschreibt, ist folglich nichts anderes, als die um zwei rechte Winkel gedrehte Bahn von A in Beziehung auf B. Was ferner G und G' betrifft, so ist es klar, dass die Richtungen dieselben bleiben, während die Längen sich in einem gegebenen Verhältniss ändern; dies ist aber die Definition ähnlicher Curven.

48. Als gutes Beispiel einer relativen Bewegung wollen wir die Bewegung der beiden Punkte betrachten, an welche wir in §. 40 die Definition der Verfolgungscurve knüpften. Da wir, um die Lage und Bewegung des Verfolgers in Beziehung auf den Verfolgten zu finden, beiden Punkten eine der Geschwindigkeit des letztern gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilen müssen, so leuchtet auf der Stelle ein, dass die Aufgabe im Grunde mit der folgenden zusammenfällt: —

Ein einen Fluss durchkreuzendes Boot wird durch die Ruder mit gleichförmiger Geschwindigkeit in Beziehung auf das Wasser vorwärts getrieben und beständig auf einen festen Punkt am entgegengesetzten Ufer zugelenkt. Es wird aber auch mit gleichförmiger Geschwindigkeit den Strom hinunter getrieben. Man soll den Weg bestimmen, den es beschreibt, und die Zeit, die es zur Hinüberfahrt gebraucht. Wie in der frühern Aufgabe, so sind auch hier drei Fälle möglich, die durch die nebenstehenden Figuren dargestellt werden. Im ersten Falle bewegt sich das Boot

Fig. 5.



schneller als der Strom und erreicht den ersehnten Punkt. Im zweiten Falle, wo Boot und Strom gleiche Geschwindigkeit besitzen, gelangt das Boot, das eine Parabel beschreibt, erst nach Verlauf einer unendlich grossen Zeit hinüber; es landet aber nicht an dem Punkte, wo es landen sollte; dieser Punkt ist nämlich der Brennpunkt der Parabel, während der Landungspunkt deren Scheitel ist. Im dritten Falle, in welchem die Geschwindigkeit des Bootes kleiner als diejenige des Wassers ist, erreicht es niemals das andere Ufer, sondern wird unbegrenzt stromabwärts getrieben. Der Vergleich der Figuren dieses Paragraphen mit denjenigen des § 40 ist sehr lehrreich. Sie sind nach demselben Maassstab und für dieselben relativen Geschwindigkeiten entworfen. Die Horizontallinien stellen das entfernte Flussufer und die Verticallinien den Weg dar, den das Boot nehmen würde, wenn keine Strömung vorhanden wäre.

Wir überlassen die Lösung dieser Frage dem Leser und bemerken nur, dass die Gleichung der Curve in jedem der drei Fälle $e \gtreqless 1$ folgende ist:

$$\frac{y^{1+e}}{a^e} = \sqrt{x^2+y^2} - x.$$

Für $e = 1$ geht diese Gleichung in

$$y^2 = a^2 - 2ax$$

über, stellt also eine Parabel dar. Die zur Ueberfahrt erforderliche Zeit ist

$$\frac{a}{u(1-e^2)};$$

da negative Werthe natürlich unzulässig sind, so ist dieser Ausdruck nur für $e \angle 1$ endlich.

49. Ein anderes ausgezeichnetes Beispiel für die Verwandlung der relativen in absolute Bewegung liefert uns die Familie der Cycloiden. Wir werden in einem spätern Paragraphen betrachten, wie diese Curven mechanisch beschrieben werden, dadurch dass ein Kreis auf einer festen Geraden oder auf einem festen Kreise rollt. Hier drücken wir inzwischen die Sache in einer andern Form aus, die jedoch zu genau demselben Ergebnisse führt.

Man soll die wirkliche Bahn eines Punktes bestimmen, welcher sich gleichförmig in einem Kreise um einen zweiten Punkt dreht, der zu gleicher Zeit sich mit constanter Geschwindigkeit auf einer derselben Ebene angehörenden Geraden oder Kreislinie fortbewegt.

Wir behandeln zunächst den erstern Fall. Es seien a der Radius der relativen Kreisbahn, ω die darin vorhandene Winkelgeschwindigkeit und v die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Mittelpunkt des Kreises längs der Geraden bewegt.

Die relativen Coordinaten des Punktes im Kreise sind $a \cos \omega t$ und $a \sin \omega t$, und die wirklichen Coordinaten des Mittelpunktes vt und 0. Wir haben daher für die wirkliche Bahn

$$\xi = vt + a \cos \omega t,$$
$$\eta = a \sin \omega t.$$

Daraus folgt

$$\xi = \frac{v}{\omega} \arcsin \frac{\eta}{a} + \sqrt{a^2 - \eta^2},$$

und dadurch, dass wir v und ω verschiedene Werthe ertheilen, können wir bewirken, dass diese Gleichung die Cycloide selbst oder jede der beiden Formen der Trochoide darstellt. Siehe § 92.

Was die Epicycloiden betrifft, so sei b der Radius des Kreises, den B um A beschreibt, ω_1 die darin vorhandene Winkelgeschwindigkeit, a der Radius des festen Kreises, auf welchem sich A bewegt, und ω die entsprechende Winkelgeschwindigkeit.

Ausserdem möge sich B zur Zeit $t = 0$ in dem Radius OA der Bahn von A befinden. Sind dann A' und B' die Lagen der beiden Punkte zur Zeit t, so ergiebt sich

Fig. 6.

$$\measuredangle AOA' = \omega t,$$
$$\measuredangle B'CA = \omega_1 t$$

und wenn wir OA zur x Axe nehmen, so ergiebt sich

$$x = a \cos \omega t + b \cos \omega_1 t,$$
$$y = a \sin \omega t + b \sin \omega_1 t.$$

Durch Elimination von t erhält man hieraus, wenn nur ω und ω_1 commensurabel sind, eine algebraische Gleichung zwischen x und y.

So haben wir für $\omega_1 = 2\omega$, wenn $\omega t = \vartheta$ gesetzt wird,

$$x = a \cos \vartheta + b \cos 2\vartheta,$$
$$y = a \sin \vartheta + b \sin 2\vartheta,$$

woraus durch eine leichte Reduction

$$(x^2 + y^2 - b^2)^2 = a^2 \{(x + b)^2 + y^2\}$$

folgt. Wird $x - b$ für x geschrieben, d. h. der Anfangspunkt um die Strecke AB zur Linken geschoben, so geht die Gleichung über in

$$a^2 (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2bx)^2,$$

oder, bei Anwendung von Polarcoordinaten, in

$$a^2 = (r - 2b \cos \vartheta)^2, \; r = a + 2b \cos \vartheta.$$

Für $2b = a$ hat man die Gleichung

$$r = a(1 + \cos \vartheta),$$

welche die Cardioide darstellt (siehe § 94).

50. Resultirende Bewegung. — Als erläuternden Zusatz zu diesem Theile unseres Gegenstandes geben wir folgende Definition: —

Wenn ein Punkt A irgend eine Bewegung in Beziehung auf einen zweiten Punkt B, dieser wieder irgend eine Bewegung in Beziehung auf einen dritten Punkt C ausführt, u. s. w., so sagt man,

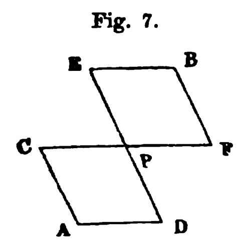
der erste Punkt führe in Beziehung auf den letzten eine Bewegung aus, welche die Resultante dieser verschiedenen Bewegungen ist.

Die relative Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind in solch einem Falle die nach den früher gegebenen Regeln aus den verschiedenen Componenten zusammengesetzten geometrischen Resultanten.

51. Die folgenden Methoden, solch eine Zusammensetzung in dem einfachen Falle der Bewegungen zweier Punkte praktisch auszuführen, sind sowohl in wissenschaftlichen Erläuterungen, als auch in gewissen mechanischen Anordnungen von Nutzen. Zwei bewegliche Punkte seien durch eine elastische Schnur mit einander verbunden; dann wird der Mittelpunkt der Schnur eine Bewegung ausführen, welche offenbar halb so gross als die Resultante der Bewegungen der beiden Punkte ist. Zum Zeichnen oder Graviren oder zu anderen mechanischen Anwendungen ist aber die folgende Methode vorzuziehen: —

CF und ED sind Stäbe von gleicher Länge, welche sich um einen durch ihre Mitte P gehenden Zapfen frei bewegen. CA, AD, EB und BF sind Stäbe von der halben Länge der ersteren und so mit denselben verbunden, dass sie ein Paar gleiche Rhomben CD, EF bilden, deren Winkel nach Belieben geändert werden können. Welche Bewegungen man dann auch A und B ertheilt, gleichgültig ob dieselben auf eine Ebene beschränkt sind oder nicht, so ist die Bewegung von P offenbar stets die halbe Resultante jener Bewegungen von A und B.

Fig. 7.

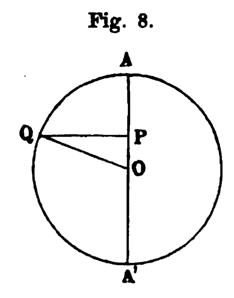


52. Harmonische Bewegung. — Von den wichtigsten Arten der Bewegungen, die wir in der theoretischen Physik zu betrachten haben, ist eine, nämlich die harmonische Bewegung, nicht nur in der gemeinen Kinetik, sondern auch in der Theorie des Schalls, des Lichts, der Wärme, u. s. w. von so ungeheurer Bedeutung, dass eine ganz eingehende Behandlung derselben gerechtfertigt erscheint.

53. Einfache harmonische Bewegung. — Definition. Wenn sich ein Punkt gleichförmig in einem Kreise bewegt und in irgend einem Augenblick die Lage Q einnimmt, so schneidet die von Q auf einen festen Durchmesser AA' des Kreises gefällte Senkrechte den

Durchmesser in einem Punkte P, und die Aenderung der Lage von P wird eine einfache harmonische Bewegung genannt.

Fig. 8.



Setzen wir voraus, dass ein Planet, oder ein Trabant, oder einer der Himmelskörper, die einen Doppelstern ausmachen, sich um seinen Hauptstern gleichförmig in einem Kreise bewege, so scheint es, wenn man ihn von einem sehr entlegenen Punkte der Ebene seiner Bahn aus betrachtet, als gehe er in einer Geraden hin und zurück und sei dabei in einer einfachen harmonischen Bewegung begriffen. Dies ist nahezu bei Körpern, wie den Trabanten des Jupiter der Fall, wenn sie von der Erde aus gesehen werden.

In physikalischer Beziehung besteht das Interesse solcher Bewegungen darin, dass sie annähernd die Bewegungen der einfachsten Schwingungen schallender Körper, wie einer Stimmgabel, eines Klavierdrahtes (daher der Name), und der verschiedenen Media sind, in denen Schall-, Licht-, Wärmewellen, u. s. w. fortgepflanzt werden.

54. Die Strecke vom Mittelpunkte der Bewegung bis zum einen oder andern Ende, also in der Figur OA oder OA', wird die Amplitude der einfachen harmonischen Bewegung genannt.

Ein von einem beliebigen festen Punkte bis zu dem sich gleichförmig bewegenden Punkte Q gemessener Bogen des Kreises, auf den man sich bezieht, heisst das Argument der harmonischen Bewegung.

Der Abstand eines in einer einfachen harmonischen Bewegung begriffenen Punktes von der Mitte seines Laufes oder seiner Bewegungsweite ist eine einfache harmonische Function der Zeit. Das Argument dieser Function ist dasjenige, was wir als das Argument der Bewegung definirt haben.

Bei einer einfachen harmonischen Bewegung versteht man unter der Epoche den vom Beginn der Rechnung bis zu dem Augenblick verstrichenen Zeitraum, wo der bewegliche Punkt zum ersten Male die grösste Entfernung von seiner mittlern Lage oder der Mitte seines Laufes nach der als positiv angenommenen Richtung hin erreicht. Man kann die Epoche auch durch eine Winkelgrösse messen; dann ist sie der Winkel, der während des Zeitraumes, den wir als Epoche definirt haben, auf dem Kreise beschrieben wird.

Die Periode einer einfachen harmonischen Bewegung ist die Zeit, welche von irgend einem Augenblicke an verstreicht, bis sich

der bewegliche Punkt durch dieselbe Lage, die er in jenem Augenblicke inne hatte, wieder nach derselben Richtung zu bewegt.

Die **Phase** einer einfachen harmonischen Bewegung zu irgend einer Zeit ist der Bruchtheil der ganzen Periode, welcher verstrichen ist, seitdem sich der bewegliche Punkt zum letzten Male durch seine mittlere Lage nach der positiven Richtung hin bewegte.

55. **Einfache harmonische Bewegung in Mechanismen.** — Beispiele einfacher harmonischer Bewegungen liefern die gewöhnlichen Mechanismen zur Erzeugung von geradliniger aus kreisförmiger, oder von kreisförmiger aus geradliniger Bewegung, bei denen eine sich im Kreise drehende Kurbel sich in einem geradlinigen Spalt bewegt, der einem nur in einer geraden Linie bewegbaren Körper angehört. Der Theil des Mechanismus, dessen Bewegung geradlinig ist, genügt in aller Strenge der Definition einer einfachen harmonischen Bewegung, wenn die Bewegung des rotirenden Theils mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgt.

Derselben Bedingung genügt näherungsweise das Trittbrett eines Spinnrades, wenn sich das Rad gleichförmig dreht, und zwar ist die Annäherung um so grösser, je kleiner die Winkelbewegung des Brettes und der Verbindungsschnur ist. Eine solche grössere oder geringere Annäherung findet auch bei der Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine statt, der auf eine der verschiedenen in der Praxis angewandten Methoden mit der Kurbel verbunden ist, immer unter der Voraussetzung, dass die Rotation der Kurbel eine gleichförmige ist.

56. **Geschwindigkeit in einer einfachen harmonischen Bewegung.** — Die Geschwindigkeit eines in einer einfachen harmonischen Bewegung begriffenen Punktes ist eine einfache harmonische Function der Zeit, deren Phase um ein Viertel einer Periode früher als diejenige der Verschiebung, und deren Maximalwerth gleich der Geschwindigkeit in der Kreisbewegung ist, durch welche die gegebene Function definirt wird.

Denn in der Figur des § 53 können wir die Geschwindigkeit im Kreise, die V sein möge, durch eine zur Richtung dieser Geschwindigkeit senkrechte Gerade OQ, folglich auch durch OP und PQ die Componenten von V darstellen, welche senkrecht auf diesen Geraden stehen. Die Geschwindigkeit von P bei der einfachen harmonischen Bewegung ist danach $\frac{V}{OQ} PQ$, und dieser Ausdruck wird gleich V, wenn sich P in O befindet.

57. Beschleunigung in einer einfachen harmonischen Bewegung. — Die Beschleunigung eines Punktes, der eine einfache harmonische Bewegung ausführt, ist in jedem Augenblick einfach seinem Abstande vom Mittelpunkt proportional; sie ist aber stets nach der entgegengesetzten Seite, d. h. beständig nach dem Mittelpunkt zu gerichtet. Ihr Maximalwerth ist diejenige Beschleunigung, welche in der Zeit, während der ein Bogen von der Länge des Radius beschrieben wird, eine Geschwindigkeit erzeugen würde, die gleich der Geschwindigkeit in der Kreisbewegung ist.

Denn nach § 35. a. wirkt die Beschleunigung von Q in der Figur des § 53 längs QO und ist gleich $\frac{V^2}{QO}$. Nehmen wir für einen Augenblick an, QO stelle die Grösse dieser Beschleunigung dar, so können wir dieselbe in QP, PO zerlegen. Nach demselben Maassstabe wird daher die Beschleunigung von P durch PO dargestellt und ist von der Grösse $\frac{V^2}{QO}\cdot\frac{PO}{QO} = \frac{V^2}{QO^2}\cdot PO$. Dieser Ausdruck ist PO proportional und hat seinen grössten Werth im Punkte A, nämlich $\frac{V^2}{QO}$, eine Beschleunigung, durch welche, wie oben angegeben worden, die Geschwindigkeit V in der Zeit $\frac{QO}{V}$ erzeugt sein würde.

Es sei a die Amplitude, ε die Epoche und T die Periode einer einfachen harmonischen Bewegung. Hat dann der Punkt P zur Zeit t den Abstand s vom Mittelpunkt, so ist

$$s = a\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right).$$

Für die Geschwindigkeit ergiebt sich daraus

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{2\pi a}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right),$$

und der grösste Werth V der Geschwindigkeit ist somit $\frac{2\pi a}{T}$, was mit der Angabe des § 56 übereinstimmt. Weiter erhalten wir für die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}s \text{ (siehe § 57)},$$

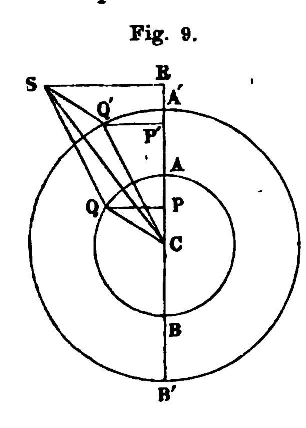
und endlich für den grössten Werth der Beschleunigung

$$\frac{4\pi^2 a}{T^2} = \frac{V}{\frac{T}{2\pi}},$$

wo $\frac{T}{2\pi}$ die Zeit ist, während welcher in der betreffenden Kreisbewegung ein Bogen von der Länge des Radius zurückgelegt wird.

58. Zusammensetzung zweier in einer Geraden stattfindenden einfachen harmonischen Bewegungen. — Setzt man zwei beliebige einfache harmonische Bewegungen, die in einer Geraden stattfinden und von derselben Periode sind, zusammen, so erhält man eine einzige einfache harmonische Bewegung von derselben Periode. Um die Amplitude und die Epoche derselben zu finden, hat man auf den Schenkeln eines Winkels, der gleich der Differenz der gegebenen Epochen ist, die gegebenen Amplituden abzutragen und diese Figur zu einem Parallelogramm zu ergänzen: Die Diagonale des Parallelogramms ist die gesuchte Amplitude, und die gesuchte Epoche unterscheidet sich von den gegebenen durch Winkel von der Grösse derjenigen, welche die Diagonale mit den Seiten des Parallelogramms einschliesst. Es seien nämlich P und P' zwei Punkte, welche in einer Geraden $B'BCAA'$ einfache harmonische Bewegungen von derselben Periode ausführen, und Q, Q' die in den bezüglichen Kreisen sich gleichförmig bewegenden Punkte. Wir beschreiben über CQ und CQ' ein Parallelogramm $SQCQ'$ und ziehen von S aus SR senkrecht auf $B'A'$. Dann ist offenbar $P'R = CP$ (als Projectionen der gleichen und parallelen Strecken $Q'S$ und CQ auf CR), also $CR = CP + CP'$, und der Punkt R vollführt mithin die Resultirende der Bewegungen von P und P'. CS, die Diagonale des Parallelogramms, ist aber constant, folglich ist die resultirende Bewegung einfach harmonisch und hat die Amplitude CS, während ihre Epoche beziehungsweise um die Winkel QCS und SCQ' die Epoche der Bewegung von P übertrifft und hinter derjenigen der Bewegung von P' zurückbleibt.

Fig. 9.



Wir halten es für nützlich, denselben Satz auch analytisch zu beweisen. Es ist

$$a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right) + a' \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon'\right)$$

$$= (a \cos\varepsilon + a' \cos\varepsilon') \cos\frac{2\pi t}{T} + (a \sin\varepsilon + a' \sin\varepsilon') \sin\frac{2\pi t}{T} = r \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \vartheta\right),$$

wo

$$r = \{(a \cos\varepsilon + a' \cos\varepsilon')^2 + (a \sin\varepsilon + a' \sin\varepsilon')^2\}^{1/2}$$
$$= \{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos(\varepsilon - \varepsilon')\}^{1/2}$$

und

$$\tan \vartheta = \frac{a \sin \varepsilon + a' \sin \varepsilon'}{a \cos \varepsilon + a' \cos \varepsilon'}$$

ist.

59. Die im vorigen Paragraphen angegebene Construction stellt die Resultante zweier einfachen harmonischen Bewegungen dar, dieselben mögen die nämliche Periode haben oder nicht. Nur wird die Diagonale des Parallelogramms, im Falle sie nicht von derselben Periode sind, nicht constant sein, sondern von einem grössten zu einem kleinsten Werthe abnehmen. Ihren grössten Werth, der gleich der Summe der componirenden Amplituden ist, hat sie in dem Augenblick, wo die Phasen der componirenden Bewegungen übereinstimmen; ihren kleinsten Werth, der gleich der Differenz jener Amplituden ist, nimmt sie an, wenn die Phasen um eine halbe Periode von einander abweichen. Was ihre Richtung betrifft, so muss sie beständig näher dem grössern als dem kleinern der beiden Radien liegen, welche die Seiten des Parallelogramms ausmachen; sie wird um den grössern Radius oscilliren, und ihre grösste Abweichung von diesem Radius wird sich auf jeder Seite desselben auf den Winkel belaufen, dessen Sinus der kleinere Radius, dividirt durch den grössern ist. Diese grösste Abweichung der Diagonale vom grössern Radius tritt ein, wenn der zwischen beiden Radien enthaltene Winkel um 90° grösser als jener Winkel der grössten Abweichung ist. Die volle Periode dieser Oscillation ist die Zeit, während welcher einer der Radien eine volle Umdrehung mehr als der andere macht. Die resultirende Bewegung ist somit nicht einfach harmonisch, sondern gewissermaassen einfach harmonisch mit periodisch zu- und abnehmender Amplitude und mit periodischer Beschleunigung und Verzögerung der Phase. Diese Auffassung empfiehlt sich besonders in dem Falle, in welchem die beiden componirenden Bewegungen nahezu gleiche Perioden haben, während die Amplitude der einen bedeutend grösser als die der andern ist.

Um die resultirende Bewegung auszudrücken, nehmen wir an, s sei die Verschiebung zur Zeit t und a die grössere der beiden componirenden Amplituden. Dann ist

$$s = a \cos (n t - \varepsilon) + a' \cos (n' t - \varepsilon'),$$

und wenn

$$\varphi = (n' t - \varepsilon') - (n t - \varepsilon)$$

ist,

$$\begin{aligned} s &= a \cos (n t - \varepsilon) + a' \cos (n t - \varepsilon + \varphi) \\ &= (a + a' \cos \varphi) \cos (n t - \varepsilon) - a' \sin \varphi \sin (n t - \varepsilon), \end{aligned}$$

oder endlich

$$s = r \cos (n t - \varepsilon + \vartheta),$$

wenn

$$r = (a^2 + 2\,a\,a'\cos\varphi + a'^2)^{1/2}$$

und

$$\tan\vartheta = \frac{a'\sin\varphi}{a + a'\cos\varphi}$$

ist. In der letzten Gleichung nimmt $\tan\vartheta$ seinen grössten Werth an, wenn man

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{a'}{a}$$

macht; dieser grösste Werth ist gleich $\frac{a'}{(a^2 - a'^2)^{1/2}}$, folglich ist der grösste Werth von ϑ selbst $\arcsin\frac{a'}{a}$. Das oben (§ 58) angegebene geometrische Verfahren führt zu diesem Schlusse durch die folgende äusserst einfache Construction: —

Um die Zeit und den Betrag der grössten Phasen-Beschleunigung oder Verzögerung zu finden, beschreiben wir, CA als die grössere Amplitude vorausgesetzt, um A als Mittelpunkt mit der kleinern Amplitude AB als Radius einen Kreis. Die Tangente CB an diesen Kreis ist der erzeugende Radius der am weitesten abweichenden Resultante. Es ist aber CBA ein rechter Winkel, also

$$\sin BCA = \frac{AB}{CA}.$$

60. Beispiele der Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen, die in einer Geraden stattfinden. — Eine sehr interessante Anwendung dieses Falles der Zusammensetzung harmonischer Bewegungen lässt sich auf die durch den Mond und die Sonne bewirkten Ebben und Fluthen machen. Beide folgen, ausser in ausgeweiteten Flussmündungen, oder in langen Meerengen oder tiefen Buchten mit nur geringer Abweichung dem einfachen harmonischen Gesetz und haben als wirkliches Ergebniss eine Höhenänderung zur Folge, welche gleich der Summe der Aenderungen ist, die jede der beiden Ursachen einzeln hervorbringen würde.

Der Betrag der Mondfluth in der Gleichgewichtstheorie (§ 811) ist ungefähr 2,1mal so gross als derjenige der Sonnenfluth. Daher betragen an freien Küstenstellen, wenn man die Grösse der Sonnenfluth als Einheit annimmt, die Springfluthen 3,1 und die Nippfluthen nur 1,1, und bei beiden ist die Stunde hohen Wassers dieselbe wie bei der Mondfluth allein. Die grösste Abweichung der wirklichen Fluth von den Phasen (sei es für hohen, niedrigen oder mittleren Wasserstand) der Mondfluth allein ist etwa 0,95 einer Mondstunde, d. i. 0,98 einer Sonnenstunde

(derselbe Theil von 12 Mondstunden, welcher der Winkel, dessen Sinus gleich $\frac{1}{2,1}$ ist, nämlich $28^0\ 26'$ von 360^0 ist). Diese grösste Abweichung wird ein Früher- oder Spätereintreten sein, je nachdem die Spitze der Sonnenfluth derjenigen der Mondfluth vorhergeht oder folgt; sie wird genau erreicht werden, wenn der Phasenunterschied zwischen beiden componirenden Fluthen 3,95 Mondstunden beträgt. Mit anderen Worten, die grösste Verfrühung der Zeit hohen Wassers wird $4^1/_2$ Tage nach und die grösste Verzögerung ebenso viele Tage vor den Springfluthen stattfinden.

61. Wir kommen jetzt zu dem Falle, in welchem die Amplituden der beiden gegebenen Bewegungen einander gleich sind. Wenn dieselben auch gleiche Perioden haben, so ist ihre Resultante eine einfache harmonische Bewegung, deren Phase in jedem Augenblick das Mittel der beiden Phasen, und deren Amplitude gleich dem doppelten Product aus einer der beiden Amplituden in den Cosinus der halben Phasendifferenz ist. Die Resultante ist natürlich Null, wenn der Phasenunterschied eine halbe Periode beträgt; sie ist eine Bewegung von doppelt so grosser Amplitude und derselben Phase wie jede der componirenden Bewegungen, wenn dieselben die nämliche Phase haben.

Wenn die Perioden nahezu, aber nicht völlig gleich sind (die Amplituden werden immer noch als gleich vorausgesetzt), so geht die Bewegung sehr langsam von dem ersteren Werthe (Null, oder überhaupt keine Bewegung) zum letzteren über und darauf wieder zum ersteren zurück; die zu einem Hin- und Hergange gebrauchte Zeit ist derjenigen gleich, während welcher die Periode der schnelleren Bewegung einmal mehr als die der langsameren durchlaufen wird.

Man begegnet in der Praxis vielen vortrefflichen Beispielen dieses Falles, die jedoch füglicher erst dann zur Besprechung kommen, wenn wir die kinetischen Principien auf verschiedene Gegenstände der praktischen Mechanik, der Akustik und der physikalischen Optik anwenden werden. Solche Beispiele sind: das Marschiren von Truppen über eine Hängebrücke, das Mitschwingen von Pendeln oder Stimmgabeln, u. s. w.

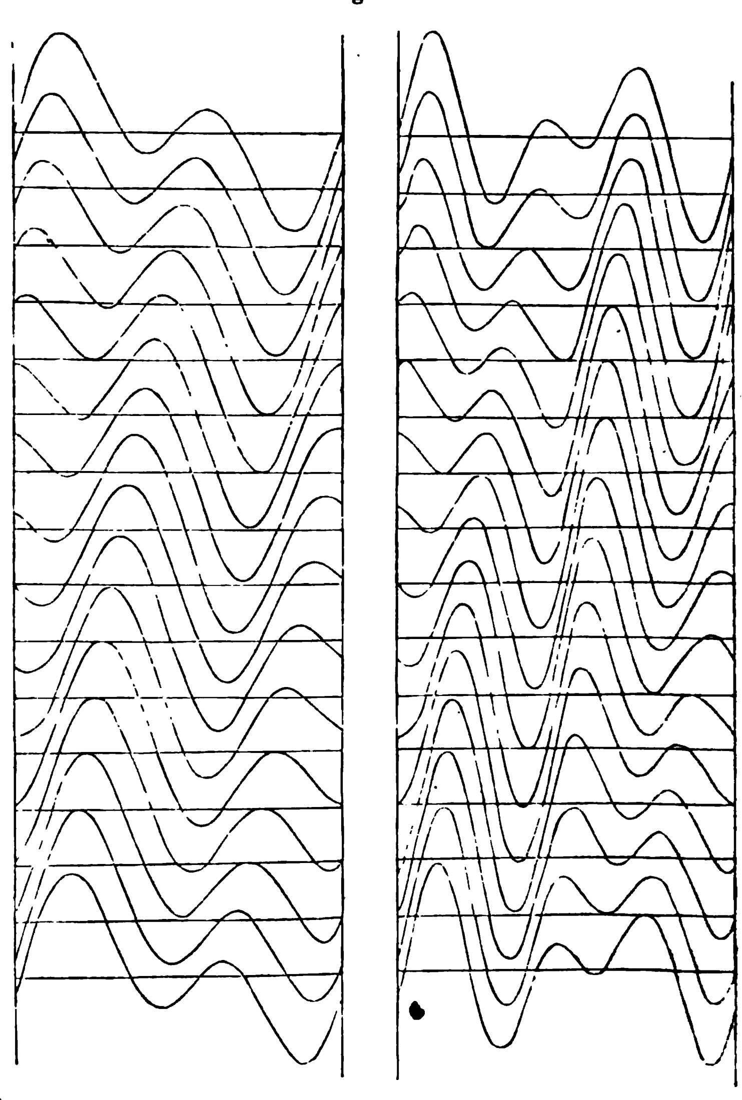
62. Graphische Darstellung harmonischer Bewegungen, die in einer Geraden stattfinden. — Wir können eine einzelne einfache harmonische Bewegung und die verschiedenen im Vorhergehenden betrachteten Fälle der Zusammensetzung solcher in einer

Geraden vor sich gehenden Bewegungen graphisch durch Curven darstellen, bei denen die Abscissen Zeiträume und die Ordinaten die entsprechenden Entfernungen des beweglichen Punktes von seiner mittlern Lage bedeuten. Im Falle einer einzelnen einfachen harmonischen Bewegung würde die entsprechende Curve die durch den Punkt P in § 53 unter der Voraussetzung beschriebene sein, dass sich der Kreis mit gleichbleibender Geschwindigkeit in irgend einer zu OA senkrechten Richtung bewegte, während Q seine gleichförmige Kreisbewegung beibehielte. Die Construction dieses Falles liefert die harmonische Curve oder Sinuslinie, bei welcher die Ordinaten den Sinus der Abscissen proportional sind; dabei wird die Gerade, in welcher O sich bewegt, als die Abscissenaxe angenommen. Es ist dies die einfachste überhaupt mögliche Form, die eine schwingende Schnur annimmt. Wenn die harmonische Bewegung zusammengesetzt, aber auf eine Gerade beschränkt ist, wie im Falle der Bewegung jedes Punktes einer Violin-, Harfen- oder Klaviersaite (deren Bewegungen nur darin von einander verschieden sind, weil man die Schwingungen auf verschiedene Weisen erregt), so lässt sich eine ähnliche Construction ausführen. Die Untersuchung zusammengesetzter harmonischer Functionen hat zu Ergebnissen von der höchsten Wichtigkeit geführt, die ihren allgemeinsten Ausdruck in dem Fourier'schen Satze gefunden haben, dem wir alsbald einige Seiten widmen werden. Wir lassen jetzt graphische Darstellungen der Zusammensetzung zweier in einer Geraden stattfindenden einfachen harmonischen Bewegungen folgen, welche gleiche Amplituden haben, und deren Perioden sich wie 1 : 2 und wie 2 : 3 verhalten, während die Epochedifferenzen 0, 1, 2, u. s. w. Sechszehnteln einer Umdrehung entsprechen. In jedem Falle beträgt die Epoche der Componente, welche die grössere Periode hat, ein Viertel einer Umdrehung, und im ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Falle jeder der beiden Curvenreihen ist die Epoche der Componente, welche die kleinere Periode hat, beziehungsweise um 0, 1, 2, u. s. w. Sechszehntel einer Umdrehung kleiner als ein Viertel einer Periode. Die verschiedenen Horizontallinien sind die Abscissenaxen der verschiedenen Curven, während die Verticallinie zur Linken jeder Reihe die gemeinschaftliche Ordinatenaxe ist. In jedem Falle der erstern Curvenreihe geht die langsamere Bewegung durch eine vollständige Periode, in jedem Falle der zweiten Reihe durch zwei Perioden hindurch.

1 : 2 (Octave)	2 : 3 (Quinte)
$y = \sin x + \sin\left(2x + \frac{n\pi}{8}\right)$	$y = \sin 2x + \sin\left(3x + \frac{n\pi}{8}\right)$

In beiden Fällen durchläuft x das Intervall von 0 bis 2π, und n nimmt der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2 . . . 15 an.

Fig. 10.



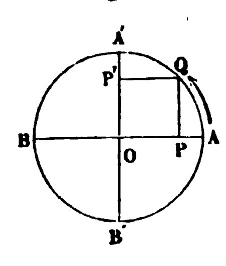
Diese und ähnliche Fälle, in denen die Perioden nicht commensurabel sind, werden in der Akustik wieder behandelt werden.

63. Einfache harmonische Bewegungen in verschiedenen Richtungen. — Wir haben jetzt weiter die Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen zu betrachten, die in verschiedenen Richtungen erfolgen. Zunächst sehen wir, dass, wenn man eine beliebige Anzahl einfacher harmonischer Bewegungen, die von derselben Periode und von derselben Phase sind, zusammensetzt, man eine einzige einfache harmonische Bewegung von derselben Phase erhält. Denn nach dem Princip der Zusammensetzung von Bewegungen (siehe § 50) ist die Verschiebung in jedem Augenblick die geometrische Resultante der Verschiebungen, welche die componirenden Bewegungen einzeln erzeugen würden, und in dem Falle, den wir hier voraussetzen, verändert sich die Grösse dieser componirenden Verschiebungen bei allen in demselben Verhältniss und ihre Richtung ist constant. Es wird sich also auch die Grösse der resultirenden Verschiebung in demselben Verhältniss ändern und dieselbe wird eine constante Richtung haben.

Wenn aber die Phasen der verschiedenen componirenden Bewegungen nicht übereinstimmen, während ihre Perioden noch dieselben sind, so wird die resultirende Bewegung im Allgemeinen elliptisch sein, und der vom Mittelpunkt aus gezogene Radiusvector wird in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreiben. Dies schliesst nicht aus, dass die Bewegung in besonderen Fällen trotzdem kreisförmig und von gleichbleibender Geschwindigkeit, oder andererseits geradlinig und einfach harmonisch ist.

64. Dies zu beweisen, wollen wir zuerst den Fall betrachten, in welchem zwei gleiche einfache harmonische Bewegungen gegeben sind, deren Bahnen auf einander senkrecht stehen, und deren Phasendifferenz ein Viertel einer Periode beträgt. Ihre Resultante ist eine gleichförmige Kreisbewegung. Denn wenn BA und $B'A'$ ihre Bewegungslinien sind und um die gemeinschaftliche Mitte O derselben als Mittelpunkt ein Kreis durch $AA'BB'$ beschrieben wird, so wird die gegebene Bewegung von P, die in AB stattfindet, durch die Bewegung eines Punktes Q in der Peripherie dieses Kreises definirt werden (§ 53). Wenn sich derselbe Punkt in der durch den Pfeil angezeigten

Fig. 11.



Richtung bewegt, so wird er eine einfache harmonische Bewegung von P' in der Linie $B'A'$ geben, welche ein Viertel einer Periode hinter der Bewegung von P in AB zurück ist. Da aber $A'OA$, QPO und $QP'O$ rechte Winkel sind, so ist die Figur $QP'OP$ ein Parallelogramm, und folglich ist die Lage Q das Resultat der aus OP und OP' zusammengesetzten Verschiebung. Wir sehen somit, dass zwei gleiche einfache harmonische Bewegungen, die in auf einander senkrechten Geraden stattfinden, und deren Phasen sich um ein Viertel einer Periode von einander unterscheiden, mit einer gleichförmigen Kreisbewegung gleichbedeutend sind, deren Radius gleich der grössten Verschiebung ist, die jede Bewegung einzeln hervorbringen würde, und welche vom positiven Ende der Bewegungslinie der vordern Componente nach dem positiven Ende der Bewegungslinie der hintern zu erfolgt.

65. Nun sind orthogonale Projectionen einfacher harmonischer Bewegungen offenbar einfach harmonisch und von unveränderter Phase. Projiciren wir also den Fall des § 64 auf irgend eine Ebene, so erhalten wir eine Bewegung in einer Ellipse, für welche die Projectionen der Bewegungslinien der beiden componirenden Bewegungen conjugirte Durchmesser sind, und in welcher der vom Mittelpunkt ausgehende Radiusvector in gleichen Zeiten gleiche Flächen (die Projectionen der vom Radius des Kreises beschriebenen Flächen) beschreibt. Die Ebene und die Lage des Kreises, von welchem diese Projection genommen wird, können aber offenbar der Bedingung entsprechend bestimmt werden, dass die Projectionen der Bewegungslinien mit zwei beliebig gegebenen einander halbirenden Geraden zusammenfallen. Zwei beliebige einfache harmonische Bewegungen, ihre Bewegungslinien mögen gleich oder ungleich, rechtwinklig oder schiefwinklig zu einander sein, erzeugen danach, wenn nur ihre Phasendifferenz ein Viertel einer Periode beträgt, eine elliptische Bewegung, welche jene Bewegungslinien zu conjugirten Axen hat, und bei welcher der vom Mittelpunkt aus gezogene Radiusvector in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

66. Wir kehren jetzt wieder zur Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl gleicher einfacher harmonischen Bewegungen zurück, die in irgend welchen Richtungen stattfinden und von beliebigen Phasen sind. Jede componirende einfache harmonische Bewegung kann auf ganz bestimmte Weise in zwei Bewegungen in derselben Geraden zerlegt werden, deren Phasendifferenz ein Viertel einer

Periode beträgt, und von denen die eine eine beliebig gegebene Epoche hat. Wir können folglich die gegebenen Bewegungen auf zwei Gruppen von Bewegungen reduciren, deren Phasen um ein Viertel einer Periode verschieden sind, und zwar können wir es so einrichten, dass jede Bewegung einer dieser Gruppen dieselbe Phase wie irgend eine der gegebenen Bewegungen oder wie sonst eine einfache harmonische Bewegung hat, die wir nach Belieben wählen können (d. h. deren Epoche unserer freien Wahl überlassen ist).

Alle Bewegungen einer jeden dieser Gruppen können (§ 58) in eine einzige in einer bestimmten Linie stattfindende einfache harmonische Bewegung von derselben Phase und von bestimmter Amplitude zusammengesetzt werden. Das ganze System wird somit auf zwei völlig bestimmte einfache harmonische Bewegungen reducirt, deren Phasendifferenz ein Viertel einer Periode beträgt.

Nun haben wir bewiesen, dass die Resultante zweier in verschiedenen Geraden vor sich gehenden einfachen harmonischen Bewegungen, von denen die eine ein Viertel einer Periode der andern voraus ist, eine Bewegung in einer Ellipse ist, für welche die Bewegungslinien der Bewegungscomponenten conjugirte Axen sind, und in welcher der vom Mittelpunkt ausgehende Radiusvector in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt. Der Satz des § 63 ist somit erwiesen.

Es seien, bei Zugrundelegung Cartesischer Coordinaten,

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = l_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \\ y_1 = m_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \\ z_1 = n_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \end{cases}$$

die Gleichungen der ersten der gegebenen Bewegungen, und hieraus mögen sich durch Aenderung der Indices die Gleichungen der übrigen Bewegungen ergeben. Es bezeichnen darin allgemein

l, m, n die Richtungscosinus, d. h. die Cosinus der Winkel, welche die Bewegungsrichtung mit den Coordinatenaxen bildet,

a die Amplitude, ε die Epoche und ω die gemeinschaftliche relative Winkelgeschwindigkeit. Die Gleichungen der resultirenden Bewegung, zu deren Angabe wir die Buchstaben x, y, z ohne Indices gebrauchen, sind dann

$$\begin{aligned} x &= \sum l_1 a_1 \cos(\omega t - \varepsilon_1) \\ &= \cos\omega t \sum l_1 a_1 \cos\varepsilon_1 + \sin\omega t \sum l_1 a_1 \sin\varepsilon_1, \\ y &= \text{u. s. w.}, \; z = \text{u. s. w.}, \end{aligned}$$

oder, wie wir kurz schreiben können,

$$(2)\quad \begin{cases} x = P\cos\omega t + P'\sin\omega t \\ y = Q\cos\omega t + Q'\sin\omega t \\ z = R\cos\omega t + R'\sin\omega t, \end{cases}$$

wo

$$(3)\quad \begin{cases} P = \sum l_1 a_1 \cos\varepsilon_1,\ P' = \sum l_1 a_1 \sin\varepsilon_1, \\ Q = \sum m_1 a_1 \cos\varepsilon_1,\ Q' = \sum m_1 a_1 \sin\varepsilon_1, \\ R = \sum n_1 a_1 \cos\varepsilon_1,\ R' = \sum n_1 a_1 \sin\varepsilon_1 \end{cases}$$

ist. Die resultirende Bewegung, welche so in Ausdrücken von sechs componirenden einfachen harmonischen Bewegungen angegeben ist, kann auf zwei Bewegungen reducirt werden, dadurch dass man P, Q, R und P', Q', R' auf elementarem Wege vereinigt. Wenn

$$(4)\quad \begin{cases} \zeta = (P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2} \\ \lambda = \dfrac{P}{\zeta},\ \mu = \dfrac{Q}{\zeta},\ \nu = \dfrac{R}{\zeta} \\ \zeta' = (P'^2 + Q'^2 + R'^2)^{1/2} \\ \lambda' = \dfrac{P'}{\zeta'},\ \mu' = \dfrac{Q'}{\zeta'},\ \nu' = \dfrac{R'}{\zeta'} \end{cases}$$

ist, so wird die gesuchte Bewegung die Resultante der Bewegungen $\zeta\cos\omega t$ und $\zeta'\sin\omega t$ sein, von denen die erstere in der Geraden (λ, μ, ν), die zweite in der Geraden (λ', μ', ν') stattfindet. Sie ist daher eine Bewegung in einer Ellipse, für welche die Strecken 2ζ und $2\zeta'$ in den angegebenen Richtungen conjugirte Durchmesser sind; der vom Mittelpunkt ausgehende Radiusvector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen, und die Periode ist $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

67. Harmonische Bewegungen verschiedener Art, die in verschiedenen Geraden stattfinden. — Weiter haben wir uns mit dem Falle der Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen zu beschäftigen, die von verschiedener Art sind und in verschiedenen Geraden stattfinden. Im Allgemeinen kehrt, diese Geraden mögen in einer Ebene liegen oder nicht, die Bewegungslinie in sich selbst zurück, wenn die Perioden commensurabel sind; bei incommensurabeln Perioden ist dies nicht der Fall. Dies leuchtet ohne Beweis ein.

Ist für eine Componente, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind, a die Amplitude, ε die Epoche und n die Winkelgeschwindigkeit in der zugehörigen Kreisbewegung, so hat man für die Coordinaten ξ, η, ζ der resultirenden Bewegung die Gleichungen

$$\xi = \sum \lambda_1 a_1 \cos(n_1 t - \varepsilon_1),$$
$$\eta = \sum \mu_1 a_1 \cos(n_1 t - \varepsilon_1),$$
$$\zeta = \sum \nu_1 a_1 \cos(n_1 t - \varepsilon_1).$$

Nun ist es klar, dass die Werthe von ξ, η, ζ zur Zeit $t + T$ wiederkehren werden, sobald $n_1 T$, $n_2 T$, u. s. w. Vielfache von 2π sind, d. h. wenn T das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\frac{2\pi}{n_1}$, $\frac{2\pi}{n_2}$, u. s. w. ist.

Ist ein solches gemeinschaftliches Vielfache vorhanden, so können die trigonometrischen Functionen eliminirt werden, und die Gleichungen (oder, wenn die Bewegung auf eine Ebene beschränkt ist, die Gleichung) für die Bahn sind algebraisch. Im entgegengesetzten Falle sind sie transcendent.

68. Aus dem Vorhergehenden ersehen wir allgemein, dass die Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl einfacher harmonischer Bewegungen, die in beliebigen Richtungen stattfinden und von beliebigen Perioden sind, in der Weise ausgeführt werden kann, dass man jede Bewegung in drei auf einander senkrechte Componenten zerlegt, nach den früher dargelegten Methoden die in jeder dieser zu einander senkrechten Richtungen stattfindenden Bewegungscomponenten in eine einzige Bewegung zusammensetzt, und endlich die drei letzterhaltenen resultirenden Bewegungen vereinigt.

69. Einfache harmonische Bewegungen in zwei zu einander senkrechten Richtungen. — Der weit interessanteste und einfachste Fall ist der zweier einfachen harmonischen Bewegungen von beliebigen Perioden, deren Richtungen natürlich in einer Ebene liegen müssen.

Mechanische Methoden, solche Verbindungen herzustellen, sowie Fälle ihres Vorkommens in der Optik und Akustik werden später beschrieben werden.

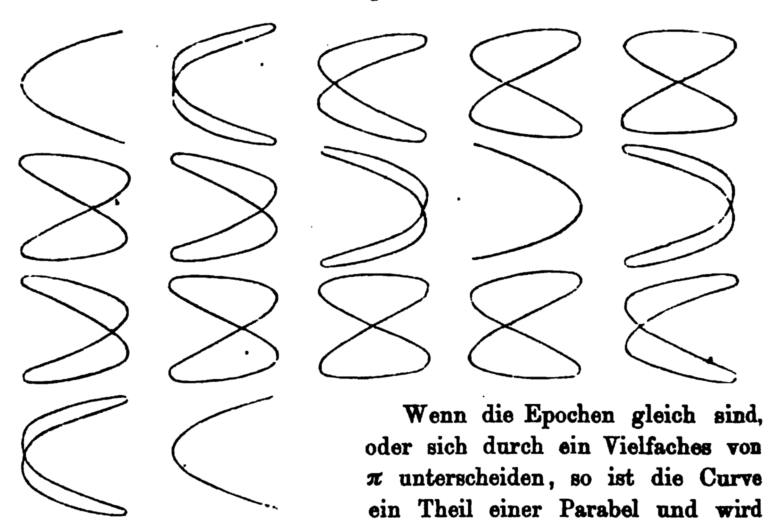
Der Einfachheit wegen wollen wir voraussetzen, dass die Richtungen der beiden componirenden Bewegungen auf einander senkrecht stehen, und da wir nur dann eine in sich zurückkehrende Curve erhalten werden, wenn die Perioden commensurabel sind, so empfiehlt es sich, mit einem solchen Falle zu beginnen.

Die folgenden Figuren stellen die Bahnen dar, welche durch die Verbindung von einfachen harmonischen Bewegungen gleicher Amplituden entstehen, vorausgesetzt, dass die Perioden der zu einander senkrechten Componenten sich wie 1 : 2 verhalten, und dass

ihre Epochen der Reihe nach um 0, 1, 2, u. s. w. Sechszehntel einer Umdrehung von einander abweichen.



Fig. 12.



Wenn die Epochen gleich sind, oder sich durch ein Vielfaches von π unterscheiden, so ist die Curve ein Theil einer Parabel und wird vom beweglichen Punkt während jeder vollständigen Periode zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen.

Für den hier gezeichneten Fall ist

$$x = a \cos (2\, n\, t - \varepsilon), \quad y = a \cos n\, t,$$

folglich

$$x = a \{\cos 2\, n\, t \,.\, \cos \varepsilon + \sin 2\, n\, t \,.\, \sin \varepsilon\}$$

$$= a \left\{\left(\frac{2\, y^2}{a^2} - 1\right) \cos \varepsilon + 2 \frac{y}{a} \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} \sin \varepsilon \right\},$$

und dies ist für jeden gegebenen Werth von ε die Gleichung der entsprechenden Curve. So hat man für $\varepsilon = 0$

$$\frac{x}{a} = \frac{2\, y^2}{a^2} - 1, \text{ oder } y^2 = \frac{a}{2}(x + a),$$

also, wie oben angegeben ist, die Gleichung der Parabel. Für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$\frac{x}{a} = 2 \frac{y}{a} \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}, \text{ oder } a^2 x^2 = 4\, y^2 (a^2 - y^2),$$

die Gleichung der fünften und dreizehnten der obigen Curven.

Im Allgemeinen ist

$$x = a \cos (n\, t + \varepsilon), \; y = a \cos (n_1 t + \varepsilon_1),$$

und hieraus hat man, wenn es möglich ist, t zu eliminiren.

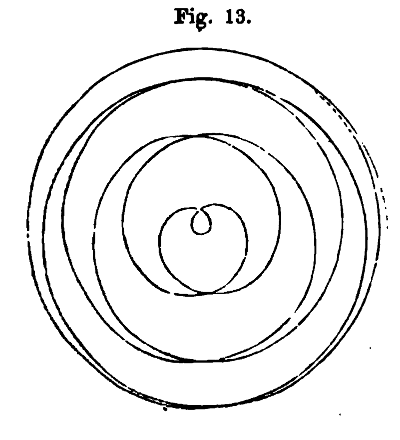
70. Zusammensetzung zweier gleichförmigen Kreisbewegungen. — Ein anderer sehr wichtiger Fall ist der zweier Gruppen von zwei einfachen harmonischen Bewegungen, die in einer Ebene stattfinden und so beschaffen sind, dass die Resultante jeder Gruppe eine gleichförmige Kreisbewegung ist.

Wenn die Perioden gleich sind, so haben wir einen der schon im § 63 behandelten Fälle und schliessen dann, dass die resultirende Bewegung im Allgemeinen in einer Ellipse erfolgt, und dass um den Mittelpunkt in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschrieben werden. In besonderen Fällen können wir auch eine einfache harmonische, oder eine gleichförmige Kreisbewegung erhalten.

Wenn hierbei die Kreisbewegungen in derselben Richtung vor sich gehen, so resultirt offenbar eine Kreisbewegung von derselben Richtung. Dies ist der Fall der Bewegung von S in § 58 und erfordert keine weitere Erläuterung, da die Amplitude, die Epoche, u. s. w. ohne Weiteres aus der Figur ersichtlich sind.

71. Wenn die Perioden der beiden Bewegungscomponenten nur äusserst wenig von einander verschieden sind, so wird die resultirende Bewegung in jedem Augenblick äusserst wenig von der durch die vorhergehende Construction gegebenen Kreisbewegung abweichen. Wir können dieselbe auch als eine in aller Strenge kreisförmige Bewegung auffassen, deren Radius von einem grössten Werthe, der Summe der Radien der beiden Bewegungscomponenten, zu einem kleinsten Werthe, der Differenz dieser Radien, abnimmt, darauf wieder bis zu jenem grössten Werthe wächst, u. s. f. Die Richtung des Radius der Resultante oscillirt zu beiden Seiten des Radius der grössern Componente (wie in dem entsprechenden Falle des § 59). Die Winkelgeschwindigkeit der resultirenden Bewegung ist daher periodisch veränderlich. Im Falle gleicher Radien, zu dem wir uns jetzt wenden, ist sie constant.

Fig. 13.



72. Wenn die Radien der beiden Bewegungscomponenten gleich sind, so haben wir den durch die nebenstehende Figur dargestellten äusserst interessanten und wichtigen Fall.

Hier halbirt der Radius

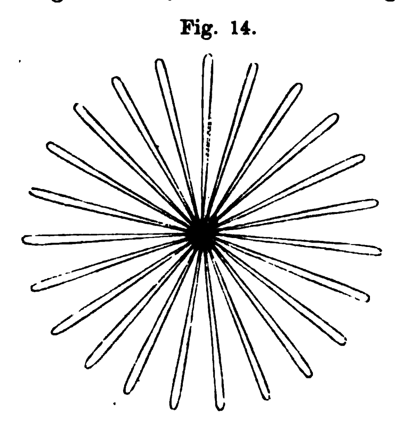
der Resultante den von den Radien der Componenten gebildeten Winkel. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist das arithmetische Mittel ihrer Componenten. Wir werden in einem spätern Paragraphen auseinandersetzen, wie diese Epitrochoide durch das Rollen eines Kreises auf einem andern Kreise entsteht. (Der oben gezeichnete besondere Fall ist der einer in sich nicht zurückkehrenden Curve.)

73. Die gleichförmigen Kreisbewegungen mögen jetzt in entgegengesetzten Richtungen erfolgen. Wenn dann die Perioden gleich sind, so erkennen wir leicht wie früher (§ 66), dass die Resultante im Allgemeinen eine elliptische Bewegung ist, welche die besonderen Fälle einer gleichförmigen Kreisbewegung und einer einfachen harmonischen Bewegung in sich schliesst.

Wenn die Perioden nur sehr wenig von einander verschieden sind, so erhält man die Resultante leicht wie im Falle des § 59.

74. Die Fälle, in denen die Radien der Bewegungscomponenten gleich sind, sind von äusserst grosser Bedeutung in der modernen Physik; einer derselben ist hier gezeichnet (die Curve läuft, wie die vorhergehende, nicht in sich zurück).

Fig. 14.



Dieser Fall steht in enger Beziehung zu der Erklärung zweier Reihen wichtiger Erscheinungen: der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Quarz und gewisse Flüssigkeiten einerseits und durch durchsichtige Körper, die man der Wirkung magnetischer Kräfte aussetzt, andererseits. Die obige Curve ist ein Fall der Hypotrochoide, und ihre Entstehungsart wird in einem späteren Paragraphen mitgetheilt werden. Auch wird man in der Kinetik sehen, dass sie die Bahn einer Pendellinse ist, welche ein schnell rotirendes Gyroskop enthält.

75. **Der Fourier'sche Satz.** — Bevor wir die Theorie der Zusammensetzung harmonischer Bewegungen für einige Zeit verlassen, müssen wir unserm in § 62 gegebenen Versprechen gemäss einige Seiten der Betrachtung des Fourier'schen Satzes widmen, der nicht nur eins der schönsten Ergebnisse der neuern Analysis

ist, sondern den man als ein bei der Behandlung von fast jeder schwierigeren Frage der neuern Physik unentbehrliches Hilfsmittel ansehen kann.

Wir brauchen nur die tönenden Schwingungen, die Fortpflanzung elektrischer Signale längs eines Telegraphendrahtes und die Leitung der Wärme durch die Erdrinde zu erwähnen, Gegenstände, die in ihrer Allgemeinheit ohne jenen Satz nicht behandelt werden können, um eine wenngleich schwache Vorstellung von seiner Bedeutung zu erwecken. Die folgende Form scheint die am leichtesten verständliche zu sein, in der man ihn dem gewöhnlichen Leser vorführen kann.

Satz. — Eine zusammengesetzte harmonische Function, mit einer hinzugefügten Constanten, kann zur mathematischen Darstellung einer jeden beliebigen periodischen Function und folglich auch einer jeden beliebigen anderen Function zwischen bestimmten Werthen der Veränderlichen gebraucht werden.

76. Wenn eine beliebige periodische Function gegeben ist, so kann man die Amplituden und Epochen einer zusammengesetzten harmonischen Function, die ihr für jeden Werth der unabhängig Veränderlichen gleich sein soll, mittels der „Methode der unbestimmten Coefficienten" bestimmen. Solch eine Untersuchung ist genügend als Lösung der Aufgabe: — eine zusammengesetzte harmonische Function zu finden, welche eine beliebig gegebene periodische Function darstellt, — sobald man sicher weiss, dass die Lösung der Aufgabe überhaupt möglich ist, und wenn man einmal diese Sicherheit hat, so zeigt jene Untersuchung, dass die Lösung eine ganz bestimmte ist, d. h. dass keine andere als die gefundene harmonische Function den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten kann.

77. Wir könnten das im vorhergehenden Paragraphen angedeutete Verfahren anwenden, um einen analytischen Beweis des Fourier'schen Satzes zu geben. Es scheint uns aber, dass die Natur des Ausdrucks klarer werden wird, wenn wir bei unserer Entwicklung einen andern Ausgangspunkt nehmen.

Es sei $F(x)$ eine beliebige periodische Function von der Periode p, d. h. irgend eine Function, welche die Bedingung

$$F(x + np) = F(x) \tag{1}$$

erfüllt, wo n irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Wir betrachten das Integral

$$\int_{c'}^{c} \frac{F(x)\,dx}{a^2 + x^2},$$

in welchem a, c, c' drei beliebig gegebene Grössen sind. Bezeichnen z und z' die zwischen den Grenzen c und c' enthaltenen, oder diesen Grenzen gleichen Werthe von x, für welche $F(x)$ beziehungsweise seinen grössten und kleinsten Werth hat, so ist das Integral kleiner als $F(z)\int_{c'}^{c}\frac{dx}{a^2+x^2}$ und grösser als $F(z')\int_{c'}^{c}\frac{dx}{a^2+x^2}$. Man hat aber

$$\int_{c'}^{c}\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\left(\operatorname{arctan}\frac{c}{a}-\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}\right), \tag{2}$$

folglich

$$\begin{cases}\int_{c'}^{c}\frac{F(x)\,a\,dx}{a^2+x^2}<F(z)\left(\operatorname{arctan}\frac{c}{a}-\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}\right)\\ \qquad " \qquad >F(z')\left(\operatorname{arctan}\frac{c}{a}-\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}\right).\end{cases} \tag{3}$$

Ist nun A der grösste und B der kleinste aller Werthe von $F(x)$, so folgt aus (3)

$$\begin{cases}\int_{c}^{\infty}\frac{F(x)a\,dx}{a^2+x^2}<A\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctan}\frac{c}{a}\right)\\ \qquad " \qquad >B\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctan}\frac{c}{a}\right),\end{cases} \tag{4}$$

und auf ähnliche Weise

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{c'}\frac{F(x)\,a\,dx}{a^2+x^2}<A\left(\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}+\frac{\pi}{2}\right)\\ \qquad " \qquad >B\left(\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}+\frac{\pi}{2}\right).\end{cases} \tag{5}$$

Addiren wir die ersten Glieder der Formeln (3), (4) und (5) und vergleichen die Summe mit den entsprechenden Summen der zweiten Glieder, so erhalten wir

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,a\,dx}{a^2+x^2}<F(z)\left(\operatorname{arctan}\frac{c}{a}-\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}\right)+A\left(\pi-\operatorname{arctan}\frac{c}{a}+\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}\right)\\ \qquad " \qquad >F(z')\left(\operatorname{arctan}\frac{c}{a}-\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}\right)+B\left(\pi-\operatorname{arctan}\frac{c}{a}+\operatorname{arctan}\frac{c'}{a}\right).\end{cases} \tag{6}$$

Nach (1) ist aber

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,dx}{a^2+x^2}=\int_{0}^{p}F(x)\,dx\left\{\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(\frac{1}{a^2+(x+np)^2}\right)\right\}. \tag{7}$$

Wenn wir jetzt $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnen, so ist

$$\frac{1}{a^2+(x+np)^2}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x+np-ai}-\frac{1}{x+np+ai}\right),$$

und es ergiebt sich folglich, wenn man die Terme, welche je zwei gleichen und entgegengesetzten Werthen von n entsprechen, zusammenfasst und diejenigen Terme, welche der Werth $n=0$ liefert, besonders schreibt,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(\frac{1}{a^2+(x+np)^2}\right)=\frac{1}{2ai}\left\{\frac{1}{x-ai}-2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x-ai}{n^2p^2-(x-ai)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{x+ai}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x+ai}{n^2p^2-(x+ai)^2}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2api}\left\{cot\frac{\pi(x-ai)}{p}-cot\frac{\pi(x+ai)}{p}\right\}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2api}.sin\frac{2\pi ai}{p}}{cos^2\frac{\pi ai}{p}-cos^2\frac{\pi x}{p}}=\frac{\frac{\pi}{api}.sin\frac{2\pi ai}{p}}{cos\frac{2\pi ai}{p}-cos\frac{2\pi x}{p}}$$

$$=\frac{\pi}{ap}\cdot\frac{e^{\frac{2\pi a}{p}}-e^{-\frac{2\pi a}{p}}}{e^{\frac{2\pi a}{p}}-2\cos\frac{2\pi x}{p}+e^{-\frac{2\pi a}{p}}}.$$

Die Formel (7) geht daher über in

$$(8)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{ap}\left(e^{\frac{2\pi a}{p}}-e^{-\frac{2\pi a}{p}}\right)\int_0^p\frac{F(x)\,dx}{e^{\frac{2\pi a}{p}}-2\cos\frac{2\pi x}{p}+e^{-\frac{2\pi a}{p}}}.$$

Bezeichnen wir weiter der Kürze wegen für einen Augenblick $e^{\frac{2\pi xi}{p}}$ mit ζ und setzen

$$(9)\quad e^{-\frac{2\pi a}{p}}=\varepsilon,$$

so haben wir

$$\frac{1}{e^{\frac{2\pi a}{p}}-2\cos\frac{2\pi x}{p}+e^{-\frac{2\pi a}{p}}}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon(\zeta+\zeta^{-1})+\varepsilon^2}$$

$$=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{1}{1-\varepsilon\zeta}+\frac{1}{1-\varepsilon\zeta^{-1}}-1\right)$$

$$=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\{1+\varepsilon(\zeta+\zeta^{-1})+\varepsilon^2(\zeta^2+\zeta^{-2})+\varepsilon^3(\zeta^3+\zeta^{-3})+\text{u. s. w.}\}$$

$$=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\left(1+2\varepsilon\cos\frac{2\pi x}{p}+2\varepsilon^2\cos\frac{4\pi x}{p}+2\varepsilon^3\cos\frac{6\pi x}{p}+\text{u. s. w.}\right),$$

und die Formeln (8) und (9) liefern somit

$$(10)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)\,dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{ap}\int_0^p F(x)\,dx\left(1+2\varepsilon\cos\frac{2\pi x}{p}+2\varepsilon^2\cos\frac{4\pi x}{p}+\text{u. s. w.}\right).$$

Aus (6) und (10) folgern wir, dass

$$F(z)\left(arctan\frac{c}{a}-arctan\frac{c'}{a}\right)+A\left(\pi-arctan\frac{c}{a}+arctan\frac{c'}{a}\right)>$$

und

$$F(z')\left(arctan\frac{c}{a}-arctan\frac{c'}{a}\right)+B\left(\pi-arctan\frac{c}{a}+arctan\frac{c'}{a}\right)<$$

$$\frac{\pi}{p}\int_0^p F(x)\,dx\left(1 + 2\,\varepsilon\cos\frac{2\pi x}{p} + \text{u. s. w.}\right)$$

ist. Es sei jetzt $c' = -c$ und $x = \xi' - \xi$, wo ξ' eine Veränderliche und ξ, was die Integration betrifft, constant ist; ferner sei

$$F(x) = \varphi(x + \xi) = \varphi(\xi'),$$

also

$$F(z) = \varphi(\xi + z),$$
$$F(z') = \varphi(\xi + z').$$

Dann geht das vorhergehende Ungleichungspaar über in

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi(\xi+z)\,.\,2\arctan\frac{c}{a} + A\left(\pi - 2\arctan\frac{c}{a}\right) > \\ \text{und} \\ \varphi(\xi+z')\,.\,2\arctan\frac{c}{a} + B\left(\pi - 2\arctan\frac{c}{a}\right) < \\ \frac{\pi}{p}\left\{\int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon^n \int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' \cos\frac{2n\pi(\xi'-\xi)}{p}\right\}; \end{cases}$$

darin bezeichnet φ eine beliebige periodische Function von der Periode p.

Wir nehmen nun an, c sei ein sehr kleiner Bruchtheil von p. Im Grenzfall, wenn c unendlich klein ist, werden der grösste und kleinste Werth von $\varphi(\xi')$ für Werthe von ξ', die zwischen $\xi + c$ und $\xi - c$ liegen, nur unendlich wenig von einander und von $\varphi(\xi)$ verschieden sein, d. h. es ist

$$\varphi(\xi + z) = \varphi(\xi + z') = \varphi(\xi).$$

Weiter sei a ein unendlich kleiner Bruchtheil von c. Im Grenzfall ist dann

$$\arctan\frac{c}{a} = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\varepsilon = e^{-\frac{2\pi a}{p}} = 1.$$

Die Ungleichungen (11) liefern somit für die angegebene Grenze eine Gleichung, die nach beiderseitiger Division durch π folgende wird: —

$$(12)\qquad \varphi(\xi) = \frac{1}{p}\left\{\int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^p \varphi(\xi')\,d\xi' \cos\frac{2n\pi(\xi'-\xi)}{p}\right\}.$$

Dies ist der berühmte von Fourier*) entdeckte Satz für die Entwicklung einer beliebigen periodischen Function in eine Reihe von einfach harmonischen Gliedern. Eine in ihm als besonderer Fall enthaltene Formel ist schon früher von Lagrange**) gegeben worden.

Setzen wir für $\cos\frac{2n\pi(\xi'-\xi)}{p}$ seinen Werth

---

*) Théorie Analytique de la Chaleur, Paris 1822.

**) Anciens Mémoires de l'Académie de Turin. Tome III, p. 126.

$$\cos\frac{2n\pi\xi'}{p}\cos\frac{2n\pi\xi}{p}+\sin\frac{2n\pi\xi'}{p}\sin\frac{2n\pi\xi}{p}$$

und führen die Bezeichnung

$$(13)\quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{p}\int\limits_0^p \varphi(\xi)\,d\xi \\ A_n = \frac{2}{p}\int\limits_0^p \varphi(\xi)\cos\frac{2n\pi\xi}{p}\,d\xi \\ B_n = \frac{2}{p}\int\limits_0^p \varphi(\xi)\sin\frac{2np\xi}{p}\,d\xi \end{cases}$$

ein, so reduciren wir (12) auf die Form

$$(14)\quad \varphi(\xi) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\cos\frac{2n\pi\xi}{p} + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n\sin\frac{2n\pi\xi}{p},$$

welche der allgemeine Ausdruck einer beliebigen Function in Form einer Reihe von Sinus und von Cosinus ist. Oder nehmen wir

$$(15)\quad P_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2} \text{ und } \tan\varepsilon_n = \frac{B_n}{A_n}$$

an, so haben wir

$$(16)\quad \varphi(\xi) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} P_n\cos\left(\frac{2n\pi\xi}{p} - \varepsilon_n\right),$$

und dies ist der allgemeine Ausdruck in Form einer Reihe, wo jeder der successiven vielfachen Perioden nur ein einfach harmonisches Glied entspricht.

Convergenz der Fourier'schen Reihe. Um Missverständnisse zu vermeiden, muss bemerkt werden, dass jede der Gleichungen und Vergleichungen (2), (7), (8), (10) und (11) ihren bestimmten arithmetischen Sinn hat und für jeden besondern Fall durch wirkliche Berechnung der Zahlen bewahrheitet werden kann; dabei wird nur vorausgesetzt, dass $F(x)$ keinen unendlich grossen Werth in seiner Periode hat. Unter dieser Beschränkung ist folglich (12) oder jede der beiden äquivalenten Formeln (14), (16) ein arithmetischer Ausdruck von bestimmtem Sinn und die darin enthaltene Reihe somit convergent. Wir können hieraus in aller Strenge schliessen, dass auch der Fall, in welchem die willkürliche Function eine plötzliche endliche Aenderung ihres Werthes erfährt, wenn die unabhängig Veränderliche bei ihrer stetigen Zunahme durch einen besondern Werth oder durch mehrere besondere Werthe hindurchgeht, in dem allgemeinen Satze enthalten ist. Wenn man in einem solchen Falle der unabhängig Veränderlichen irgend einen Werth ertheilt, der, wenn auch noch so wenig, von einem eine plötzliche Werthänderung der Function herbeiführenden Werthe verschieden ist, so muss, wie wir aus der vorhergehenden Untersuchung folgern können, die Reihe convergiren und einen bestimmten Werth für die Function liefern. Wenn aber der unabhängig Veränderlichen genau der kritische Werth beigelegt wird, so kann die Reihe zu keinem bestimmten Werthe convergiren. Die Betrachtung der durch die Formel (11) gelieferten einschliessenden Werthe beseitigt alle

Schwierigkeit, zu verstehen, wie die Reihe (12) für zwei besondere Werthe der unabhängig Veränderlichen, die zu beiden Seiten eines kritischen Werthes liegen, sich aber unendlich wenig von einander unterscheiden, bestimmte Werthe von endlicher Differenz liefert.

Wenn der Differentialquotient $\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}$ für jeden innerhalb der Periode gelegenen Werth von ξ endlich ist, so lässt auch er sich arithmetisch durch eine Reihe harmonischer Glieder ausdrücken, und diese Reihe kann von derjenigen nicht verschieden sein, die man erhält, wenn man die Reihe von $\varphi(\xi)$ differentiirt. Daraus folgt, dass

$$\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} = -\frac{2\pi}{p}\sum_{n=1}^{n=\infty} n P_n \sin\left(\frac{2n\pi\xi}{p} - \varepsilon_n\right), \tag{17}$$

und dass diese Reihe convergirt; daraus ziehen wir den Schluss, dass die Reihe von $\varphi(\xi)$ schneller convergirt als eine harmonische Reihe mit den Coefficienten

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{ u. s. w.}$$

Wenn ferner $\frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2}$ innerhalb der Periode endlich bleibt, so dürfen wir beide Glieder von (17) differentiiren und erhalten eine immer noch arithmetisch richtige Gleichung. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse erkennen wir, dass, wenn der $n$te Differentialquotient keine unendlichen Werthe hat, die harmonische Reihe für $\varphi(\xi)$ schneller convergiren muss, als eine harmonische Reihe mit den Coefficienten

$$1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \frac{1}{4^n}, \text{ u. s. w.}$$

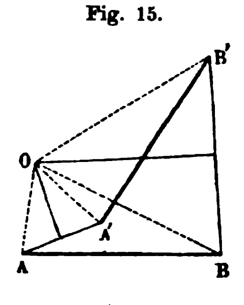
78. **Verschiebung eines starren Körpers.** — Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Verschiebung eines starren Körpers oder einer Gruppe von Punkten über, deren gegenseitige Lage keine Aenderung erleiden kann. Der einfachste Fall, den wir erörtern können, ist der der Bewegung einer ebenen Figur in ihrer eigenen Ebene, und was sich hierüber sagen lässt, ist, soweit es die Kinematik betrifft, vollständig in dem Resultat des folgenden Paragraphen zusammengefasst.

79. **Verschiebung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.** — Wenn eine ebene Figur auf irgend eine Weise in ihrer eigenen Ebene verschoben wird, so giebt es immer (mit einer in § 81 behandelten Ausnahme) einen Punkt, der zwei beliebigen Lagen gemeinschaftlich ist, d. h. die Figur kann aus jeder Lage in jede andere Lage dadurch gebracht werden, dass man sie in ihrer eigenen Ebene um einen festgehaltenen Punkt rotiren lässt.

Dies zu beweisen, nehmen wir an, es seien A, B irgend zwei Punkte der ebenen Figur in ihrer ersteren Lage, und A', B' die Lagen,

welche dieselben Punkte nach einer Verschiebung inne haben. Die Linien AA', BB' werden im Allgemeinen nicht parallel sein, ausser in einem Falle, der alsbald betrachtet werden soll. Der geometrische Ort der von A und A' gleich weit abstehenden Punkte wird folglich den Ort der Punkte, die von B und B' gleiche Entfernungen haben, in einem Punkte O schneiden. Verbinden wir nun O mit A, B, A', B', so sind die Dreiecke $OA'B'$ und OAB, da $OA' = OA$, $OB' = OB$, $A'B' = AB$ ist, offenbar congruent. O ist also gegen $A'B'$ und AB ähnlich gelegen, folglich ein und derselbe Punkt der ebenen Figur in ihren beiden Lagen. Wenn wir, um die Sache zu veranschaulichen, das Dreieck OAB wirklich in der Ebene verzeichnen, so wird es in der zweiten Lage der Figur $OA'B'$.

Fig. 15.

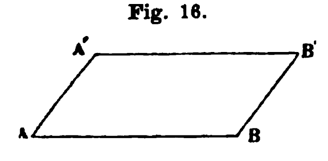


80. Nehmen wir von den gleichen Winkeln $A'OB'$, AOB dieser congruenten Dreiecke den beiden gemeinschaftlichen Theil $A'OB$ weg, so bleiben uns die gleichen Winkel AOA', BOB' übrig, und jeder derselben ist offenbar gleich dem Winkel, durch welchen die Figur um den Punkt O gedreht werden muss, um aus der ersteren in die zweite Lage überzugehen.

Die vorhergehende einfache Construction setzt uns in den Stand, nicht nur den allgemeinen Satz des § 79 zu beweisen, sondern auch aus zwei Lagen AB, $A'B'$ einer Linie der Figur den gemeinschaftlichen Mittelpunkt und die Grösse des Rotationswinkels zu bestimmen.

81. Die von A und A' gleich weit abstehende Gerade ist der Geraden, welche dieselbe Eigenschaft in Beziehung auf die Punkte B und B' hat, parallel, wenn AB parallel $A'B'$ ist. In diesem Falle schlägt die Construction fehl, da der Punkt O in unendliche Entfernung rückt, und der Satz verliert seine Geltung. Die Bewegung ist dann thatsächlich eine einfache Verschiebung der Figur in ihrer Ebene, die ohne Rotation erfolgt, da, wenn AB parallel und gleich $A'B'$, auch AA' parallel und gleich BB' ist, und anstatt dass ein Punkt zweien Lagen der Figur gemeinschaftlich sei, sind hier die Geraden,

Fig. 16.

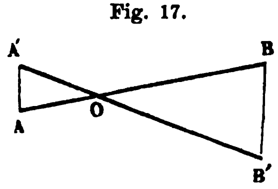


welche die verschiedenen Lagen jedes Punktes der Figur verbinden, gleich und parallel.

82. Es ist nicht nöthig, vorauszusetzen, dass die Figur eine flache Scheibe oder eine Ebene sei. Die vorhergehenden Ergebnisse gelten für jede einzelne der parallelen Ebenen eines starren Körpers, der sich in einer Weise bewegt, die nur der Bedingung unterworfen ist, dass die Punkte jeder seiner Ebenen beständig in einer festen Ebene des Raumes bleiben.

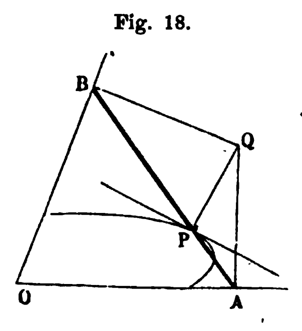
83. Es giebt noch einen Fall, in welchem die Construction des § 79 illusorisch wird, nämlich wenn AA' und BB' parallel sind, aber AB und $A'B'$ einander schneiden. In diesem Falle sieht man aber auf der Stelle, dass eben der Durchschnittspunkt von AB und $A'B'$ der gesuchte Punkt O ist, obwohl die frühere Methode uns nicht in den Stand gesetzt haben würde, ihn zu ermitteln.

Fig. 17.



84. **Beispiele von Verschiebungen in einer Ebene.** — Von diesem Princip lassen sich sehr viele interessante Anwendungen machen, von denen aber nur wenige streng genommen zu unserem Gegenstande gehören. Wir werden daher nur ein oder zwei Beispiele vorführen. So wissen wir, dass jeder Punkt P einer Geraden von gegebener Länge AB, die sich so bewegt, dass ihre Endpunkte beständig in zwei festen Geraden OA, OB bleiben, eine Ellipse beschreibt. Man soll für irgend einen Augenblick die Bewegungsrichtung von P finden, d. h. eine Tangente an die Ellipse ziehen. Die Linie BA wird in ihre nächste Lage durch Rotation um den Punkt Q übergehen. Diesen Punkt Q erhält man mittels der Methode des § 79 dadurch, dass man in A und B auf OA und OB Senkrechte errichtet. Für den in Rede stehenden Augenblick dreht sich also P um Q, und somit ist seine Bewegungsrichtung, oder die Tangente an die Ellipse senkrecht zu QP. Ferner berührt die Gerade AB bei ihrer Bewegung beständig eine Curve (in der Geometrie ihre einhüllende Curve genannt), und dasselbe Princip ermöglicht es, den Punkt dieser

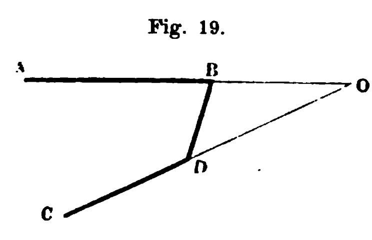
Fig. 18.



Curve zu ermitteln, welcher in AB liegt. Denn die Bewegung jenes Punktes muss offenbar, wenn nur eine sehr kleine Verschiebung erfolgt, längs AB vor sich gehen, und der einzige sich in dieser Weise bewegende Punkt ist der Durchschnittspunkt von AB mit der von Q aus auf AB gefällten Senkrechten. Unsere Construction würde uns also in den Stand setzen, die einhüllende Curve, d. h. beliebig viele Punkte derselben, zu zeichnen.

85. Um ein zweites Beispiel zu geben, nehmen wir an, AB sei der Balancier einer feststehenden Dampfmaschine, die sich um A auf und ab bewegt und vermittels einer Kette BD eine Kurbel CD in derselben Ebene um C dreht. Man soll für irgend eine Lage das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten von AB und CD bestimmen. Offenbar ist die augenblickliche Bewegungsrichtung von B transversal zu AB, und diejenige von D transversal zu CD. Wenn also die Verlängerungen von AB und CD sich in O schneiden, so ist die Bewegung von BD für einen Augenblick gleichsam eine Drehung um O. Daraus ersieht man leicht, dass, wenn AB die Winkelgeschwindigkeit ω hat, diejenige von CD gleich $\frac{AB}{OB}\frac{OD}{CD}\omega$ ist. Ein ähnliches Verfahren ist natürlich für jede Maschinenverbindung anwendbar, und werden wir dasselbe als sehr vortheilhaft erkennen, wenn wir im Zusammenhang mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten verschiedene dynamische Probleme zu betrachten haben werden.

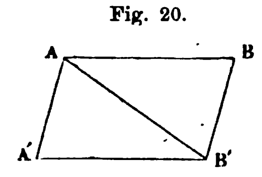
Fig. 19.



86. Zusammensetzung von Rotationen um parallele Axen. — Da jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene im Allgemeinen als eine Rotation um einen Punkt angesehen werden kann, so leuchtet ein, dass sich zwei solche Rotationen im Allgemeinen in eine zusammensetzen lassen; dasselbe kann folglich auch mit einer beliebigen Anzahl von Rotationen geschehen. So seien A und B die Punkte der Figur, um welche die Rotationen nach einander stattfinden sollen. Durch eine Rotation um A werde B etwa nach B', und durch eine Rotation um B' werde A nach A' gebracht. Die Construction des § 79 giebt uns ohne Weiteres den Punkt O und die Grösse der Rotation um diesen Punkt, die für sich allein dieselbe Wirkung hat, wie wenn man die Rotationen um A

und B nach einander ausführte. Eine Ausnahme macht nur der Fall, in welchem die Rotationen um A und B von gleicher Grösse und von entgegengesetzten Richtungen sind. In diesem Falle ist $A'B'$ offenbar parallel AB, und das Ergebniss der Zusammensetzung nur eine Verschiebung ohne jede Rotation. Wenn also

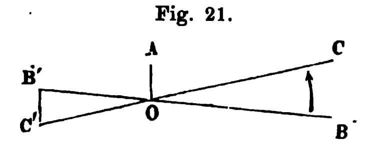
Fig. 20.



ein Körper sich nach einander durch gleiche Winkel, aber in entgegengesetzten Richtungen um zwei parallele Axen dreht, so nimmt er schliesslich eine Lage an, in die man ihn durch eine einfache Parallelverschiebung hätte bringen können; diese Verschiebung ist senkrecht gegen diejenigen Linien des Körpers in seiner anfänglichen oder letzten Lage, welche nach einander zu Rotationsaxen gemacht wurden, und bildet mit der Ebene derselben einen Winkel, der halb so gross als das Supplement des gemeinschaftlichen Rotationswinkels ist.

87. **Zusammensetzung von Rotationen und Verschiebungen in einer Ebene.** — Mit Beziehung hierauf können wir eine Rotation und eine Verschiebung, welche parallel der Rotationsebene ausgeführt wird, in eine äquivalente Rotation zusammensetzen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Verschiebung in zwei Rotationen von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung, vereinigen eine derselben nach § 86 mit der gegebenen Rotation und ebenso die zweite mit dem erhaltenen Resultat. Wir können uns auch der folgenden weit einfacheren Methode bedienen: — Es sei OA die allen

Fig. 21.



Punkten in der Ebene gemeinschaftliche Verschiebung, und BOC der Winkel der Rotation um O; BO ist so gezogen, dass OA den Nebenwinkel COB' von BOC halbirt. Offenbar giebt es in der Verlängerung von BO einen Punkt B' von der Beschaffenheit, dass der Weg $B'C'$, den er in Folge der Rotation zurücklegt, gleich und entgegengesetzt OA ist. Dieser Punkt nimmt nach Ausführung beider gegebenen Operationen seine anfängliche Lage wieder ein, und wir sehen somit, dass eine Rotation und eine Parallelverschiebung in einer Ebene in eine gleiche Rotation um eine andere Axe zusammengesetzt werden können.

Wenn der Coordinatenanfangspunkt als der Punkt angenommen wird, um welchen in der xy Ebene eine Rotation stattfindet, und wenn der

Rotationswinkel von der Grösse ϑ ist, so hat ein Punkt, dessen Coordinaten anfangs x, y waren, nach der Rotation die Coordinaten

$$\xi = x \cos\vartheta - y \sin\vartheta,$$
$$\eta = x \sin\vartheta + y \cos\vartheta,$$

oder, wenn die Rotation sehr klein ist,

$$\xi = x - y\vartheta, \quad \eta = x\vartheta + y.$$

88. **Weglassung unendlich kleiner Grössen der zweiten Ordnung und höherer Ordnungen.** — Bei der Betrachtung der Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten um verschiedene Axen und anderer ähnlichen Fälle können wir es mit nur unendlich kleinen Verschiebungen zu thun haben, und aus den Principien der Differentialrechnung folgt ohne Weiteres, dass, wenn diese Verschiebungen unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind, man jeden Punkt, dessen Verschiebung eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung ist, als in aller Strenge ruhend anzusehen hat. Wenn also z. B. ein Körper sich durch einen Winkel, der eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, um eine dem Körper angehörende Axe dreht, welche während der Drehung durch einen Winkel oder Weg verschoben wird, der gleichfalls eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, so ist die Verschiebung jedes Punktes des Körpers genau dieselbe, als wenn die Axe während der um sie erfolgten Rotation fest gewesen wäre, und ihre eigene Verschiebung entweder vor oder nach dieser Rotation stattgefunden hätte. In jedem Falle der Bewegung eines starren Systems sind folglich die Winkelgeschwindigkeiten in Beziehung auf ein System von Axen, die sich mit dem starren System bewegen, in jedem Augenblick die nämlichen, wie die in Beziehung auf ein festes Axensystem, vorausgesetzt nur, dass das letztere in dem fraglichen Augenblicke mit dem beweglichen zusammenfällt.

89. **Vereinigung kleiner Bewegungen.** — Aus ähnlichen Betrachtungen ergiebt sich auch das allgemeine Princip der Vereinigung kleiner Bewegungen. Dasselbe sagt aus, dass, wenn mehrere Ursachen gleichzeitig auf einen materiellen Punkt oder starren Körper wirken, und wenn die Wirkung jeder dieser Ursachen eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, man die Gesammtwirkung dadurch erhält, dass man die Ursachen einzeln nach einander wirken und jede den Punkt oder Körper in der Lage übernehmen lässt, in welcher die vorhergehende ihn gelassen hat. Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass dieser Satz

eine unmittelbare Folge der Thatsache ist, dass unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung ohne jede Beeinträchtigung der Genauigkeit vernachlässigt werden können. Wir werden in der Folge sehen, dass dies Princip von sehr grossem Nutzen ist; fast überall werden wir Anwendungen davon zu machen haben.

Eine ebene Figur habe gegebene Winkelgeschwindigkeiten um gegebene Axen, die zur Ebene der Figur senkrecht stehen. Man soll die Resultante bestimmen.

Um eine durch den Punkt a, b gehende Axe sei eine Winkelgeschwindigkeit ω vorhanden. Dann ist, wie wir soeben (§ 87) gesehen haben, die erfolgende Bewegung des Punktes x, y in der Zeit δt:

$$-(y-b)\,\omega\,\delta t \text{ parallel der } x \text{ Axe,}$$
$$(x-a)\,\omega\,\delta t \text{ parallel der } y \text{ Axe.}$$

Das Princip der Vereinigung kleiner Bewegungen liefert somit für die Gesammtbewegungen, welche beziehungsweise der x und der y Axe parallel erfolgen,

$$-(y\Sigma\omega - \Sigma b\,\omega)\,\delta t$$

und

$$(x\Sigma\omega - \Sigma a\,\omega)\,\delta t.$$

Folglich ist der Punkt, welcher die Coordinaten

$$x = \frac{\Sigma a\,\omega}{\Sigma\omega}, \quad y = \frac{\Sigma b\,\omega}{\Sigma\omega}$$

hat, in Ruhe, und die resultirende Axe geht durch ihn hindurch. Jeder andere Punkt ξ, η legt die Wege

$$-(\eta\Sigma\omega - \Sigma b\,\omega)\,\delta t, \quad (\xi\Sigma\omega - \Sigma a\,\omega)\,\delta t$$

zurück. Wenn aber das ganze System sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um den Punkt x, y gedreht hätte, so würden wir für die Verschiebungen von ξ, η

$$-(\eta - y)\,\Omega\,\delta t, \quad (\xi - x)\,\Omega\,\delta t$$

erhalten haben. Der Vergleich beider Ergebnisse lehrt, dass

$$\Omega = \Sigma\omega$$

ist.

Ist also die Summe der Winkelgeschwindigkeiten Null, so findet keine Rotation statt. In der That zeigen die obigen Formeln, dass dann nur eine Verschiebung vorhanden ist, und zwar beträgt dieselbe

$$\Sigma(b\,\omega)\,\delta t \text{ parallel der } x \text{ Axe,}$$
$$-\Sigma(a\,\omega)\,\delta t \text{ parallel der } y \text{ Axe.}$$

Diese Formeln genügen zur Behandlung jeder den Gegenstand betreffenden Aufgabe.

90. Eine Curve rollt auf einer andern. — Jede Bewegung einer ebenen Figur in ihrer eigenen Ebene kann dadurch hervorgebracht werden, dass eine mit der Figur fest verbundene Curve auf einer in der Ebene fest liegenden Curve rollt.

Denn wir können uns die Gesammtbewegung in ihre Elemente, d. i. in eine Reihe nach einander erfolgenden Verschiebungen zerlegt denken, von denen jede, wie wir gesehen haben, einer Rotation um einen bestimmten Punkt der Ebene entspricht. Es seien O_1, O_2, O_3, u. s. w. die Punkte der Figur, um welche der Reihe nach die Rotationen stattfinden, und o_1, o_2, o_3, u. s. w. die Lagen dieser Punkte in der Ebene zur Zeit, wo jeder der augenblickliche Rotationsmittelpunkt ist. Die Figur rotirt so lange um O_1 (oder um den damit zusammenfallenden Punkt o_1), bis O_2 mit o_2 zusammenfällt; darauf rotirt sie um O_2, bis O_3 auf o_3 zu liegen kommt, u. s. w. Verbinden wir also in der Ebene der Figur die Punkte O_1, O_2, O_3, u. s. w., und in der festen Ebene o_1, o_2, o_3, u. s. w., so ist die Bewegung genau dieselbe, als wenn das Polygon $O_1\, O_2\, O_3$ u. s. w. auf dem festen Polygone $o_1\, o_2\, o_3$ u. s. w. rollte. Setzt man die successiven Verschiebungen hinreichend klein voraus, so werden die Seiten dieser Polygone beständig kleiner, und die Polygone schliesslich continuirliche Curven. Der vorliegende Satz ist somit bewiesen.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass jede Verschiebung eines starren Körpers, deren Richtungen senkrecht zu einer festen Geraden sind, dadurch hervorgebracht werden kann, dass ein mit dem Körper fest verbundener Cylinder auf einem im Raum fest stehenden zweiten Cylinder rollt; die Axen beider Cylinder sind der festen Geraden parallel.

91. Als ein interessantes Beispiel dieses Satzes wollen wir wieder den Fall des § 84 ins Auge fassen: —

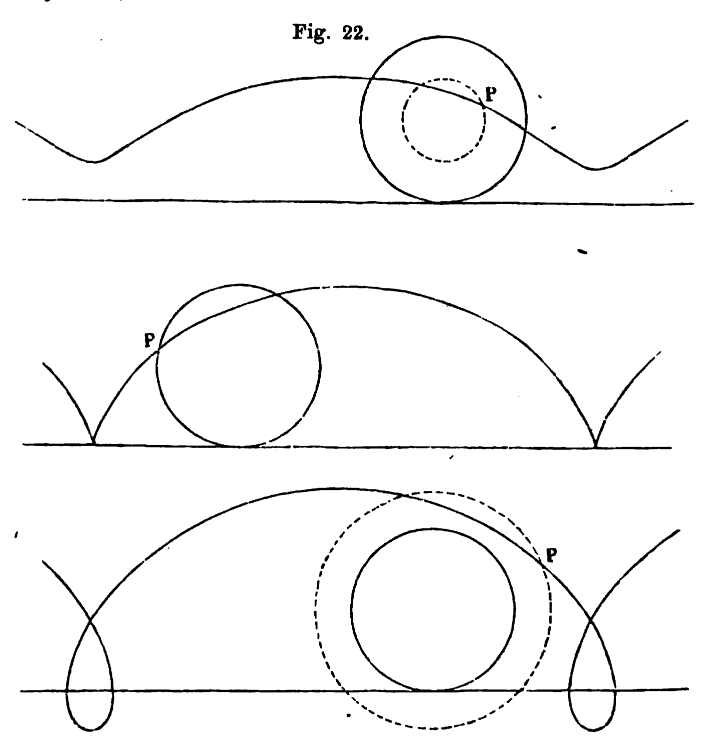
Offenbar kann um $OBQA$ ein Kreis beschrieben werden, und muss derselbe von unveränderlicher Grösse sein, da über einer Sehne von gegebener Länge AB ein gegebener Peripheriewinkel O steht. Ferner ist OQ ein Durchmesser dieses Kreises, folglich constant. Da nun Q augenblicklich in Ruhe ist, so ist die Bewegung des $OBQA$ umschreibenden Kreises ein auf der innern Seite der Peripherie eines Kreises von doppelt so grossem Durchmesser stattfindendes Rollen. Wenn also ein Kreis auf der Innenseite eines zweiten Kreises von doppelt so grossem Durchmesser rollt, so beschreibt jeder Punkt seiner Peripherie einen Durchmesser des festen Kreises, jeder andere Punkt seiner Ebene eine Ellipse. Dies ist genau das bereits in § 70, wenngleich auf einem ganz andern Wege erhaltene Resultat. Da dasselbe uns einen besondern Fall der Hypocycloide vorführt, so erinnert es uns daran, zur Betrachtung dieser und verwandter Curven zurückzukehren, welche gute Beispiele für kinema-

tische Sätze liefern und zudem allgemein von grossem Nutzen in der Physik sind.

92. Cycloiden und Trochoiden. — Wenn ein Kreis auf einer Geraden rollt, so beschreibt ein Punkt seiner Peripherie eine Cycloide, ein innerhalb des Kreises liegender Punkt eine verflachte, endlich ein Punkt, der ausserhalb des Kreises in der Ebene desselben liegt, eine verkürzte Cycloide. Die beiden letzten Varietäten werden zuweilen Trochoiden genannt.

Die allgemeine Form dieser Curven lässt sich aus den beigefügten Figuren ersehen. Unsere folgenden Bemerkungen beziehen sich nur auf die Cycloide selbst; denn diese Curve ist von unendlich grösserer Bedeutung als die beiden anderen. Der folgende Paragraph enthält eine einfache Untersuchung derjenigen Eigenschaften der Cycloide, welche für unsere Zwecke am nützlichsten sind.

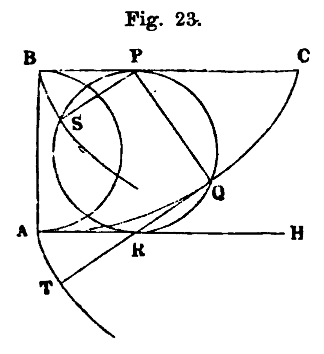
Fig. 22.



93. Eigenschaften der Cycloide. — Es sei AB der Durchmesser des erzeugenden (oder rollenden) Kreises, und BC die Ge-

rade, auf welcher er rollt. Die Punkte A und B beschreiben congruente Cycloiden, von denen AQC und BS Theile sind.

Fig. 23.



Wenn PQR irgend eine spätere Lage des erzeugenden Kreises ist, in welcher A und B die neuen Lagen Q und S einnehmen, so ist $\measuredangle QPS$ natürlich ein rechter Winkel. Wird also QR parallel PS gezogen, so ist PR ein Durchmesser des rollenden Kreises. Wir verlängern nun QR bis T, indem wir $RT = QR = PS$ machen. Offenbar ist der geometrische Ort der Punkte T, die Curve AT, congruent BS, folglich eine AC congruente Cycloide. QR ist aber senkrecht zu PQ, also die augenblickliche Bewegungsrichtung von Q, oder die Tangente an die Cycloide AQC. Ebenso steht PS senkrecht auf der Cycloide BS in S, folglich ist auch TQ senkrecht auf AT in T. Daraus geht hervor (§ 19), dass AQC die Evolute von AT, und Bogen $AQ = QT = 2\,QR$ ist.

94. Epicycloiden, Hypocycloiden, u. s. w. — Wenn der Kreis auf einem zweiten Kreise rollt, so wird die von einem Punkte seiner Peripherie beschriebene Curve Epicycloide oder Hypocycloide genannt, je nachdem der bewegliche Kreis ausserhalb oder innerhalb des festen sich befindet. Wenn der die Curve verzeichnende Punkt nicht in der Peripherie liegt, so erhalten wir Epitrochoiden und Hypotrochoiden. Beispiele der letzteren haben wir schon in § 70, 91 angetroffen, andere werden alsbald erwähnt werden. Was die ersteren betrifft, so stellt uns Fig. 24 den Fall dar, in welchem ein Kreis auf der Aussenseite eines gleich grossen Kreises rollt. Die Curve wird in diesem Falle Cardioide genannt (§ 49).

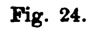
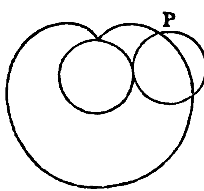


Fig. 24.



In der Fig. 25 (a. f. S.) liegen die Kreise gleichfalls ausserhalb einander, und der feste Kreis hat einen doppelt so grossen Radius als der rollende. Die so beschriebene Epicycloide ist in der Optik von grosser Wichtigkeit, und werden wir uns unter Anderm bei der Betrachtung der Brenn-

linien, zu denen die Reflexion des Lichts führt, darauf beziehen.

In der Fig. 26 haben wir eine Hypocycloide, die entsteht, wenn ein Kreis auf der Innenseite der Peripherie eines zweiten Kreises von viermal so grossem Radius rollt.

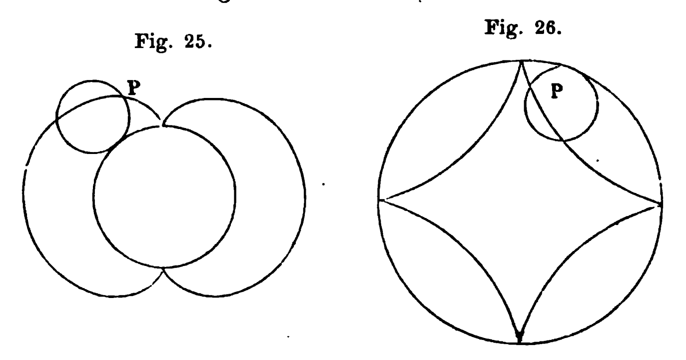


Fig. 25. Fig. 26.

Die in § 72 gezeichnete Curve ist eine Epitrochoide, welche durch einen Punkt in der Ebene einer grossen kreisförmigen Scheibe beschrieben wird, wenn dieselbe auf einem Cylinder rollt, dessen Basis ein Kreis von kleinem Durchmesser ist, so dass der Punkt durch die Axe des Cylinders geht.

Die Curve des § 74 ist eine Hypotrochoide, die von einem Punkte in der Ebene eines Kreises beschrieben wird, welcher innerhalb auf der Peripherie eines zweiten Kreises von mehr als doppelt so grossem Durchmesser rollt; der die Curve verzeichnende Punkt geht durch den Mittelpunkt des festen Kreises. Wenn die Durchmesser beider Kreise sich genau wie 1 : 2 verhielten, so würde diese Curve, wie uns § 73 oder § 91 zeigt, sich auf eine einzige Gerade reduciren.

Die allgemeinen Gleichungen dieser Classe von Curven sind

$$x = (a + b) \cos \vartheta - eb \cos \frac{a+b}{b} \vartheta,$$

$$y = (a + b) \sin \vartheta - eb \sin \frac{a+b}{b} \vartheta;$$

darin bezeichnet a den Radius des festen, b denjenigen des rollenden Kreises und eb den Abstand des die Curve verzeichnenden Punktes vom Mittelpunkte des letztern.

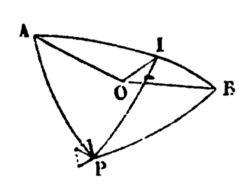
95. **Bewegung um einen festen Punkt.** — Wenn sich ein starrer Körper auf irgend eine Weise bewegt, die nur der Bedingung unterworfen ist, dass einer seiner Punkte fest bleibt, so

giebt es immer (ohne jede Ausnahme) eine durch diesen Punkt gehende Gerade, welche dem Körper in zwei beliebigen Lagen gemeinschaftlich ist.

Wir betrachten eine innerhalb des Körpers liegende Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt C ist. Alle Punkte dieser mit dem Körper fest verbundenen Kugelfläche werden sich auf einer im Raume fest liegenden Kugel bewegen. Wir können folglich die Construction des § 79 ausführen, nur mit grössten Kreisen statt der geraden Linien; die nämlichen Schlüsse ergeben dann, dass der durch die Construction erhaltene Punkt O dem Körper in seinen beiden Lagen gemeinschaftlich ist. Es muss folglich auch jeder Punkt des Körpers, welcher auf der O mit dem festen Punkte C verbindenden Geraden OC liegt, dem Körper in beiden Lagen gemeinschaftlich sein. Der Körper kann also aus jeder Lage in jede andere Lage durch eine um eine bestimmte Axe erfolgende Rotation von bestimmter Grösse übergehen. Weiter ergiebt sich hieraus, dass sich Rotationen, die nach einander oder auch gleichzeitig um beliebig viele durch den festen Punkt gehende Axen stattfinden, in eine einzige solche Rotation zusammensetzen lassen.

Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten. — Es seien OA, OB zwei Axen, um welche sich ein Körper mit den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω_1 bewegt. Um den festen Punkt O als Mittelpunkt beschreiben wir eine Kugel, deren Radius gleich der Einheit ist, und welche die Axen in A und B schneidet. Betrachten wir jetzt irgend einen andern Punkt P auf der Kugel, so können wir (§ 89) die Verschiebungen, die er während eines unendlich kleinen Zeitraums δt erfährt, als nach einander eintretend ansehen.

Fig. 27.



Die Verschiebungen von P, und folglich auch ihre Resultante liegen in der durch P gehenden Tangentialebene der Kugel. Sie stehen in P beziehungsweise senkrecht auf den Bogen AP, BP, ihre Grössen sind

$$\omega \sin AP . \delta t \text{ und } \omega_1 \sin BP . \delta t,$$

und ihre Richtungen schliessen einen APB gleichen Winkel ein.

Ein in AB gewählter Punkt I, für welchen $\omega \sin AI = \omega_1 \sin BI$ ist, ist in Ruhe, da seine Verschiebungen gleich und entgegengesetzt sind. Auch müssen, wenn Ω die um OI vorhandene Winkelgeschwindigkeit ist, die Verschiebungen von B gleich sein, mag die Rotation um OI oder um OA erfolgen. Es ist also $\Omega \sin IB = \omega \sin AB$.

Dies zu bewahrheiten, wollen wir die Bewegung von P betrachten. Verbinden wir P mit I, so ist

$$\frac{\sin API}{\sin BPI} = \frac{\sin PAI}{\sin PBI} \cdot \frac{\sin AI}{\sin BI} = \frac{\sin BP}{\sin AP} \cdot \frac{\omega_1}{\omega},$$

und dies ist das Verhältniss der Verschiebungen von P. Hiernach ist die ganze Verschiebung von P offenbar senkrecht zu PI und das Resultat einer einzigen Rotation um OI. Ihre Grösse ist

$$\begin{aligned} &\omega \sin AP \cdot \frac{\sin APB}{\sin IPB}\delta t \\ &= \omega \sin AP \cdot \frac{\sin APB}{\sin PBI} \cdot \frac{\sin PBI}{\sin IPB}\delta t \\ &= \frac{\omega \sin AB}{\sin IB} \cdot \sin IP \cdot \delta t. \end{aligned}$$

Dies ist genau das Ergebniss, welches eine während der Zeit δt um OI mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \omega \frac{\sin AB}{\sin IB} = \omega_1 \frac{\sin AB}{\sin IA}$$

stattfindende Rotation liefern würde.

Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten. — Die obigen Formeln zeigen, dass, wenn man auf den Axen der Verschiebungscomponenten und der resultirenden Verschiebung Längen abschneidet, welche beziehungsweise den um die Axen vorhandenen Winkelgeschwindigkeiten proportional sind, die so bestimmten Strecken die Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms sein werden.

Im Hinblick auf die gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie empfiehlt es sich, den Gegenstand in folgender Weise zu behandeln. Wie wir sehen werden, gelangen wir dadurch auch zu einem ganz neuen Beweise des Satzes vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten: —

Wenn um die x, y, z Axen beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ vorhanden sind, so betragen die den Axen parallelen Componenten der während der Zeit δt hervorgebrachten Verschiebung des in x, y, z befindlichen Punktes (§§ 87, 89) beziehungsweise

$$(\omega_2 z - \omega_3 y)\,\delta t,\ (\omega_3 x - \omega_1 z)\,\delta t,\ (\omega_1 y - \omega_2 x)\,\delta t.$$

Danach bleiben die Punkte, für welche

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3}$$

ist, in Ruhe; es sind dies somit die Gleichungen der Axe.

Nun lehrt die analytische Geometrie, dass das von einem Punkte x, y, z auf diese Linie gefällte Loth gleich

$$\begin{aligned} &\left[x^2+y^2+z^2-\frac{(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)^2}{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}}\sqrt{(\omega_2 z-\omega_3 y)^2+(\omega_3 x-\omega_1 z)^2+(\omega_1 y-\omega_2 x)^2} \\ &= \frac{\text{Totalverschiebung von } x, y, z}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\,.\,\delta t} \end{aligned}$$

ist. Die wirkliche Verschiebung von x, y, z stimmt daher mit derjenigen überein, welche eine einzige Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ während der Zeit δt um die durch die obigen Gleichungen bestimmte Axe erzeugen würde.

Auf diese Weise lassen sich Rotationen, die um beliebig viele in einem Punkte zusammentreffende Axen gleichzeitig vor sich gehen, mit Leichtigkeit zusammensetzen. Sind l, m, n die Richtungscosinus einer dieser Axen, ω die ihr zugehörige Winkelgeschwindigkeit, und bezeichnen λ, μ, ν, Ω die nämlichen Grössen für die resultirende Axe, so hat man

$$\lambda\Omega = \Sigma(l\omega), \quad \mu\Omega = \Sigma(m\omega), \quad \nu\Omega = \Sigma(n\omega),$$

und

$$\Omega^2 = \Sigma^2(l\omega) + \Sigma^2(m\omega) + \Sigma^2(n\omega).$$

Nach Bestimmung von Ω geben die ersten Gleichungen die Werthe von λ, μ, ν.

96. Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten um Axen, die in einem Punkte zusammentreffen. — Aus dem Vorhergehenden können wir folgende Regel entnehmen, die eine Winkelgeschwindigkeit, welche dreien um drei auf einander senkrechte Axen gleichzeitig vorhandenen Winkelgeschwindigkeiten äquivalent ist, der Grösse nach zu bestimmen und zugleich die Richtung ihrer Axe anzugeben: — Das Quadrat der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ist die Summe der Quadrate der Componenten, und die Verhältnisse der drei Componenten zur Resultante sind die Richtungscosinus der Axe.

Eine um irgend eine Gerade vorhandene Winkelgeschwindigkeit kann danach auch in drei Winkelgeschwindigkeiten um drei beliebige auf einander senkrechte Axen zerlegt werden, und diese Zerlegung wird in jedem Falle (ganz wie bei linearen Geschwindigkeiten) dadurch ausgeführt, dass man mit dem Cosinus des von den betreffenden Richtungen eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

Weiter sehen wir, dass eine Rotation durch eine Gerade dargestellt werden kann, welche die Richtung der Axe hat, und deren Länge der Winkelgeschwindigkeit proportional ist; solche Axen sind dann wie lineare Geschwindigkeiten zusammenzusetzen.

Wie wir ferner in § 31 sahen, dass eine gleichförmige Beschleunigung, welche senkrecht zur Bewegungsrichtung eines Punktes wirkt, zwar eine Aenderung dieser Richtung zur Folge hat, aber ohne Einfluss auf die Geschwindigkeit ist, so erkennen wir hier, dass, wenn ein Körper um eine Axe rotirt und einer Einwirkung unterworfen wird, welche eine Rotation um eine senkrechte Axe zu erzeugen strebt, das Ergebniss darin bestehen wird, dass die Richtung der Rotationsaxe eine andere wird, dass aber die Winkelgeschwindigkeit unverändert dieselbe bleibt.

97. **Zusammensetzung von successiven endlichen Rotationen.** — Wir lassen jetzt einige nützliche Sätze über die Zusammensetzung von successiven endlichen Rotationen folgen.

Wenn eine Pyramide oder ein Kegel von irgend welcher Form auf einer symmetrisch ähnlichen Pyramide (das Bild der ersten Lage der erstern, welches ein ebener Spiegel liefert) ganz herumrollt, so kommt sie offenbar wieder in ihre anfängliche Lage zurück. Dies wird (wie jedes Rollen von Kegeln) am besten dadurch gezeigt, dass man den Durchschnitt eines jeden mit einer Kugeloberfläche nimmt. So sehen wir, dass ein sphärisches Polygon in seine anfängliche Lage zurückgebracht werden wird, wenn es, immer auf der Kugeloberfläche bleibend, der Reihe nach um seine Eckpunkte rotirt, und wenn der Winkel, durch welchen es sich um jeden Punkt dreht, doppelt so gross als das Supplement des Polygonwinkels ist, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn jeder Drehungswinkel in entgegengesetzter Richtung, aber gleich dem Doppelten des Polygonwinkels selbst ist.

Der Polarsatz des obigen (siehe unten § 134) ist folgender: Ein Körper gelangt durch eine Reihe von Rotationen, welche durch die ihrer Aufeinanderfolge nach genommenen doppelten Seiten eines sphärischen Polygons dargestellt werden, wieder in seine anfängliche Lage zurück.

98. Wir theilen noch einen zweiten Satz mit: —

Wenn eine Pyramide über alle ihre Seiten in einer Ebene rollt, so ist ihre in der Ebene zurückgelassene Spur ein ebener Winkel, der gleich der Summe aller ebenen Winkel am Scheitel der Pyramide ist.

Man kann dies auch in folgender Weise ausdrücken: — Ein sphärisches Polygon, welches auf der Kugeloberfläche über alle seine Seiten längs eines grössten Kreises gerollt ist, befindet sich in derselben Lage, als wenn die zuerst längs jenes Kreises liegende Seite längs desselben einfach um einen Bogen verschoben wäre, der gleich der Peripherie des Polygons ist. Der Polarsatz lautet: — Lässt man einen Körper eine Reihe von Rotationen ausführen, welche durch die ihrer Aufeinanderfolge nach genommenen Seiten eines sphärischen Polygons dargestellt werden, so wird seine Lage schliesslich dieselbe sein, als wenn er sich um die durch den ersten Eckpunkt des Polygons gehende Axe, und zwar durch einen Winkel gedreht hätte, der gleich dem sphärischen Excess (§ 134) oder der Fläche des Polygons ist.

99. Bewegung um einen festen Punkt. Rollende Kegel. — Die Untersuchung des § 90 lässt sich auch auf diesen Fall anwenden, und so ist es leicht zu zeigen, dass die allgemeinste Bewegung einer sphärischen Figur auf einer festen Kugeloberfläche dadurch erhalten wird, dass eine in der Figur befestigte Curve auf einer der Kugeloberfläche fest aufliegenden zweiten Curve rollt. Da nun die jeden Augenblick C mit O verbindende Gerade eine Anzahl von Punkten des Körpers enthält, die augenblicklich in Ruhe sind, so sehen wir, dass die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers, von welchem ein Punkt fest ist, darin besteht, dass ein in dem Körper befestigter Kegel auf einem im Raume festliegenden Kegel rollt; die Scheitel beider Kegel liegen in dem festen Punkte.

100. Lage des Körpers nach gegebenen Rotationen. — Zur Vervollständigung unserer kinematischen Untersuchung der Bewegung eines Körpers, von welchem ein Punkt fest ist, wollen wir die folgende Aufgabe lösen: — Aus den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten, welche ein Körper um drei mit ihm verbundene auf einander senkrechte Axen hat, die Lage zu bestimmen, die er nach einer gegebenen Zeit im Raume einnimmt.

Wir beziehen den Körper auf die durch den festen Punkt O gehenden festen Axen OX, OY, OZ, die so gewählt werden, dass sie in einem gegebenen Augenblick mit den an der Bewegung des Körpers theilnehmenden Axen OA, OB, OC zusammengefallen sind. Aus den um OA, OB, OC vorhandenen Winkelgeschwindigkeiten, die gegeben sind, lässt sich (§ 95) für jeden Augenblick die Lage der augenblicklichen Axe OI in Beziehung auf den Körper bestimmen. Wir kennen folglich die im Körper befestigte Kegelfläche, welche auf dem im Raum festliegenden Kegel rollt. Die Data sind auch genügend zur Bestimmung dieses zweiten Kegels, und wenn diese Kegel, sowie die in irgend einem gegebenen Augenblick einander berührenden Theile derselben bekannt sind, so ist die Bewegung vollständig bestimmt.

Wenn OI in Beziehung auf OA, OB, OC die Richtungscosinus λ, μ, ν hat, und wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten sind, deren Resultante ω sein möge, so ist nach § 95

$$\frac{\lambda}{\omega_1} = \frac{\mu}{\omega_2} = \frac{\nu}{\omega_3} \left[= \frac{1}{\omega}\right].$$

Diese zwei Gleichungen enthalten im Allgemeinen die Grösse t, durch deren Elimination wir die Gleichung des im Körper befestigten Kegels erhalten. Was den im Raum festliegenden Kegel betrifft, so sei σ der Krümmungsradius seiner Spur auf der Kugel vom Radius 1, und ϱ

derjenige der Spur des rollenden Kegels: dann sehen wir aus § 95 oder aus § 105, dass, wenn s die Länge des Bogens einer von beiden Spuren ist, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte aus gerechnet werden, man

$$\frac{ds}{\varrho\sigma\,dt} = \frac{\omega}{\sin(\arcsin\varrho + \arcsin\sigma)}$$
$$= \frac{\omega}{\varrho\sqrt{1-\sigma^2} + \sigma\sqrt{1-\varrho^2}}$$

hat. Da s, ϱ und ω bekannte Functionen von t sind, so erhalten wir hieraus σ durch t, oder auch, wenn wir wollen, durch s ausgedrückt, und damit die Gleichung für die Spur des festen Kegels.

Wir können uns noch einer zweiten Methode bedienen, die zwar weniger symmetrisch, aber bei besonderen Aufgaben oft bequemer anzuwenden ist. Wenn z. B. die Lage des Körpers für irgend einen Augenblick durch den Winkel XZC, durch das Supplement von ZCA und durch den Bogen ZC bestimmt ist, welche Grössen sämmtlich auf der Kugel vom Radius 1 gemessen werden, so erhält man durch Anwendung der schon auseinander gesetzten Principien mit Leichtigkeit die Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen der Aenderung dieser Grössen und den Winkelgeschwindigkeiten um die drei Axen darstellen.

Um die Bedeutung dieser Winkelcoordinaten zu verstehen, nehmen wir an, A, B, C fielen anfänglich beziehungsweise mit X, Y, Z zusammen. Darauf möge der Körper um OZ durch den Winkel XZC rotiren. Nachdem dies geschehen ist, rotire er um die neue Lage von OB durch einen dem Bogen ZC gleichen Winkel, und zuletzt um die neue Lage von OC durch einen Winkel, der gleich dem Supplement von ZCA ist. Er wird sich dann in einer Lage befinden, welche durch diese drei Winkel völlig bestimmt ist.

Es sei $\measuredangle XZC = \psi$, $\measuredangle ZCA = \pi - \varphi$, und $ZC = \vartheta$. Betrachten wir dann der Reihe nach die augenblicklichen Bewegungen von C längs und senkrecht zu ZC und die Bewegung von AB in seiner eigenen Ebene, so haben wir

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi,$$

$$\sin\vartheta \frac{d\psi}{dt} = \omega_2 \sin\varphi - \omega_1 \cos\varphi,$$

und

$$\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_3.$$

101. Allgemeine Bewegung eines starren Körpers. — Wir werden jetzt die allgemeinste mögliche Bewegung eines starren Körpers betrachten, von dem kein Punkt fest ist, und müssen zu-

nächst den folgenden Satz beweisen: — In einem starren Körper giebt es eine Ebene, deren Lagen für zwei beliebige Lagen des Körpers einander parallel sind. In diesen Lagen sind dann natürlich auch alle dieser Ebene parallelen Ebenen und die auf ihnen errichteten Senkrechten parallel.

Irgend ein Punkt des Körpers befinde sich bei der ersten und zweiten Lage desselben beziehungsweise in C und C'. Wir bewegen den Körper, ohne ihn rotiren zu lassen, aus der zweiten in eine dritte Lage, in welcher der bei der zweiten Lage in C' befindliche Punkt wieder seine anfängliche Lage C einnimmt. Die frühere Betrachtung zeigt, dass es eine dem Körper in seiner ersten und dritten Lage gemeinschaftliche Gerade CO giebt. Folglich ist eine Linie $C'O'$ des Körpers in seiner zweiten Lage parallel derselben Linie CO in der ersten Lage. Es liegt auf der Hand, dass sich dasselbe von jeder CO parallelen Linie des Körpers sagen lässt, und die zu diesen Geraden senkrechten Ebenen bleiben gleichfalls parallel.

102. Es bezeichne S eine Ebene des Körpers, deren beide Lagen parallel sind. Wir bewegen den Körper aus seiner ersten Lage, ohne ihn rotiren zu lassen, in einer zu S senkrechten Richtung, bis S in die Ebene seiner zweiten Lage gelangt. Damit dann der Körper wirklich in seine zweite Lage gebracht werde, ist weiter eine Bewegung von der Art erforderlich, wie wir sie in § 79 behandelt haben. Eine solche Bewegung kann aber nach § 79, wenn sie nicht gerade zu dem Ausnahmefall einer Parallelverschiebung gehört, durch eine Rotation um eine gewisse zur Ebene S senkrechte Axe ausgeführt werden. Folglich lässt sich (abgesehen von diesem Ausnahmefall) der Körper aus seiner ersten in die zweite Lage dadurch bringen, dass man ihn senkrecht zu einer gegebenen Ebene eine bestimmte Strecke weit verschiebt, und ihn sodann um eine bestimmte zu dieser Ebene senkrechte Axe durch einen bestimmten Winkel rotiren lässt. Dies ist genau die Bewegung einer Schraube in ihrer Mutter.

103. In dem erwähnten Ausnahmefalle besteht die ganze Bewegung aus zwei einfachen Verschiebungen, die sich natürlich in eine einzige zusammensetzen lassen; in diesem Falle ist also überhaupt keine Rotation vorhanden, oder jede Ebene des Körpers genügt der in § 102 an S gestellten Anforderung.

104. Vorrückende Rotation. — Wir kehren jetzt zur Bewegung eines starren Körpers, von welchem ein Punkt fest ist, zu-

rück und betrachten den Fall, in welchem die in § 99 besprochen Kegel beide von kreisförmiger Basis sind. Die Bewegung kann i diesem Falle eine **vorrückende Rotation** genannt werden.

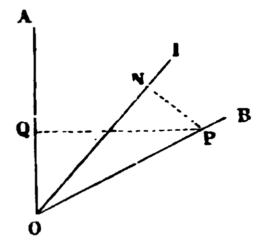
Die durch die augenblickliche Drehungsaxe und die Axe d festen Kegels gelegte Ebene geht durch die Axe des rollend Kegels. Diese Ebene dreht sich um die Axe des festen Kegels m einer Winkelgeschwindigkeit Ω (s. unten § 105), welche offenbar i einem constanten Verhältniss zur Winkelgeschwindigkeit ω steh muss, die der starre Körper um seine augenblickliche Axe besitzt.

105. Die Bewegung der diese Axen enthaltenden Ebene wird i jedem solchen Falle das **Vorrücken** oder die **Präcession** genann Was wir mit Ω bezeichnet haben, ist die Winkelgeschwindigk oder, wie man zuweilen auch sagt, die Grösse des Vorrückens.

Die Winkelgeschwindigkeiten ω, Ω verhalten sich zu einand umgekehrt wie die Abstände eines Punktes in der Axe des rolle den Kegels von der augenblicklichen Drehungsaxe und von der A des festen Kegels.

Es sei nämlich OA die Axe des festen, OB diejenige des ro lenden Kegels und OI die augenblickliche Drehungsaxe. Von i gend einem Punkte P der Axe OB ziehen wir PN senkrecht O und PQ senkrecht OA. Dann bemerk wir, dass sich P beständig in dem Kre bewegt, dessen Mittelpunkt Q, dessen R dius PQ und dessen Ebene senkrecht OA ist. Folglich ist die wirkliche G schwindigkeit des Punktes P gleich $\Omega . Q$ Nach den oben (§ 99) dargelegten Pri cipien ist aber die Geschwindigkeit von die nämliche, wie die eines sich in eine Kreise bewegenden Punktes, dessen Mittelpunkt N, dessen Ebe senkrecht zu ON und dessen Radius NP ist, und da dieser Radi sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, so ist dies gleich $\omega . N$ Wir haben also $\Omega . QP = \omega . NP$, oder

Fig. 28.



$$\omega : \Omega = QP : NP.$$

Es sei α die Hälfte des Winkels am Scheitel des festen Keg und β der entsprechende Winkel des rollenden Kegels. Der Ei fachheit wegen wollen wir jeden dieser Winkel und ebenso ih Summe oder Differenz als spitz voraussetzen, obgleich die so erha tenen Formeln natürlich (wie alle trigonometrischen Resultate) a

den möglichen Fall anwendbar sind. Wir haben dann die drei lgenden Fälle: —

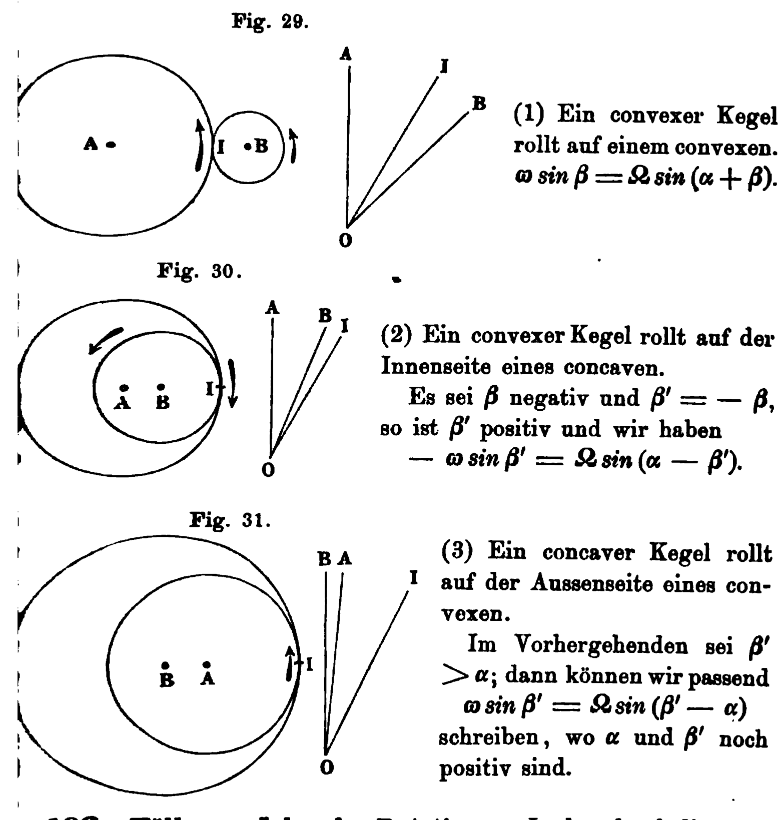


Fig. 29.

(1) Ein convexer Kegel rollt auf einem convexen.
$\omega \sin \beta = \Omega \sin (\alpha + \beta)$.

Fig. 30.

(2) Ein convexer Kegel rollt auf der Innenseite eines concaven.

Es sei β negativ und $\beta' = -\beta$, so ist β' positiv und wir haben
$-\omega \sin \beta' = \Omega \sin (\alpha - \beta')$.

Fig. 31.

(3) Ein concaver Kegel rollt auf der Aussenseite eines convexen.

Im Vorhergehenden sei $\beta' > \alpha$; dann können wir passend
$\omega \sin \beta' = \Omega \sin (\beta' - \alpha)$
schreiben, wo α und β' noch positiv sind.

106. Fälle vorrückender Rotation. — In dem durch die erste ser Figuren (Fig. 29) dargestellten Falle eines convexen Kegels, der einem convexen rollt, erfolgt die vorrückende Bewegung, wenn sie auf der Oberfläche einer Halbkugel betrachtet, welche A zum und O zum Mittelpunkt hat, in einer ähnlichen Richtung wie angulare Rotation um die augenblickliche Axe. Wir werden eine positive vorrückende Rotation nennen. Es ist der Fall es gewöhnlichen Kreisels, der sich auf einer sehr feinen Spitze ht, die in einer Höhlung oder in einem von ihr selbst gebohrten he in Ruhe bleibt, falls der Kreisel nicht still aufrecht steht und h nicht schwankt, sondern seine Axe einen Kegel von verticaler Axe chreiben lässt. Im dritten Falle (Fig. 31) haben wir ebenfalls sitives Vorrücken. Ein gutes Beispiel hierfür ist der Fall eines

auf einem Tische kreisenden Geldstückes, wenn seine Ebene nahezu horizontal ist.

107. Der zweite Fall (Fig. 30), in welchem ein convexer Kegel auf der Innenseite eines concaven rollt, liefert ein Beispiel negativen Vorrückens, da die Richtung der angularen Rotation der augenblicklichen Axe, wenn man sie wie vorher auf der Oberfläche der Halbkugel betrachtet, derjenigen des rollenden Kegels entgegengesetzt ist. Dies ist der Fall einer symmetrischen Schale (oder Rotationsfläche), die auf einen Punkt gestützt und, wenn balancirt, stabil ist, d. h. ihren Schwerpunkt unter dem Zapfen hat, und die, wenn sie geneigt aufgesetzt wird, sich ohne Schwanken dreht. Wenn z. B. ein Troughton'scher Kreisel in einer beliebigen geneigten Lage auf seinen Zapfen gesetzt und dann mit sehr grosser Winkelgeschwindigkeit um die Axe seiner Figur abgedreht wird, so wird das Schwanken unmerklich sein, aber ein langsames Vorrücken erfolgen.

Zu diesem Falle gehört auch das Vorrücken der Erdaxe, für welche der Winkel $\alpha = 23^0\ 27'\ 28''$, während $\beta = 0{,}00867''$ ist. Oder wenn die Fig. 30 einen Theil der Erdoberfläche um den Pol herum darstellt, so ist der Bogen $AI = 8{,}552{,}000$ Fuss, folglich der Umfang des Kreises, in welchem sich I bewegt, $= 52{,}240{,}000$ Fuss und $BI = 0{,}88$ Fuss. Die Periode der Rotation ω ist der Sterntag, diejenige von Ω 25,868 Jahre.

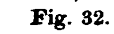
108. Sehr interessante Beispiele der Fälle (1) und (3) liefern uns Projectile verschiedener Formen, welche um irgend eine Axe rotiren. So gehören die Umdrehungen eines in die Luft geschleuderten ovalen Körpers oder eines Stabes oder einer Stange zur Classe (1) (der Körper hat zwei Axen von gleichem Trägheitsmoment, deren jedes grösser als dasjenige für die dritte Axe ist). Die scheinbar unregelmässigen Schwankungen einer schlecht geworfenen Wurfscheibe gehören zur dritten Classe (für zwei Axen der Scheibe sind die Trägheitsmomente gleich, und jedes ist kleiner als das Trägheitsmoment für die dritte Axe).

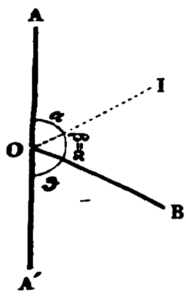
109. Mittheilung einer gleichen Winkelgeschwindigkeit an Körper, die um geneigte Axen rotiren. — Hooke's Schlüssel, Universalgelenk. — In verschiedenen Erläuterungen und Anordnungen von Apparaten, die in der theoretischen Physik sowie in der Mechanik von Nutzen sind, ist es erforderlich, zwei Körper so zu verbinden, dass, wenn der eine sich um eine gewisse Axe dreht, der andere sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um eine andere Axe drehe, die mit der ersteren in derselben Ebene liegt, aber irgend

eine Neigung gegen sie hat. Dies wird in der Praxis mittels gleicher und ähnlicher Kegelräder oder rollender Kegel bewerkstelligt, wenn die gegenseitige Neigung der beiden Axen gegeben ist. Es wird annähernd erfüllt durch Hooke's Schlüssel, wenn die beiden Axen nahezu dieselbe Richtung haben, aber ihre gegenseitige Neigung frei sollen ändern können. Eine Kette von unendlich vielen solchen Hooke'schen Schlüsseln können wir uns als eine vollkommen biegsame aufdrehbare Schnur vorstellen, welche, wenn ihre Endglieder an den beiden Körpern starr befestigt sind, dieselben so verbindet, dass die oben gestellte Bedingung in aller Strenge und ohne die Beschränkung erfüllt ist, dass die Axen in einer Ebene bleiben. Denken wir uns einen unendlich kleinen Theil einer solchen Kette (der aber noch eine unendlich grosse Anzahl von Gliedern enthält) mit seinen Enden an den Körpern befestigt, so wird derselbe der aufgestellten Bedingung streng genügen und zugleich einen bestimmten Punkt des einen einem bestimmten Punkte des andern Körpers unendlich nahe halten, d. h. derselbe erfüllt für jeden Neigungswinkel dasselbe, was Hooke's Schlüssel näherungsweise für kleine Neigungen leistet.

Dasselbe wird mit voller Genauigkeit für jeden Winkel durch einen kurzen, an sich geraden elastischen Draht von genau kreisförmigem Schnitt erreicht, vorausgesetzt dass die Kräfte, welche irgend einen Widerstand gegen die Gleichheit der Winkelgeschwindigkeit zwischen den beiden Körpern veranlassen, unendlich klein sind. Diese Art der Verbindung ist in vielen praktischen Fällen von Nutzen und gestattet nur eine geringe Abweichung von den Bedingungen eines wahrhaften Universalgelenkes. Sie wird z. B. mit vollständigem Erfolge bei der Aufhängung eines gyroskopischen Pendels (§ 74) angewandt.

Es seien zwei Körper durch ein Universalgelenk mit einander verbunden, und es werde einer derselben festgehalten. So lange der Neigungswinkel der Axen constant bleibt, wird die Bewegung des andern Körpers genau die oben im § 105, Fig. 29, abgebildete sein, wenn darin die Winkel α und β als gleich angenommen werden. Das Supplement des Winkels AOB ist die gegenseitige Neigung der Axen, und der Winkel AOB selbst wird durch die augenblickliche Axe des in Bewegung befindlichen Körpers halbirt. Die beigefügte Figur zeigt einen Fall dieser Bewegung, in wel-


Fig. 32.



chem die gegenseitige Neigung ϑ der Axen ein spitzer Winkel ist. Nach den Formeln des § 105, Fall (1), haben wir

$$\omega \sin \alpha = \Omega \sin 2\alpha,$$

oder

$$\omega = 2\Omega \cos \alpha = 2\Omega \sin \frac{\vartheta}{2},$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit des in Bewegung befindlichen Körpers um seine augenblickliche Axe OI und Ω die Winkelgeschwindigkeit seiner Präcession, d. h. die Winkelgeschwindigkeit der Ebene ist, welche durch die feste Axe AA' und die freie Axe OB des bewegten Körpers geht.

Ausser dieser Bewegung kann der Körper offenbar noch eine beliebige Winkelgeschwindigkeit um eine durch O gehende zur Ebene AOB senkrechte Axe haben, welche, mit der um OI vorhandenen Winkelgeschwindigkeit ω vereinigt, die resultirende Winkelgeschwindigkeit und die augenblickliche Axe liefert.

In diesem Falle reichen offenbar zwei Coordinaten $\vartheta = A'OB$ und φ, welcher Winkel in einer zu AO senkrechten Ebene von einer festen Ebene aus bis zur Ebene AOB gemessen wird, vollkommen hin, um die Lage des beweglichen Körpers anzugeben.

110. Allgemeine Bewegung eines starren Körpers, der einen andern berührt. Gleiten, Rollen, Kreiseln. — Wir nehmen an, ein von irgend einer krummen Oberfläche begrenzter starrer Körper werde in irgend einem Punkte von einem zweiten solchen Körper berührt. Jede Bewegung des einen dieser Körper auf dem andern muss ein Gleiten, oder ein Rollen, oder ein Kreiseln, oder eine Verbindung dieser Bewegungsformen sein. Die Betrachtung des Gleitens ist so einfach, dass wir nicht nöthig haben, darauf einzugehen.

Jede Bewegung, in welcher der Berührungspunkt keine Geschwindigkeit hat, muss ein Rollen oder ein Kreiseln oder eine Verbindung dieser beiden Bewegungsarten sein.

Es möge einer der beiden Körper, während der zweite fest liegt, successive um eine Anzahl augenblicklicher Axen rotiren, welche sämmtlich durch den augenblicklichen Berührungspunkt gehen und in der durch diesen Punkt gelegten beiden Körpern gemeinschaftlichen Tangentialebene liegen. Diese Bewegung nennen wir ein Rollen oder ein einfaches Rollen des beweglichen Körpers auf dem festliegenden.

Wenn andererseits die augenblickliche Axe des in Bewegung

befindlichen Körpers die in dem Berührungspunkte errichtete beiden Körpern gemeinschaftliche Normale ist, so haben wir es mit einem reinen Kreiseln zu thun, und dabei bleibt der Berührungspunkt unverändert derselbe.

Wenn sich der eine Körper so bewegt, dass die augenblickliche Axe zwar noch durch den Berührungspunkt geht, aber weder in der Tangentialebene liegt, noch senkrecht zu dieser Ebene steht, so haben wir weder ein Rollen noch ein Kreiseln, sondern eine aus beiden Arten zusammengesetzte Bewegung.

Wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und α die Neigung der augenblicklichen Axe gegen die Normale ist, so sind $\omega \sin \alpha$ und $\omega \cos \alpha$ beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten des Rollens und des Kreiselns.

111. Wenn ein Körper auf einem andern rollt und kreiselt, so ist die Spur eines jeden auf dem andern die krumme oder gerade Linie, längs welcher er successive berührt wurde. Liegt die augenblickliche Axe in einer zu den Spuren normalen Ebene, so wird das Rollen ein directes genannt. Ein Rollen, welches nicht direct ist, kann in ein directes Rollen und eine Rotation um die Tangente an die Spuren zerlegt werden. Denken wir uns die Spuren aus starrer Masse construirt und alle übrigen Theile jedes Körpers entfernt, so können wir die frühere Bewegung mit diesen Curven allein wiederholen. Der Unterschied der jetzt vorausgesetzten Umstände wird sich nur zeigen, wenn wir die Richtung der augenblicklichen Axe sich ändern lassen. Wenn wir dies im früheren Falle thun, so machen wir die Bewegung zu einer mehr oder weniger kreiselnden und ändern die Spur auf jedem Körper; im letzteren Falle haben wir stets dieselbe bewegliche Curve, welche auf derselben festliegenden Curve rollt, und dazu eine mit einer ganz beliebigen Geschwindigkeit erfolgende Drehung um die gemeinschaftliche Tangente. Die Betrachtung des zweiten Falles ist rücksichtlich des allgemeinen Problems äusserst lehrreich.

112. Man kann die in Rede stehende Bewegung praktisch roh darstellen durch zwei steife Drähte, die man so gebogen hat, dass sie die Form der gegebenen Curven haben, und die durch ein sie zusammenhaltendes kleines Stück einer Gummiröhre verhindert werden, sich zu kreuzen.

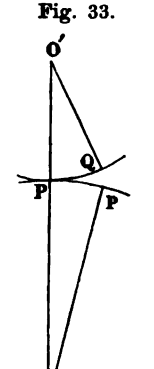
Zunächst seien beide Curven eben, und ihre Ebenen mögen beständig zusammenfallen. Wir haben dann ein reines Rollen, wie wenn ein Cylinder auf einem andern rollte.

Ist ϱ der Krümmungsradius des rollenden, σ derjenige des festen Cylinders, ω die Winkelgeschwindigkeit des ersteren und V die lineare Geschwindigkeit des Berührungspunktes, so haben wir

$$\omega = \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\sigma}\right) V.$$

Dies zu beweisen, nehmen wir an, P (Fig. 33) sei der Berührungspunkt zu irgend einer Zeit t und Q, p die Punkte, welche nach Ablauf des Zeitraumes dt aufeinander liegen werden; ferner seien O, O' die Krümmungsmittelpunkte und $\measuredangle\, POp = \vartheta$, $\measuredangle\, PO'Q = \varphi$.

Fig. 33.



Dann ist $PQ = Pp =$ dem vom Berührungspunkt durchlaufenen Wege, oder mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen

$$\varrho\varphi = \sigma\vartheta = V dt.$$

Ausserdem muss $O'Q$, ehe seine Richtung mit derjenigen von Op zusammenfallen kann, sich offenbar durch einen Winkel $\vartheta + \varphi$ drehen.

Es ist daher $\omega dt = \vartheta + \varphi$. Werden jetzt ϑ und φ eliminirt, so erhält man nach Division durch dt das oben angegebene Resultat.

Wir haben hier, wo beide Oberflächen convex sind, die Krümmungsradien als positiv angesehen. Man hat aber jedem der beiden Krümmungsradien das negative Zeichen beizulegen, wenn die entsprechende Curve concav ist.

In dem betrachteten Falle ist also die Winkelgeschwindigkeit der rollenden Curve gleich dem Product aus der linearen Geschwindigkeit des Berührungspunktes in die Summe oder Differenz der Krümmungen; die Summe der Krümmungen ist zu nehmen, wenn beide Curven convex sind, die Differenz, wenn die eine Curve convex, die andere concav ist.

113. Wenn beide Curven eben sind, aber in verschiedenen Ebenen liegen, so theilt die Ebene, in der das Rollen stattfindet, den Winkel zwischen der Ebene der einen Curve und der durch die gemeinschaftliche Tangente hindurch verlängerten Ebene der andern Curve in Theile, deren Sinus sich umgekehrt wie die respectiven Krümmungen verhalten, und die Winkelgeschwindigkeit ist gleich dem Product aus der linearen Geschwindigkeit des Berührungspunktes in die Differenz der Projectionen der beiden Krümmungen auf diese Ebene.

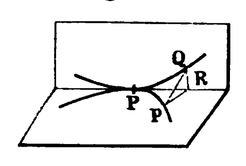
Denn es seien PQ, Pp wie früher gleiche Bogen der Curven und PR eine jedem derselben gleiche Strecke der gemeinschaftlichen Tangente (d. i. des Durchschnitts der Ebenen der Curven). Dann sind QR, pR im Grenzfall senkrecht zu PR, folglich

$$pR = \frac{\overline{PR}^2}{2\sigma},$$

$$QR = \frac{\overline{PR}^2}{2\varrho}.$$

Auch ist QRp gleich dem Winkel α zwischen den Ebenen der Curven, und wir haben

Fig. 34.



$$\overline{Qp}^2 = \frac{\overline{PR}^4}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2}{\sigma\varrho}\cos\alpha\right).$$

Demnach ist, wenn ω wieder die Rotationsgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\omega = V\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2\cos\alpha}{\sigma\varrho}}.$$

Auch ist offenbar die augenblickliche Axe senkrecht, also die Rotationsebene parallel zu Qp. Damit sind die obigen Bemerkungen bewiesen. Im Falle $\alpha = \pi$ stimmt dies mit dem Resultat des § 112 überein.

Ein gutes Beispiel hierfür ist der Fall eines Geldstückes, das auf einem Tische kreiselt (eine aus einem Rollen und einem Kreiseln zusammengesetzte Bewegung), indem seine Ebene nach und nach horizontal wird. In diesem Falle werden die Krümmungen immer mehr einander gleich, und der Winkel zwischen den Curvenebenen wird immer kleiner und kleiner. Auf diese Weise wird die resultirende Winkelgeschwindigkeit ausserordentlich klein und die Bewegung des Berührungspunktes vergleichsweise sehr gross.

114. Die vorstehenden Resultate lassen sich natürlich ebensowohl auf gewundene, wie auf ebene Curven anwenden; nur hat man für die Ebene der letzteren die osculatorische Ebene der ersteren zu substituiren.

115. Wir kommen jetzt zu dem Falle einer Curve, die mit oder ohne Kreiseln auf einer Oberfläche rollt.

Sie kann natürlich auf irgend einer auf der Oberfläche gezogenen Curve rollen. Wenn diese Curve gegeben ist, so kann sich die rollende Curve, während sie jene entlang rollt, nach Belieben um die Tangente drehen; aber die zur gemeinschaftlichen Tangente senkrechte Componente der augenblicklichen Axe, d. i. die Axe des directen Rollens der einen Curve auf der andern, ist bestimmt (§ 113). Wenn diese Axe nicht in der Oberfläche liegt, so ist eine kreiselnde Bewegung vorhanden. Wenn also die Spur auf der Oberfläche gegeben ist, so giebt es zwei unabhängig Veränderliche in der Bewegung: der vom Berührungspunkt durchlaufene Weg und die in jenem Punkte um die Tangente vorhandene Winkelgeschwindigkeit.

116. Wenn die Spur gegeben und zugleich die Bedingung vorgeschrieben ist, dass kein Kreiseln stattfinden soll, so ist die angulare Lage der rollenden Curve in Beziehung auf die im Berührungspunkt errichtete Tangente bestimmt. Denn in diesem Falle muss die augenblickliche Axe in der Tangentialebene der Oberfläche liegen. Zerlegen wir also die Rotation in Componenten, die beziehungsweise um die Tangente und um eine zur Tangente senkrechte Axe erfolgen, so muss diese letztere Axe in der Tangentialebene liegen. Auf diese Weise muss das Rollen, wie im Falle zweier Curven, in einer zur Oberfläche normalen Ebene stattfinden, und deshalb muss die gegebene Curve beim Beginn der Bewegung so an ihre Spur auf der Oberfläche angelegt werden, dass die Projectionen beider Curven auf die Tangentialebene von gleicher Krümmung sind.

Während die Curve weiter rollt, muss sie sich beständig um die durch ihren Berührungspunkt mit der Oberfläche gelegte Tangente drehen, so dass diese Bedingung in jeder Lage erfüllt wird.

Es bezeichne α den Winkel, welchen die Krümmungsebene der Spur mit der Normalen an die Oberfläche in irgend einem Punkte bildet; der entsprechende Winkel zwischen dieser Normalen und der Ebene der rollenden Curve sei α'; die Krümmungen seien $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\varrho'}$. Wir nehmen α als stumpf und α' als spitz an, wenn die beiden Curven auf entgegengesetzten Seiten der Tangentialebene liegen. Es ist dann

$$\frac{1}{\varrho'} \sin \alpha' = \frac{1}{\varrho} \sin \alpha,$$

und dadurch wird α' oder die Lage der rollenden Curve fixirt, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Es sei nun ω die Winkelgeschwindigkeit des Rollens um eine zur Tangente senkrechte Axe, ω' die um die Tangente vorhandene Winkelgeschwindigkeit, und V die lineare Geschwindigkeit des Berührungspunktes. Da $\frac{1}{\varrho'} \cos \alpha'$ und $-\frac{1}{\varrho} \cos \alpha$ (jeder dieser beiden Ausdrücke ist positiv, wenn die Curven auf entgegengesetzten Seiten der Tangentialebene liegen) die Projectionen der beiden Krümmungen auf eine Ebene sind, welche durch die an die Oberfläche gezogene Normale hindurchgeht und ihre gemeinschaftliche Tangente enthält, so haben wir nach § 112

$$\omega = V\left(\frac{1}{\varrho'} \cos \alpha' - \frac{1}{\varrho} \cos \alpha\right),$$

wo α' durch die vorhergehende Gleichung bestimmt ist. Die Grösse der Windung der Spur und der rollenden Curve bezeichnen wir beziehungsweise mit τ und τ'. Dann sehen wir Folgendes: — Wären erstens beide Curven eben, so könnte ein Rollen der einen auf der andern um eine zu ihrer gemeinschaftlichen Tangente stets senkrechte Axe nie die Neigung

ihrer Ebenen ändern. Wenn also zweitens beide Curven gewunden sind so wird ein solches Rollen die Neigung ihrer osculatorischen Ebenen um einen unendlich kleinen Betrag $(\tau - \tau')\,ds$ ändern, während der Berührungspunkt in Folge des Rollens über einen Bogen ds geschoben wird. Nun ist, wenn die Spur gegeben ist, α und folglich auch α' eine bekannte Function von s, und da $\alpha - \alpha'$ die Neigung der osculatorischen Ebenen ist, so hat man

$$V\left\{\frac{d(\alpha-\alpha')}{ds} - (\tau - \tau')\right\} = \omega'.$$

117. Wir wenden uns jetzt zum Rollen und Kreiseln einer Oberfläche auf einer andern Oberfläche. Wenn zunächst die Spur auf jeder Fläche gegeben ist, so haben wir den Fall des § 113 oder § 115, nämlich das Rollen einer Curve auf einer andern Curve, nur mit der weitern Bedingung, dass die erstere sich um die Tangente an beide Curven drehen muss, dergestalt dass die Tangentialebenen der beiden Flächen beständig zusammenfallen.

Es ist wohl zu beachten, dass, wenn die Berührungspunkte und die beiden Spuren gegeben sind, die Lage der beweglichen Oberfläche völlig bestimmt ist. Sie wird auf folgende Weise gefunden: Man bringe die bewegliche Oberfläche mit der festliegenden in Berührung, so dass die gegebenen Punkte auf einander zu liegen kommen, und drehe sie so lange um die gemeinschaftliche Normale, bis die Tangenten der Spuren zusammenfallen.

Daraus geht hervor, dass, wenn beide Spuren gegeben sind, die Bedingung, es solle kein Kreiseln stattfinden, nicht gestellt werden kann. Während des Rollens muss im Allgemeinen ein Kreiseln erfolgen, damit die Tangenten an die beiden Spuren immer auf einander liegen bleiben. Auch muss sich die augenblickliche Axe des Rollens so ändern, dass sie nicht nur das Rollen längs der Spur, sondern auch diejenige drehende Bewegung um die Tangente liefert, die erforderlich ist, damit die Tangentialebenen beständig zur Deckung gebracht werden.

In diesem Falle giebt es also nur eine unabhängig Veränderliche, den vom Berührungspunkte zurückgelegten Weg, und wenn die Geschwindigkeit des Berührungspunktes gegeben ist, so sind die resultirende Winkelgeschwindigkeit und die Richtung der augenblicklichen Axe des rollenden Körpers bestimmt. Wir haben so eine hinlänglich deutliche Vorstellung von dem allgemeinen Charakter der in Rede stehenden Bewegung. Wir wollen jedoch etwas näher auf dieselbe eingehen, da wir dadurch naturgemäss zu einer wichtigen Frage geführt werden, zur Messung der Drillung (oder Torsion)

eines Stabes, eines Drahtes, einer schmalen Platte, eine Grösse, die von der Windung der Axe des Körpers (§ 7) völlig verschieden ist.

118. Angenommen, alle Theile jeder Oberfläche seien entfernt bis auf einen unendlich schmalen Streifen, der die Spur des Rollens enthält. Dann haben wir ein Rollen des einen dieser Streifen auf dem andern, und jeder Streifen besitzt in jedem Punkte eine bestimmte Krümmung, Windung und Drillung.

119. Drillung. — Wir nehmen an, ein flacher Stab von kleinem Durchschnitt sei so gebogen (die dazu erforderliche Ausdehnung und Zusammenziehung seiner Ränder als zulässig angesehen), dass seine Axe die Form irgend einer ebenen oder gewundenen Curve besitzt. Wenn derselbe ohne Drillung zurückgebogen wird, d. h. wenn die Krümmung jedes Elementes des Stabes dadurch entfernt wird, dass man es durch den erforderlichen Winkel in der osculatorischen Ebene biegt, und es ergiebt sich, dass der auf diese Weise gerade gemachte Stab ungedrillt ist, so hatte er auch keine Drillung in seiner ursprünglichen Form. Dieser Fall ist natürlich in der allgemeinen Theorie der Drillung enthalten, welche den Gegenstand der folgenden Paragraphen ausmacht.

120. Es sei ein gebogener oder gerader Stab von kreisförmigem oder einem beliebigen anders geformten Durchschnitt gegeben. Eine durch die Mittelpunkte oder irgend welche sonst gewählten Punkte seiner Durchschnitte gehende Linie soll seine Axe heissen. Wir merken uns eine auf der Seite des Stabes seiner ganzen Länge nach gezogene Linie von der Beschaffenheit, dass sie eine der Axe parallele Gerade ist, wenn der Stab ungebogen und ungedrillt ist. Eine von irgend einem Punkte der Axe auf diese Seitenlinie gezogene Senkrechte heisst die Querlinie des Stabes in diesem Punkte.

Die Gesammtdrillung einer beliebigen Länge eines geraden Stabes ist der Winkel zwischen den Querlinien der Endpunkte dieser Länge. Die mittlere Drillung ist die Gesammtdrillung, dividirt durch die Länge. Die Drillung in einem Punkte ist die mittlere Drillung in einer durch diesen Punkt gehenden unendlich kleinen Länge; mit anderen Worten, sie ist die Grösse der Rotation seiner Querlinie, genommen für Einheit der Länge.

Die Drillung eines ebenen oder gewundenen krummen Stabes in einem Punkte ist die für die Längeneinheit genommene Grösse der Rotation seiner Querlinie um seine Tangente.

Wenn t die Drillung in irgend einem Punkte ist, so ist $\int t\,ds$ die Gesammtdrillung in der Länge, über welche sich die Integration erstreckt.

121. Die Gesammtdrillung in einem krummen Stabe lässt sich zwar, wie oben geschehen ist, mittels der Integralrechnung ohne Mühe definiren; sie kann aber nicht als der Winkel zwischen zwei ohne Weiteres construirbaren Geraden vorgestellt werden. Die folgenden Betrachtungen zeigen, wie dieselbe zu rechnen ist, und führen zu einer geometrischen Construction, welche sie für einen irgendwie gebogenen und gedrehten Stab in einer sphärischen Figur darstellt: —

122. Schätzung der Gesammtdrillung. — Wenn die Axe des Stabes eine in einer Ebene liegende ebene Curve bildet, so ist die Gesammtdrillung offenbar die Differenz zwischen den Neigungen der Querlinien ihrer Endpunkte gegen ihre Ebene. Denn wenn man den Stab einfach zurückbiegt, ohne die Drillung in irgend einem Theile zu ändern, so wird die Neigung jeder Querlinie zur Ebene, in welcher seine Krümmung lag, unverändert bleiben, und da die Axe des Stabes jetzt eine in dieser Ebene liegende gerade Linie geworden ist, so ist die gegenseitige Neigung der Querlinien irgend zweier seiner Punkte gleich der Differenz ihrer Neigungen gegen die Ebene geworden.

123. Von dieser Regel kann keine einfache Anwendung auf eine gewundene Curve gemacht werden, da die Krümmungsebene derselben von Punkt zu Punkt eine andere wird. Statt dessen können wir in folgender Weise verfahren: —

Erstens wollen wir voraussetzen, dass die Krümmungsebene der Axe des Stabes durch endliche Theile der Curve hindurch constant bleibe und zwischen jedem solchen Theile und dem nächstfolgenden sich plötzlich um einen endlichen Winkel ändere (eine Voraussetzung, die keine Eckpunkte, d. h. keine unendliche Krümmung in der Curve bedingt). Zu den Krümmungsebenen dreier auf einander folgenden Theile PQ, QR, RS (die in der Figur nicht gezeichnet sind) denken wir uns Parallelebenen gelegt, welche eine mit dem Radius 1 beschriebene Kugelfläche in den grössten Kreisen GAG', ACA', CE schneiden; dann werden die Radien der Kugel, welche den in den Punkten Q und R, wo die Krümmungsebene eine Aenderung erleidet, an die Curve gelegten Tangenten parallel sind, die Kugeloberfläche natürlich in den Durchschnittspunkten A, C dieser grössten Kreise schneiden. Es

Fig. 35.

sei G der Punkt, in welchem der Kugelradius, welcher der in P gezogenen Tangente parallel ist, die Oberfläche schneidet; ferner seien GH, AB, CD Parallellinien zu den Querlinien des Stabes, die von den Punkten P, Q, R seiner Axe ausgehen. Dann ist (§ 122) die Drillung von P bis Q gleich der Differenz der Winkel HGA und BAG', und die Drillung von Q bis R gleich der Differenz zwischen BAC und DCA'. Die Gesammtdrillung von P bis R ist folglich gleich

$$HGA - BAG' + BAC - DCA',$$

oder, was dasselbe ist, gleich

$$A'CE + G'AC - (DCE - HGA).$$

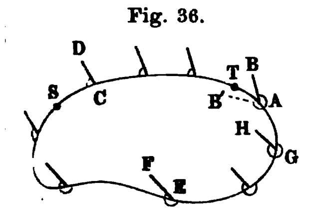
Durch Ausdehnung dieser Betrachtung über eine beliebige Länge des Stabes, die aus Theilen zusammengesetzt ist, deren Krümmungen in verschiedenen Ebenen liegen, folgern wir, dass die gesammte Drillung zwischen irgend zwei Punkten erhalten wird, wenn man von der Summe der Aussenwinkel der sphärischen Figur den Ueberschuss der Neigung der Querlinie des zweiten Punktes gegen die Krümmungsebene des zweiten Punktes über die Neigung der Querlinie des ersteren Punktes gegen die Krümmungsebene dieses Punktes subtrahirt. Die Summe jener Aussenwinkel wird unten als „die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche" von einer Seite des Polygons grösster Kreise zur andern definirt, und wenn das Polygon geschlossen ist und die Summe alle seine Aussenwinkel umfasst, so ist sie (§ 134) gleich 2π, weniger der eingeschlossenen Fläche. Unsere Construction behält ihre Gültigkeit offenbar auch im Grenzfall, wenn die Längen der in ein und derselben Ebene liegenden Curventheile unendlich klein sind. Sie ist daher auch für einen Draht anwendbar, der eine gewundene Curve mit stetig wechselnder Krümmungsebene bildet, und liefert für diesen Fall das folgende Resultat: —

Denkt man sich die Axe des Stabes von einem Punkte mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen und parallel zu der Bewegungsrichtung, die er in jedem Augenblick hat, d. h. parallel zu jeder Tangente der Axe in der Kugel vom Radius 1 einen Radius gezogen, so schneiden diese Radien die Kugeloberfläche in einer Curve (dem Hodographen des die Axe durchlaufenden Punktes). Von den Punkten dieser Curve ziehen wir Parallelen zu den Querlinien der entsprechenden Punkte des Stabes. Der Ueberschuss der Richtungsänderung (§ 135) von irgend einem Punkte des Hodographen zu einem andern Punkte desselben

über die Zunahme seiner Neigung gegen die Querlinie ist gleich der Drillung in dem entsprechenden Theile des Stabes.

Die Fig. 36 erläutert diese Regel. Sie zeigt den Hodographen und die Parallelen zu den Querlinien. So z. B. ist der Ueberschuss der Richtungsänderung in der Kugeloberfläche längs des Hodographen von A bis C über die Differenz DCS — BAT gleich der Drillung in dem Theil des Stabes, dessen Endpunkte A und C entsprechen. Oder wenn wir einen irgendwo beginnenden Theil des Stabes betrachten, der bis zu einem Punkte reicht, für welchen die an die Axe gelegte Tangente der dem Anfangspunkt zugehörigen Tangente parallel ist, so wird der sphärische Hodograph eine geschlossene Curve sein, und wenn A der dem Anfangspunkt und Endpunkt des Stabtheils entsprechende Hodographenpunkt ist und AB, AB' die den Querlinien parallelen Geraden sind, so wird die ganze Drillung in dem betrachteten Stabtheile gleich der Richtungsänderung um den ganzen Hodographen herum, weniger den Ueberschuss des Aussenwinkels $B'AT$ über den Winkel BAT sein, d. h. die ganze Drillung ist gleich dem Ueberschuss des Winkels BAB' über die vom Hodographen eingeschlossene Fläche.

Fig. 36.



Die im Vorhergehenden entwickelten Principien der Drillung sind von grösster Wichtigkeit in der Theorie der Tauebereitung, namentlich der Construction und Dynamik von Drahtseilen und untersecischen Tauen, sowie in der Theorie der elastischen Stäbe und der Spiralfedern.

124. Rollen einer Oberfläche auf einer andern, wenn beide Spuren gegeben sind. — Wir kehren jetzt zur Bewegung einer Oberfläche zurück, die auf einer anderen Oberfläche rollt und kreiselt; die Spur auf jeder Oberfläche sei gegeben. Wir können die Krümmung (§ 6), die Windung (§ 7) und die nach den Querlinien in der Tangentialebene der Oberfläche gerechnete Drillung einer jeden als bekannt ansehen, und dann ist der Gegenstand oben (§ 117) vollständig behandelt.

Es seien $\frac{1}{\varrho'}$ und $\frac{1}{\varrho}$ beziehungsweise die Krümmungen der Spuren auf der rollenden und der festen Oberfläche, α' und α die wie in § 116 gerechneten Neigungswinkel ihrer Krümmungsebenen gegen die Normale zur Tangentialebene, τ' und τ ihre Windungen, t' und t ihre Drillungen

chem die gegenseitige Neigung ϑ der Axen ein spitzer Winkel ist. Nach den Formeln des § 105, Fall (1), haben wir

$$\omega \sin \alpha = \Omega \sin 2\alpha,$$

oder

$$\omega = 2\Omega \cos \alpha = 2\Omega \sin \frac{\vartheta}{2},$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit des in Bewegung befindlichen Körpers um seine augenblickliche Axe OI und Ω die Winkelgeschwindigkeit seiner Präcession, d. h. die Winkelgeschwindigkeit der Ebene ist, welche durch die feste Axe AA' und die freie Axe OB des bewegten Körpers geht.

Ausser dieser Bewegung kann der Körper offenbar noch eine beliebige Winkelgeschwindigkeit um eine durch O gehende zur Ebene AOB senkrechte Axe haben, welche, mit der um OI vorhandenen Winkelgeschwindigkeit ω vereinigt, die resultirende Winkelgeschwindigkeit und die augenblickliche Axe liefert.

In diesem Falle reichen offenbar zwei Coordinaten $\vartheta = A'OB$ und φ, welcher Winkel in einer zu AO senkrechten Ebene von einer festen Ebene aus bis zur Ebene AOB gemessen wird, vollkommen hin, um die Lage des beweglichen Körpers anzugeben.

110. Allgemeine Bewegung eines starren Körpers, der einen andern berührt. Gleiten, Rollen, Kreiseln. — Wir nehmen an, ein von irgend einer krummen Oberfläche begrenzter starrer Körper werde in irgend einem Punkte von einem zweiten solchen Körper berührt. Jede Bewegung des einen dieser Körper auf dem andern muss ein Gleiten, oder ein Rollen, oder ein Kreiseln, oder eine Verbindung dieser Bewegungsformen sein. Die Betrachtung des Gleitens ist so einfach, dass wir nicht nöthig haben, darauf einzugehen.

Jede Bewegung, in welcher der Berührungspunkt keine Geschwindigkeit hat, muss ein Rollen oder ein Kreiseln oder eine Verbindung dieser beiden Bewegungsarten sein.

Es möge einer der beiden Körper, während der zweite fest liegt, successive um eine Anzahl augenblicklicher Axen rotiren, welche sämmtlich durch den augenblicklichen Berührungspunkt gehen und in der durch diesen Punkt gelegten beiden Körpern gemeinschaftlichen Tangentialebene liegen. Diese Bewegung nennen wir ein Rollen oder ein einfaches Rollen des beweglichen Körpers auf dem festliegenden.

Wenn andererseits die augenblickliche Axe des in Bewegung

befindlichen Körpers die in dem Berührungspunkte errichtete beiden Körpern gemeinschaftliche Normale ist, so haben wir es mit einem reinen Kreiseln zu thun, und dabei bleibt der Berührungspunkt unverändert derselbe.

Wenn sich der eine Körper so bewegt, dass die augenblickliche Axe zwar noch durch den Berührungspunkt geht, aber weder in der Tangentialebene liegt, noch senkrecht zu dieser Ebene steht, so haben wir weder ein Rollen noch ein Kreiseln, sondern eine aus beiden Arten zusammengesetzte Bewegung.

Wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und α die Neigung der augenblicklichen Axe gegen die Normale ist, so sind $\omega \sin \alpha$ und $\omega \cos \alpha$ beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten des Rollens und des Kreiselns.

111. Wenn ein Körper auf einem andern rollt und kreiselt, so ist die Spur eines jeden auf dem andern die krumme oder gerade Linie, längs welcher er successive berührt wurde. Liegt die augenblickliche Axe in einer zu den Spuren normalen Ebene, so wird das Rollen ein directes genannt. Ein Rollen, welches nicht direct ist, kann in ein directes Rollen und eine Rotation um die Tangente an die Spuren zerlegt werden. Denken wir uns die Spuren aus starrer Masse construirt und alle übrigen Theile jedes Körpers entfernt, so können wir die frühere Bewegung mit diesen Curven allein wiederholen. Der Unterschied der jetzt vorausgesetzten Umstände wird sich nur zeigen, wenn wir die Richtung der augenblicklichen Axe sich ändern lassen. Wenn wir dies im früheren Falle thun, so machen wir die Bewegung zu einer mehr oder weniger kreiselnden und ändern die Spur auf jedem Körper; im letzteren Falle haben wir stets dieselbe bewegliche Curve, welche auf derselben festliegenden Curve rollt, und dazu eine mit einer ganz beliebigen Geschwindigkeit erfolgende Drehung um die gemeinschaftliche Tangente. Die Betrachtung des zweiten Falles ist rücksichtlich des allgemeinen Problems äusserst lehrreich.

112. Man kann die in Rede stehende Bewegung praktisch roh darstellen durch zwei steife Drähte, die man so gebogen hat, dass sie die Form der gegebenen Curven haben, und die durch ein sie zusammenhaltendes kleines Stück einer Gummiröhre verhindert werden, sich zu kreuzen.

Zunächst seien beide Curven eben, und ihre Ebenen mögen beständig zusammenfallen. Wir haben dann ein reines Rollen, wie wenn ein Cylinder auf einem andern rollte.

seine Fläche mithin $2\pi(1 - \sin\alpha)$ sein. Die Gesammtdrillung in einem Umlauf der Spirale ist daher $2\pi \sin\alpha$, und dies stimmt mit dem früher (§ 126) erhaltenen Resultat überein.

128. Krümmung der Oberflächen. — Als Einleitung für die weitere Betrachtung des Rollens einer Oberfläche auf einer andern wollen wir jetzt einige Punkte behandeln, die sich auf die Krümmung der Oberflächen beziehen, und die uns auch in mehreren anderen Theilen unseres Gegenstandes von Nutzen sein werden.

Die in irgend einem Punkte an eine Oberfläche gelegte Tangentialebene kann die Fläche in jenem Punkte schneiden oder nicht. Im ersteren Falle biegt sich die Oberfläche von der Tangentialebene theilweise nach der einen, theilweise nach der andern Seite zu ab und hat auf diese Weise in einigen ihrer Normalschnitte Krümmungen, welche den Krümmungen in anderen Normalschnitten entgegengesetzt gerichtet sind. Im letzteren Falle entfernt sich die Oberfläche von der Tangentialebene um den Berührungspunkt herum überall nach derselben Seite hin, und die Krümmungen aller Normalschnitte haben ähnliche Richtungen. Wir können danach zwei Arten von krummen Oberflächen, anticlastische und synclastische, unterscheiden. Ein Sattel liefert uns ein gutes Beispiel der ersteren, ein Ball der letzteren Art. Krümmungen, welche in Beziehung auf die Tangentialebene entgegengesetzt gerichtet sind, haben natürlich entgegengesetzte Zeichen. Die äussere Seite eines Ankerringes ist synclastisch, der innere anticlastisch.

129. Satz von Meunier. — Die Krümmung eines schrägen Schnittes einer Oberfläche ist gleich dem Product aus der Krümmung des durch dieselbe Tangente gehenden Normalschnittes in die Secante des Neigungswinkels der Schnittebenen. Dies folgt leicht aus den elementarsten Betrachtungen über Projectionen.

130. Satz von Euler. — In jedem Punkte einer synclastischen Oberfläche giebt es zwei Normalschnitte von der Beschaffenheit, dass die Krümmung des einen ein Maximum, die des andern ein Minimum ist; diese beiden Normalschnitte stehen aufeinander senkrecht.

Bei einer anticlastischen Oberfläche findet ein Maximum der Krümmung (aber in entgegengesetzten Richtungen) in den beiden Normalschnitten statt, deren Ebenen die Winkel zwischen den Linien halbiren, in welchen die Fläche ihre Tangentialebene schneidet. In Anbetracht der Zeichenverschiedenheit können diese beiden Krümmungen als ein Maximum und ein Minimum angesehen werden.

Allgemein ist für jeden Punkt die Summe der Krümmungen in irgend zwei aufeinander senkrechten Normalebenen von der Lage dieser Ebenen unabhängig.

Wird die Tangentialebene zur xy Ebene und der Berührungspunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen, so ist die Gleichung der Oberfläche offenbar (ausser wenn der Anfangspunkt ein singulärer Punkt ist):

$$(1) \qquad z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \text{u. s. w.}$$

Die Krümmung des Normalschnittes, welcher durch den Punkt x,y,z hindurchgeht, ist (im Grenzfall):

$$\frac{1}{r} = \frac{2z}{x^2+y^2} = 2\cdot\frac{Ax^2+2Bxy+Cy^2}{x^2+y^2}.$$

Wenn der Schnitt gegen die xz Ebene um den Winkel ϑ geneigt ist, so geht dieser Ausdruck über in

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = 2\{A\cos^2\vartheta + 2B\sin\vartheta\cos\vartheta + C\sin^2\vartheta\}.$$

Sind also $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{s}$ die Krümmungen in zwei zu einander senkrechten Normalschnitten, so ist

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 2(A+C) = const.$$

Die Formel (2) kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$\frac{1}{r} = \{A(1+\cos 2\vartheta) + 2B\sin 2\vartheta + C(1-\cos 2\vartheta)\}$$

$$= \{\overline{A+C} + \overline{A-C}\cos 2\vartheta + 2B\sin 2\vartheta\},$$

oder, wenn

$$A - C = R\cos 2\alpha,\ 2B = R\sin 2\alpha,$$

d. h.

$$R = \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} \text{ und } \tan 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$$

ist,

$$\frac{1}{r} = A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\cos 2(\vartheta-\alpha).$$

Es findet daher ein Maximum und ein Minimum der Krümmung in denjenigen zu einander senkrechten Normalebenen statt, für welche $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ist, und diese Krümmungen sind beziehungsweise

$$A + C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}.$$

Ihr Product ist also $4(AC - B^2)$.

Je nachdem dies Product positiv oder negativ ist, haben wir eine synclastische oder eine anticlastische Oberfläche. Ist dasselbe Null, so haben wir nur eine Krümmung, und die Fläche ist in dem betrachteten Punkte cylindrisch. Wir werden (§ 152) zeigen, dass, wenn diese Bedingung in jedem Punkte erfüllt ist, die Fläche zu den „abwickelbaren" (§ 139) gehört.

Aus (1) sehen wir, dass eine der Tangentialebene sehr nahe liegende und derselben parallele Ebene die Oberfläche in den drei angegebenen Fällen beziehungsweise in einer Ellipse, einer Hyperbel, oder in zwei parallelen Geraden (einer Varietät der Hyperbel) schneidet. Diese Schnittlinie, deren Natur uns lehrt, ob die Oberfläche in irgend einem Punkte synclastisch, anticlastisch oder cylindrisch ist, hat von Dupin den Namen Indicatrix erhalten.

131. Kürzeste Linie auf einer Oberfläche. — Es seien P, p zwei einander unendlich nahe liegende Punkte einer Oberfläche und r der Krümmungsradius eines durch dieselben gehenden Normalschnittes. Dann ist der Krümmungsradius eines durch die nämlichen Punkte gehenden schrägen Schnittes, der mit dem Normalschnitt einen Winkel α bildet, gleich $r \cos \alpha$ (§ 129). Auch ist der Weg von P nach p längs des Normalschnittes kürzer als der Weg zwischen diesen Punkten längs des schrägen Schnittes; denn der Bogen, den eine Sehne von gegebener Länge von einem Kreise abschneidet, ist um so länger, je kleiner der Radius dieses Kreises ist.

Ist a die Länge der Sehne Pp, so haben wir für die Entfernung von P bis p längs des Normalschnittes den Ausdruck $2\, r \arcsin \frac{a}{2\, r}$, oder näherungsweise $a\left(1 + \frac{a^2}{24\, r^2}\right)$; dagegen hat der Weg von P nach p längs des schrägen Schnittes die Länge $a\left(1 + \frac{a^2}{24\, r^2 \cos^2 \alpha}\right)$.

132. Geodätische Linien. — Wenn also die kürzeste überhaupt mögliche Linie zwischen zwei Punkten auf einer Oberfläche gezogen wird, so steht ihre Krümmungsebene überall auf der Oberfläche senkrecht.

Eine solche Curve heisst eine geodätische Linie, und es ist leicht zu sehen, dass sie diejenige Linie ist, in welcher eine zwischen jenen Punkten gespannte biegsame und unausdehnbare Schnur die (als glatt vorausgesetzte) Oberfläche berühren würde.

133. Wenn ein unendlich schmales Band eine geodätische Linie entlang auf eine Oberfläche gelegt wird, so ist seine Drillung in jedem Punkte gleich der Windung seiner Axe. Wir haben (§ 125) gesehen, dass, wenn ein Körper ohne zu kreiseln auf einem anderen rollt, die Projectionen der Spuren auf die gemeinschaftliche Tangentialebene im Berührungspunkt gleiche Krümmungen haben. Wenn also eine der Oberflächen eine Ebene und die Spur auf der andern eine geodätische Linie ist, so ist die Spur auf der Ebene eine Gerade. Ist umgekehrt die Spur auf der Ebene eine Gerade, so ist die auf der Oberfläche eine geodätische Linie.

Und ganz allgemein, wenn die gegebene Spur eine geodätische Linie ist, so ist auch die andere Spur eine geodätische Linie.

134. Sphärischer Excess. — Fläche eines sphärischen Polygons. — Bekanntlich ist die Fläche eines sphärischen Dreiecks proportional dem „sphärischen Excess", d. h. dem Ueberschuss der Summe seiner Winkel über zwei rechte Winkel, oder proportional dem Ueberschuss von vier rechten Winkeln über die Summe seiner Aussenwinkel. Die Fläche eines sphärischen Polygons, dessen n Seiten Bogen grösster Kreise — d. h. geodätische Linien — sind, verhält sich zur Fläche der Halbkugel, wie sich der Ueberschuss von vier rechten Winkeln über die Summe seiner Aussenwinkel zu vier rechten Winkeln verhält. (Wir können diesen Ueberschuss den „sphärischen Excess" des Polygons nennen.)

Die Fläche eines sphärischen Dreiecks ist bekanntlich

$$(A + B + C - \pi) r^2.$$

Theilen wir nun das Polygon in n solche Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Spitze haben, um welche herum die Summe der Winkel natürlich 2π beträgt, so ist die Fläche des Polygons

$$= (\text{Summe der Winkel aller Dreiecke} - n\pi) r^2$$
$$= (2\pi + \text{Summe der Winkel des Polygons} - n\pi) r^2$$
$$= (2\pi - \text{Summe der Aussenwinkel des Polygons}) r^2.$$

Es ist ein offenes oder geschlossenes sphärisches Polygon oder eine Linie auf der Oberfläche einer Kugel gegeben, die aus einer Anzahl von Bogen grösster Kreise besteht. Wir nehmen einen der beiden Pole des ersten Bogens und die entsprechenden Pole aller übrigen (wenn man die gegebenen Bogen der Reihe nach durchläuft, so müssen die genommenen Pole entweder sämmtlich zur Rechten, oder sämmtlich zur Linken liegen). Ziehen wir nun vom ersten dieser Pole zum zweiten, vom zweiten zum dritten, u. s. w. Bogen grösster Kreise, so erhalten wir ein zweites offenes oder geschlossenes Polygon, welches die Polarfigur des gegebenen genannt wird. Die Bogen des zweiten Polygons sind offenbar gleich den Aussenwinkeln des ersteren und die Aussenwinkel des zweiten gleich den Seiten des ersteren. Die Beziehung zwischen den beiden Figuren ist daher eine gegenseitige, oder jede ist die Polarfigur der anderen. Die Polarfigur einer beliebigen auf einer Kugeloberfläche gezogenen continuirlichen Curve ist der Ort der Durchschnittspunkte der grössten Kreise, die äquatoreal zu den unendlich nahe aneinander angenommenen Punkten der gegebenen Curve sind.

Die Fläche einer geschlossenen sphärischen Figur ist folglich nach dem, was wir eben gesehen haben, gleich dem Ueberschuss von 2π über die Peripherie der Polarfigur.

135. Die ganze Richtungsänderung der Bewegung auf einer Oberfläche. — Wenn sich ein Punkt auf einer Oberfläche eine Figur entlang bewegt, deren Seiten geodätische Linien sind, so definiren wir die Summe der Aussenwinkel dieser Figur als seine ganze Richtungsänderung in der Oberfläche.

Wenn ein Schiff auf einem grössten Kreise segelt (ausser auf dem Aequator oder einem Meridian), so erleidet sein Lauf, wie ihn die Striche des Compass (eines ideal genauen, nicht des magnetischen, denn dieser wechselt sogar auf einem Meridian) angeben, eine beständige Aenderung. Wie wir aber sagen, die Richtung des Schiffes bleibe dieselbe, wenn es auf einem Meridian oder auf dem Aequator segelt, so sollten wir auch sagen, seine Richtung bleibe dieselbe, wenn es auf einem beliebigen grössten Kreise fährt. Der grösste Kreis ist aber die geodätische Linie auf der Kugel, und durch Ausdehnung dieser Bemerkungen über andere krumme Flächen erkennen wir den Zusammenhang der obigen Definition mit der für den Fall eines ebenen Polygons (§ 10) gegebenen.

Anmerkung. — Wir können hier die gesammte Richtungsänderung nicht durch einen Winkel definiren, der sich aus der ersten und der letzten Tangente an die Bahn direct construiren liesse, wie es (§ 10) im Falle einer ebenen Curve oder eines ebenen Polygons geschah; aber die §§ 125 und 133 berechtigen uns zu folgendem Ausspruch: — Vom einen zum andern Ende irgend eines Bogens einer auf einer krummen Oberfläche gezogenen Curve ist die ganze Richtungsänderung gleich der Richtungsänderung in der Spur, welche dieser Bogen bei reinem Rollen auf einer Ebene zurücklässt.

136. Gesammtkrümmung. — Definition. — Der Ueberschuss von vier rechten Winkeln über die ganze Richtungsänderung, welche eintritt, wenn man auf einer krummen Oberfläche die ganze Peripherie eines aus geodätischen Linien bestehenden geschlossenen Polygons durchläuft, ist die Gesammtkrümmung des eingeschlossenen Flächentheils. Im Falle eines in einer Ebene gezogenen Polygons ist ein solcher Ueberschuss nicht vorhanden. Wir werden sofort sehen, dass dies genau dem entspricht, was Gauss *curvatura integra* genannt hat.

Definition (Gauss). — Errichtet man in irgend einem Punkte

der Umgrenzung eines gegebenen Theils einer krummen Fläche eine Normale, lässt dieselbe die ganze Umgrenzung durchlaufen und zieht vom Mittelpunkt einer Kugel vom Radius 1 aus parallel zu jeder Lage der Normale einen Radius, so bilden die Endpunkte der Radien auf der Kugeloberfläche eine geschlossene Curve. Die von dieser Curve eingeschlossene Fläche ist die *curvatura integra* des gegebenen Theils der krummen Oberfläche.

Die in der angegebenen Weise auf der Kugeloberfläche gezogene Curve heisst der Horograph des gegebenen Theils der krummen Fläche.

Die mittlere Krümmung irgend eines Theils einer krummen Fläche ist die Gesammtkrümmung, dividirt durch die Fläche. Die specifische Krümmung einer krummen Oberfläche in irgend einem Punkte ist die mittlere Krümmung eines um diesen Punkt herumliegenden unendlich kleinen Flächenstücks.

137. Der Ueberschuss von 2π über die Richtungsänderung, welche ein Punkt in einer Oberfläche erfährt, wenn er irgend eine auf derselben liegende geschlossene Curve durchläuft, ist gleich der Fläche des Horographen des von der Curve eingeschlossenen Theils der Oberfläche.

Wir lassen eine Tangentialebene auf der Oberfläche über jeden Punkt der Grenzlinie rollen, ohne zu kreiseln. (Ihre augenblickliche Axe wird beständig in ihr liegen und durch den Berührungspunkt gehen; sie wird aber, wie wir gesehen haben, nicht rechtwinklig gegen die gegebene Umgrenzungslinie sein, ausser wenn die Drillung in einem längs dieser Curve liegenden schmalen Streifen der Oberfläche Null ist.) Betrachten wir die Hilfskugel vom Radius 1, welche Gauss in seiner Definition benutzt, und die durch ihren Mittelpunkt gehende bewegliche Gerade, so sehen wir, dass die Bewegung der letzteren in jedem Augenblick in einer zur augenblicklichen Drehungsaxe der Tangentialebene an die gegebene Oberfläche senkrechten Ebene liegt. Die Bewegungsrichtung des Punktes, welcher die Fläche auf der Kugeloberfläche ausschneidet, ist daher senkrecht zu dieser augenblicklichen Axe. Wenn wir also auch auf der Kugel eine Tangentialebene rollen und sie mit der anderen Schritt halten lassen, so wird die Spur auf dieser Tangentialebene eine zur augenblicklichen Axe beider Tangentialebenen stets senkrechte Curve sein. Die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche, welche der Punkt erfährt, der das Flächenstück umschreibt und ausschneidet, ist nun (§ 135) gleich der Richtungsänderung in seiner eigenen Spur auf seiner eigenen Tangentialebene, folglich gleich der Richtungsänderung der augenblicklichen Axe in der Tangentialebene an die gegebene Oberfläche, von einer in Beziehung auf diese Ebene festliegenden Geraden an gerechnet. Wenn aber die Tangentialebene ganz herum gerollt und im Begriff ist, ihren Weg aufs Neue zu beginnen, so muss die augenblickliche Axe dieses neuen Umlaufes gegen

die Spur dieselbe Neigung wie im Anfang haben. Folglich ist die Richtungsänderung der augenblicklichen Axe in jeder der beiden Tangentialebenen gleich der Richtungsänderung, welche ein Punkt in der gegebenen Oberfläche erleidet, wenn er die Umgrenzung des gegebenen Theils derselben durchläuft. Dieser Richtungsänderung ist somit die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche gleich, welche eintritt, wenn ein Punkt das erwähnte Flächenstück derselben umschreibt. Nach dem bekannten Satze (§ 134) vom „sphärischen Excess" bleibt aber, wenn man diese Richtungsänderung von 2π subtrahirt, das sphärische Flächenstück übrig. Letzteres, oder nach Gauss' Definition die *curvatura integra*, ist also gleich 2π, weniger der beim Durchlaufen der Umgrenzung erfolgenden Richtungsänderung.

Wenn die beiden Tangentialebenen über die ihr vorgezeichneten Wege gerollt sind, so wird jede derselben ihrer anfänglichen Lage wieder parallel sein; aber eine in ihr fixirte Gerade wird mit ihrer früheren Richtung einen Winkel bilden, der den eben betrachteten gleichen Richtungsänderungen gleich ist.

Anmerkung. — Die beiden rollenden Tangentialebenen sind in jedem Augenblick einander parallel, und eine in Beziehung auf die eine Ebene feste Gerade, welche zu irgend einer Zeit einer in Beziehung auf die zweite Ebene festen Geraden parallel gezogen worden ist, bleibt derselben beständig parallel.

Wenn wir auf der gegebenen Oberfläche statt der geschlossenen Curve ein durch geodätische Linien gebildetes geschlossenes Polygon haben, so wird die Spur des Rollens ihrer Tangentialebene ein ungeschlossenes geradliniges Polygon sein. Wäre jede geodätische Linie eine ebene Curve (was nur dann der Fall sein könnte, wenn die gegebene Oberfläche eine Kugel wäre), so würde die augenblickliche Axe beständig senkrecht gegen diejenige Seite des Polygons sein, über welche die Tangentialebene in jenem Augenblick gerade hinwegrollt, und die sphärische Fläche auf der Hilfskugel würde natürlich ein dem gegebenen ähnliches Polygon sein. Wenn aber die gegebene Oberfläche keine Kugel ist, so muss in wenigstens einer geodätischen Linie des geschlossenen Polygons und im Allgemeinen in ihnen allen Windung, oder was dasselbe ist, es muss in den entsprechenden Streifen der Oberfläche Drillung vorhanden sein. Folglich muss der Theil der ganzen Spur auf der zweiten rollenden Tangentialebene, welcher irgend einer Seite des gegebenen geodätischen Polygons entspricht, im Allgemeinen eine Curve sein, und da allgemein beim zweiten Rollen endliche Winkel da sein werden, welche denjenigen des ersten Rollens entsprechen (aber nicht gleich sind), so wird die Spur des zweiten Rollens auf seiner Tangentialebene ein nicht geschlossenes Polygon von Curven sein. Die Spur desselben Rollens auf der Kugeloberfläche, in der es stattfindet, wird im Allgemeinen ein sphärisches Polygon sein, das nicht aus Bogen grösster Kreise, sondern aus anderen Curven besteht. Die Summe der Aussenwinkel dieses Polygons und der Richtungsänderungen vom einen zum andern Ende jeder seiner Seiten ist die ganze betrachtete Richtungsänderung und, wie eine Anwendung des in § 134 bewiesenen Satzes ergiebt, gleich 2π, weniger der eingeschlossenen sphärischen Fläche.

Es sei jetzt das gegebene Polygon nicht geodätisch, sondern bestehe

aus Curven, deren jede die Bedingung erfüllt, dass die durch irgend einen ihrer Punkte an die Oberfläche gelegte Normale einer festen Ebene parallel ist. Für jede der Curven, die das Polygon ausmachen, ist eine feste Ebene gegeben. Dann wird die Figur auf der Hilfskugel ein Polygon sein, das durch Bogen grösster Kreise gebildet wird, und die Spur dieser Figur auf ihrer Tangentialebene wird ein offenes geradliniges Polygon sein, während die Spur der gegebenen Curve auf der längs derselben in der gegebenen Fläche rollenden Tangentialebene ein offenes Polygon von Curven ist. Die Summe der Richtungsänderungen in diesen Curven und der an den Uebergängen von einer zur andern liegenden Aussenwinkel ist natürlich gleich der Richtungsänderung, die in der gegebenen Oberfläche eintritt, wenn man das darauf liegende Curvenpolygon umschreibt. Die Richtungsänderung in der Kugeloberfläche ist einfach die Summe der Aussenwinkel des sphärischen Polygons oder seiner geradlinigen Spur. Man beachte, dass die augenblickliche Axe, um welche das erste Rollen erfolgt, in diesem Falle, da sie beständig zu der Ebene senkrecht ist, welcher alle Normalen einer Curve parallel sind, einer in Beziehung auf die Tangentialebene festen Geraden parallel bleibt, während das Rollen längs der betreffenden Curve erfolgt; sie bleibt auch einer im Raum festliegenden Geraden parallel.

Endlich machen wir noch darauf aufmerksam, dass zwar die ganze Richtungsänderung in der Spur auf der einen Tangentialebene derjenigen in der Spur auf der anderen Tangentialebene gleich ist, sobald der gegebene Umfang vollständig durchrollt ist, dass aber diese beiden Richtungsänderungen in irgend einem Theile des Umfanges im Allgemeinen ungleich sind. Sie können für besondere Theile desselben gleich sein, und zwar ist dies der Fall zwischen den Punkten (wenn es deren giebt), in welchen die augenblickliche Axe gegen die Richtung der Spur auf der ersten Tangentialebene gleiche Neigung hat.

138. Analogie, die hinsichtlich der Krümmung zwischen Curven und Oberflächen besteht. — Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass dieselbe Gleichheit oder Identität besteht zwischen der „ganzen Krümmung" eines ebenen Bogens und dem Ueberschuss von π über den Winkel zwischen den in seinen Endpunkten errichteten Tangenten, wie zwischen der „ganzen Krümmung" und dem Ueberschuss von 2π über die in einer krummen Oberfläche längs der Umgrenzung irgend eines Theils derselben erfolgende Richtungsänderung.

Oder nach Gauss, wie die ganze Krümmung in einem ebenen Bogen der Winkel zwischen zwei Geraden ist, welche den in den Endpunkten des Bogens errichteten Normalen parallel sind, so ist die ganze Krümmung eines Theils einer krummen Oberfläche der körperliche Winkel eines Kegels, der entsteht, wenn man von einem festen Punkte aus zu allen durch die Umgrenzung gelegten Normalen Parallellinien zieht.

Weiter ist die mittlere Krümmung in einer ebenen Curve

$= \frac{\text{Richtungsänderung}}{\text{Länge}}$, und die specifische Krümmung oder, wie man gewöhnlich sagt, die Krümmung in irgend einem Punkte $= \frac{\text{Richtungsänderung in einem unendlich kleinen Curventheile}}{\text{Länge dieses Curventheils}}$. Die mittlere Krümmung und die specifische Krümmung von Oberflächen sind daher den entsprechenden Ausdrücken für eine ebene Curve analog.

Endlich ist in einem ebenen Bogen von gleichförmiger Krümmung, d. h. in einem Kreisbogen $\frac{\text{Richtungsänderung}}{\text{Länge}} = \frac{1}{\varrho}$, und es lässt sich leicht zeigen (was unten geschehen wird), dass in einer Oberfläche von überall gleichförmiger specifischer Krümmung $\frac{2\pi - \text{Richtungsänderung}}{\text{Fläche}}$, oder $\frac{\text{Gesammtkrümmung}}{\text{Fläche}} = \frac{1}{\varrho\varrho'}$ ist, wo ϱ und ϱ' die Hauptkrümmungsradien bezeichnen. Folglich ist in einer Oberfläche, mag dieselbe nun von gleichförmiger oder ungleichförmiger specifischer Krümmung sein, die specifische Krümmung in jedem Punkte gleich $\frac{1}{\varrho\varrho'}$, und in der Raumgeometrie ist $\varrho\varrho'$ (eine Fläche) offenbar dem analog, was ϱ in der Geometrie der ebenen Curven ist.

Fläche des Horographen. — Wir betrachten einen von einer gegebenen geschlossenen Curve begrenzten Theil S einer Oberfläche von irgend welcher Krümmung und nehmen noch eine Kugel an, deren Radius r und deren Mittelpunkt C ist. Durch C ziehen wir einen Radius CQ an die Kugeloberfläche, welcher der in irgend einem Punkte P von S errichteten Normale parallel ist. Wenn dies für einen jeden Punkt der Umgrenzung von S geschehen ist, so schliessen die auf der Kugeloberfläche erhaltenen Punkte die in Gauss' Definition benutzte Fläche ein. Nun liege auf S im Punkte P ein unendlich kleines Rechteck, welches zu Seiten Bogen der Normalschnitte grösster und kleinster Krümmung hat, und zwar die Bogen der Winkel ζ und ζ'. Werden ihre Krümmungsradien mit ϱ und ϱ' bezeichnet, so sind die Längen dieser Seiten beziehungsweise $\varrho\zeta$ und $\varrho'\zeta'$, und die Fläche des Rechtecks ist daher $\varrho\varrho'\zeta\zeta'$. Die entsprechende Figur auf der Kugeloberfläche in Q wird durch Bogen ebenso grosser Winkel begrenzt; ihre Seiten haben daher beziehungsweise die Längen $r\zeta$ und $r\zeta'$, und ihre Fläche ist $r^2\zeta\zeta'$. Wird diese Fläche mit $d\sigma$ bezeichnet, so ist die Fläche des unendlich kleinen Theils der gegebenen Oberfläche $\frac{\varrho\varrho' d\sigma}{r^2}$. In einer Oberfläche, für welche $\varrho\varrho'$ einen constanten Werth hat, ist die Fläche daher gleich

$$\frac{\varrho\varrho'}{r^2}\int\int d\sigma = \varrho\varrho' \times \text{Gesammtkrümmung}.$$

139. Biegsame und unausdehnbare Oberflächen. — Der Begriff einer vollkommen biegsamen und dabei unausdehnbaren Oberfläche wird zwar nicht realisirt, aber in uns erweckt durch ein Stück Papier, eine dünne Metallplatte oder ein Stück Tuch, wenn die Fläche eben ist, und durch Schotenhülsen, Samengehäuse u. dergl., wenn die Fläche nicht flach ausgebreitet werden kann, ohne zu zerreissen. Wenn man die Form einer Oberfläche durch Biegen ändert, so sagt man: man wickle die Fläche ab. Der Ausdruck „abwickelbare Oberfläche" wird aber gewöhnlich in einem beschränkteren Sinne, nämlich nur von solchen unausdehnbaren Oberflächen gebraucht, die sich in eine Ebene abwickeln lassen.

140. Die Geometrie oder Kinematik dieses Gegenstandes steht in grossem Gegensatze zu der der biegsamen Linien (§ 14). Schon ihre ersten Elemente enthalten Begriffe, deren Verständniss nicht sehr leicht ist, und führen zu Untersuchungen, welche die Kraft einiger der grössten Mathematiker beschäftigt und vielleicht sogar überstiegen haben.

141. Es erfordert einige Sorgfalt, sich eine genaue Vorstellung davon zu bilden, was eine vollkommen biegsame unausdehnbare Oberfläche ist. Betrachten wir zunächst ein ebenes Blatt Papier. Dasselbe ist sehr biegsam, und wir können uns, von ihm ausgehend, leicht den Begriff eines Blattes von einem idealen vollkommen biegsamen Stoffe bilden. Das Blatt Papier ist in hohem Grade unausdehnbar, d. h. es giebt einer Kraft, die es nach irgend einer Richtung zu ziehen oder auszudehnen strebt, nur sehr wenig nach, wäre diese Kraft auch die stärkste, die es noch ertragen kann, ohne zu zerreissen. Es dehnt sich natürlich ein wenig aus. Es ist leicht zu zeigen, dass es sich unter dem Einflusse einer Kraft ausdehnt und, wenn die Kraft beseitigt ist, wieder zusammenzieht, obwohl nicht immer wieder zu seinen anfänglichen Dimensionen, da die hervorgebrachte Ausdehnung bis zu einem gewissen Betrage eine bleibende sein kann und im Allgemeinen auch ist. Auch hat eine Biegung eine zeitweilige und eine in geringerem Grade bleibende Ausdehnung der einen und Zusammenziehung der anderen Seite zur Folge. Wir werden in der Elasticitätslehre hierauf zurückkommen. Inzwischen können wir, um unsere kinematischen Sätze zu erläutern, nicht umhin, solche physikalische Verhältnisse zu anticipiren.

142. Ein auf die gewöhnliche einfache Weise gewobenes Tuch, sehr feiner Musselin z. B., erläutert eine Fläche, welche in zwei Richtungen (nämlich in den Richtungen der Kette und des Ein-

schlags) vollkommen unausdehnbar, dagegen jeder Ausdehnung von 1 bis $\sqrt{2}$ längs einer Diagonale fähig ist, wobei zugleich in der Richtung der anderen Diagonale eine Zusammenziehung von 1 bis 0 erfolgt. [Jeder Grad der Ausdehnung längs einer Diagonale ist von einem entsprechenden ganz bestimmten Grade der Zusammenziehung längs der anderen Diagonale begleitet; der Zusammenhang zwischen beiden ist $(e^2 + e'^2) = 2$, wo $1 : e$ und $1 : e'$ die Verhältnisse der Elongation sind, die im Falle e oder $e' < 1$ eine Zusammenziehung sein wird.] Im Vorhergehenden ist das Gewebe als ein quadratisches vorausgesetzt, in welchem Falle die Diagonalen rechtwinklig zu einander bleiben. Ein Gewebe mit länglichen Maschen liefert eine weniger einfache aber leicht bestimmbare Relation. Ein Zeug wird auf ganz verschiedene Weise fallen, je nachdem das Gewebe quadratisch oder mehr oder weniger oblong ist.

143. Die Biegung einer Oberfläche, welche irgend einen Fall der eben festgesetzten geometrischen Bedingung erfüllt, bietet einen interessanten Gegenstand der Untersuchung dar, bei dem wir leider nicht verweilen dürfen. Das feuchte Papier, welches Albrecht Dürer als Modell der Gewänder bei seinen kleinen Gliederpuppen benutzte, musste ganz anders als Leinwand fallen. Vielleicht rührt die Steifheit der Drapirung in seinen Gemälden theilweise aus dem Umstande her, dass er das feuchte Papier dem Leinen seiner grössern Biegsamkeit wegen vorzog und den grossen Unterschied übersah, der hinsichtlich der Ausdehnbarkeit zwischen beiden stattfindet.

Feiner Musselin wird, mit Stärke und Gummi präparirt, während des Trocknens durch eine Maschine in Bewegung erhalten, welche durch Hervorbringung einer hin und her gehenden relativen Winkelbewegung von Kette und Einschlag die Diagonalen seiner Structur abwechselnd ausdehnt und zusammenzieht und auf diese Weise die Parallelogramme verhindert, in Rechtecke zu erstarren.

144. Biegung einer unausdehnbaren abwickelbaren Fläche. — Die Biegung einer unausdehnbaren Oberfläche, welche eben sein kann, ist ein von den Mathematikern gut ausgearbeiteter Gegenstand, der auch, in seinen Elementen wenigstens, keine grossen Schwierigkeiten darbietet. Die erste elementare Vorstellung, die wir zu bilden haben, ist die, dass eine solche (als vollkommen biegsam vorausgesetzte) Oberfläche, wenn wir sie uns anfangs in eine Ebene ausgebreitet denken, um irgend eine auf ihr gezogene Gerade so gebogen werden kann, dass die beiden ebenen Theile einen beliebigen Winkel mit einander bilden.

Eine solche Gerade wird eine „erzeugende Linie“ der zu bildenden Oberfläche genannt.

Weiter können wir einen dieser ebenen Theile um irgend eine andere Gerade biegen, welche (innerhalb der Grenzen der Fläche) die erstere Gerade nicht schneidet, u. s. w. Ist die Anzahl dieser Geraden unendlich gross, und sind die Biegungswinkel unendlich klein, aber so beschaffen, dass sie eine endliche Summe geben, so ist unsere anfänglich ebene Fläche in eine krumme und natürlich „abwickelbare“ (§ 139) Fläche umgebogen.

145. Wenn man ein Stück Papier von quadratischer Form, welches ohne Falten, ohne Runzeln und ohne rauhe Ränder ist, leicht an einer Ecke oder an sonst einem Punkte, oder auch an zwei Punkten anfasst und ohne Druck oder Zwang aufhebt, so wird es in einer Form herabhängen, die in aller Strenge eine abwickelbare Oberfläche ist. Denn wenn es auch nicht absolut unausdehnbar ist, so sind doch die Kräfte, die es auszudehnen oder zu zerreissen streben, wenn es in der angegebenen Weise behandelt worden, klein genug, um keine merkliche Ausdehnung zu erzeugen. In der That ist die grösste Ausdehnung, die es, ohne zu zerreissen, in irgend einer Richtung erfahren kann, nicht im Stande, einen grossen Einfluss auf die Form der Oberfläche auszuüben, wenn scharfe Biegungen, singuläre Punkte, u. s. w. vermieden werden.

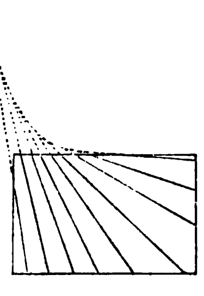
146. Prismen und Cylinder (die Biegungslinien, § 144, sind parallel; ihre Anzahl ist im ersteren Falle endlich, im zweiten unendlich gross; die Biegungswinkel sind im ersteren Falle von endlicher Grösse, im zweiten unendlich klein), sowie Pyramiden und Kegel (die Biegungslinien treffen einander, gehörig verlängert, in einem Punkte) gehören offenbar zu den abwickelbaren Flächen.

147. Wenn die erzeugenden Linien oder die linearen Kanten der Biegungswinkel nicht parallel sind, so müssen sie einander schneiden, da sie in einer Ebene liegen, wenn die Oberfläche eben ist. Wenn sie nicht sämmtlich durch einen Punkt gehen, so müssen sie sich in mehreren Punkten treffen. Im Allgemeinen möge jede dieser Geraden die vorhergehende und die nachfolgende in verschiedenen Punkten schneiden.

148. Wendungscurve. — Es hat noch keine Schwierigkeit, die Form der ebenen Fläche, etwa eines Quadrats oder eines Kreises, zu verstehen, wenn dieselbe in der zuletzt dargelegten Weise gebogen worden ist, vorausgesetzt dass sie keinen jener Schnittpunkte enthält. Wenn die Anzahl derselben unendlich gross und die Ober-

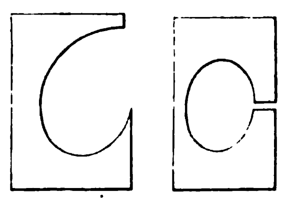
fläche endlich gekrümmt ist, so werden die erzeugenden Linien im Allgemeinen Tangenten einer Curve sein (die der geometrische Ort der unendlich vielen Durchschnittspunkte ist). Diese Curve heisst die Wendungscurve. Wenn die Oberfläche (nach mathematischen Begriffen) vollständig ist, so muss sie offenbar aus zwei Flächen bestehen, die in der Wendungscurve zusammentreffen (gerade so wie ein Kegel aus zwei im Scheitel zusammenstossenden Flächen besteht), da man jede Tangente, statt sie, wie in der Fig. 37 geschehen ist, im Berührungspunkte aufhören zu lassen, über diesen Punkt hinaus verlängern kann.

Fig. 37.



149. Eine abwickelbare Fläche, von der Wendungscurve ausgehend, praktisch zu construiren. — Wir stellen uns die Aufgabe, eine vollständige abwickelbare Oberfläche, von ihrer Wendungscurve ausgehend, zu construiren.

Fig. 38.



Man lege ein ganz ebenes Stück Papier, das ohne Falten und von glatt geschnittenen Rändern ist, auf die Fläche eines anderen und ziehe auf dem oberen irgend eine Curve, die keinen Inflexionspunkt, sondern überall eine endliche Krümmung hat. Darauf schneide man auf der concaven Seite das Papier ganz hinweg. Wenn die Curve geschlossen ist, so muss man sie zu diesem Zwecke aufschneiden (siehe die zweite Fig. 38).

Die Grenzen, bis zu denen man das Papier wegzuschneiden hat, sind die von den beiden Endpunkten auswärts gezogenen Tangenten; kurz, es ist kein Theil des Papiers da zu lassen, durch welchen nicht eine reelle Tangente hindurchgeht.

Die beiden Blätter werden nun mittels einiger Streifchen sehr feinen Papiers oder Musselins, die man längs ihres gemeinschaftlichen krummen Randes an sie klebt, an einander befestigt. Diese Streifen müssen so fein sein, dass sie auf die Biegung der beiden Blätter keinen merklichen Einfluss ausüben. Hält man jetzt eine Ecke des einen Blattes fest und hebt das Ganze auf, so werden die beiden Blätter sich aufthun und die Theile einer abwickelbaren Oberfläche bilden, für welche die erwähnte Curve, die sich in eine

gewundene Curve verwandelt, die Wendungscurve ist. Die Tangente an diese Curve liegt, wenn sie vom Berührungspunkte aus nach einer Richtung hin gezogen ist, stets im einen Theil der Fläche, ihre Fortsetzung nach der anderen Seite zu im anderen Theil. Durch dies Verfahren kann man natürlich ein doppelflächiges abwickelbares Polyeder construiren, wenn man statt von einer Curve von einem Polygon ausgeht.

Fig. 39.

150. Allgemeine Eigenschaft einer unausdehnbaren Oberfläche. — Wenn die Form einer biegsamen aber völlig unausdehnbaren Oberfläche auf irgend eine für sie mögliche Weise geändert wird, so muss jede auf ihr gezogene Linie ihre Länge unverändert beibehalten. Es muss also auch die gegenseitige Neigung zweier beliebigen einander schneidenden Linien dieselbe bleiben. Weiter folgt auch, dass geodätische Linien geodätische Linien bleiben. Folglich ist die „Richtungsänderung", welche ein Punkt in der Oberfläche erfährt, wenn er irgend einen Theil derselben umschreibt, von der Biegung dieses Theils gänzlich unabhängig, und daher (§ 136) kann die Biegung der Oberfläche auch für die Gesammtkrümmung in jedem beliebigen Theil von keinem Einfluss sein. Daraus geht hervor (§ 138, Satz von Gauss), dass das Product der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte unverändert bleibt.

151. Der allgemeine Ausspruch eines umgekehrten Satzes, der die Bedingung auszudrücken hätte, unter welcher zwei gegebene Theile krummer Flächen so gebogen werden können, dass sie auf einander passen, müsste wesentlich auf irgend einer Methode beruhen, die auf beiden Flächen einander entsprechenden Punkte anzugeben. Ein näheres Eingehen auf diese Frage würde hier nicht am Platze sein.

152. Oberfläche von constanter specifischer Krümmung. — In einem Falle ist jedoch ein Ausspruch in den einfachsten möglichen Ausdrücken anwendbar. Zwei beliebige Oberflächen, in deren jeder die specifische Krümmung in allen Punkten dieselbe und derjenigen der anderen gleich ist, können so gebogen werden, dass sie ganz auf einander passen. So kann jede Oberfläche von gleichmässiger positiver specifischer Krümmung (d. h. jede Fläche, deren eine Seite ganz convex, deren andere Seite ganz concav ist) durch Biegung mit einer Kugeloberfläche zur Deckung gebracht werden, deren Radius eine mittlere Proportionale zwischen den Hauptkrümmungsradien jener Fläche in irgend einem Punkte ist. Eine Oberfläche

von gleichförmiger negativer oder anticlastischer Krümmung würde auf eine imaginäre Kugel passen. Bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft lässt sich dies Resultat aber nicht interpretiren. Doch erhalten wir auch für diese letztere Art der Flächen ein praktisches Resultat, nämlich dass jede von zwei Flächen gleichförmiger anticlastischer Krümmung so gebogen werden kann, dass sie die andere deckt.

153. Geodätische Dreiecke auf einer Oberfläche von constanter specifischer Krümmung. — Es ist zu bemerken, dass die geodätische Trigonometrie für jede Oberfläche von gleichförmiger positiver oder synclastischer Krümmung mit der sphärischen Trigonometrie identisch ist.

Wenn $a = \frac{s}{\sqrt{\varrho\varrho'}}$, $b = \frac{t}{\sqrt{\varrho\varrho'}}$, $c = \frac{u}{\sqrt{\varrho\varrho'}}$ ist, wo s, t, u die Längen von drei geodätischen Linien sind, welche drei Punkte auf der Oberfläche verbinden, und wenn A, B, C die Winkel zwischen den Tangenten bezeichnen, welche in diesen Punkten an die geodätischen Linien gelegt sind, so haben wir sechs Grössen, welche vollständig mit den drei Seiten und den drei Winkeln eines gewissen sphärischen Dreiecks übereinstimmen. Es giebt auch eine unseres Wissens freilich nicht ausgearbeitete entsprechende anticlastische Trigonometrie für jede Fläche von gleichförmiger anticlastischer Krümmung *). Auf einer anticlastischen Oberfläche ist die Summe der drei Winkel eines geodätischen Dreiecks natürlich kleiner als zwei rechte Winkel, und die Differenz, der „anticlastische Defect" (wie der „sphärische Excess") gleich der Dreiecksfläche, dividirt durch $\varrho \times -\varrho'$, wenn ϱ und $-\varrho'$ positiv sind.

154. Deformation. — Wir haben jetzt die äusserst wichtigen kinematischen Bedingungen zu betrachten, welche die Volumen- oder Formänderungen einer festen oder flüssigen Masse oder einer Gruppe von Punkten darbieten, deren gegenseitige Lagen bekannten Bedingungen unterworfen sind. Jede solche Aenderung der Form oder der Dimensionen nennen wir eine Deformation.

Eine Deformation erfährt z. B. ein Stab, wenn er länger oder kürzer wird, Wasser, wenn man es comprimirt, ein Stein, ein Balken, eine Metallmasse in einem Gebäude oder einem Rahmenwerk, wenn sie in irgend einer Richtung verdichtet oder ausgedehnt, auf irgend eine Weise gebogen oder gedreht werden. Dasselbe sagt man von einem Schiffe, wenn bei seinem Ablauf vom Stapel oder

---

*) Dieselbe ist neuerdings von Herrn Beltrami entwickelt worden: die Flächen von constanter negativer Krümmung nennt er pseudosphärische. Ihre Geometrie fällt zusammen mit der imaginären Geometrie Lobatschewsky's, welcher das Axiom über die Parallellinien wegliess. Annali di Matematica pura ed appl. Ser. I, T. VII; Ser. II a, T. II. — Beltrami Saggio di interpretazione della Geometria Nove-Euclidea. Napoli 1868.
Anmerk. d. Herausgeber.

beim Arbeiten auf stürmischer See seine verschiedenen Theile relative Bewegungen ausführen.

155. Definition der homogenen Deformation. — Wenn die einen beliebigen Raum erfüllende Materie in irgend einer Weise deformirt wird, und alle Punktepaare, welche sich anfänglich in gleichen Abständen von einander in parallelen Linien befinden, gleichweit von einander entfernt (der Abstand kann ein anderer geworden sein) und in parallelen Linien (deren Richtung von ihrer früheren Richtung abweichen kann) bleiben, so wird die Deformation eine homogene genannt.

156. Eigenschaften der homogenen Deformation. — Wenn man durch einen Körper eine beliebige Gerade zieht und den Körper sodann homogen deformirt, so werden die Theile, in denen jene Gerade ihn schnitt, auch nach der Deformation noch eine gerade Linie bilden. Denn wenn ABC irgend eine solche Linie ist, so bleiben AB und BC, weil sie im anfänglichen Zustande einer Geraden parallel sind, auch nach der Deformation einer Geraden parallel, d. h. sie hören nicht auf, eine einzige Gerade zu bilden. Auf diese Weise ergiebt sich auch, dass eine Ebene eine Ebene, ein Parallelogramm ein Parallelogramm und ein Parallelepiped ein Parallelepiped bleibt.

157. Daraus geht weiter hervor, dass ähnliche und ähnlich gelegene Figuren, mögen sie nun durch wirkliche Theile der Substanz gebildet werden oder bloss geometrische Gebilde sein (Flächen, gerade oder krumme Linien, die durch gewisse Theile der Substanz hindurchgehen oder dieselben verbinden), auch noch nach der Aenderung, welche die Aenderung des Körpers für sie zur Folge hat, ähnlich und in Beziehung auf einander ähnlich gelegen sein werden.

158. Das Verhältniss, in welchem die Längen paralleler Linien des Körpers zu einander stehen, bleibt unverändert; alle diese Längen ändern sich also in demselben Verhältniss. Hieraus und aus § 156 schliessen wir, dass sich jede ebene Figur in eine andere ebene Figur verwandelt, welche eine verkleinerte oder vergrösserte orthographische Projection der ersteren auf irgend eine Ebene ist. Z. B. wenn aus einer Ellipse ein Kreis wird, so werden ihre Hauptaxen auf einander senkrechte Radien.

Unter der Elongation des Körpers längs irgend einer Linie versteht man das Verhältniss, in welchem die Zunahme der Entfernung irgend zweier Punkte in dieser Linie zu ihrer ursprünglichen Entfernung steht.

159. Jede orthogonale Projection einer Ellipse ist eine Ellipse (dieser Ausspruch schliesst den Fall in sich, in welchem die Projection ein Kreis ist). Hieraus und aus § 158 geht hervor, dass eine Ellipse eine Ellipse bleibt und ein Ellipsoid eine Oberfläche, bei welcher jeder ebene Schnitt eine Ellipse ist, d. h. ein Ellipsoid.

Eine ebene Curve bleibt (§ 156) eine ebene Curve. Ein Coordinatensystem von zwei oder drei Geraden bleibt geradlinig, wird aber im Allgemeinen schiefwinklig, wenn es ursprünglich rechtwinklig war.

Denken wir uns in der Substanz des Körpers, der noch in seinem anfänglichen Zustande sein möge, eine Ellipse, welche, auf zwei beliebige conjugirte Axen bezogen, die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat, und nehmen an, α und β seien beziehungsweise die Verhältnisse, in denen die Längen der den Axen OX und OY parallelen Linien sich ändern, so haben wir, wenn die geänderten Werthe von x und y mit ξ und η bezeichnet werden,

$$\xi = \alpha x, \ \eta = \beta y,$$

folglich

$$\frac{\xi^2}{(\alpha a)^2} + \frac{\eta^2}{(\beta b)^2} = 1.$$

Dies ist auch die Gleichung einer auf conjugirte Axen bezogenen Ellipse. Der Winkel zwischen diesen neuen Axen kann von demjenigen verschieden sein, den die gegebenen Axen im anfänglichen Zustande des Körpers bildeten.

Oder wenn wir uns in dem Körper, ehe derselbe eine Deformation erleidet, ein auf drei rechtwinklige oder schiefwinklige conjugirte Diametralebenen als Coordinatenebenen bezogenes Ellipsoid denken, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, und annehmen, α, β, γ seien beziehungsweise die Verhältnisse, in denen sich die Längen der den Axen OX, OY, OZ parallelen Linien in Folge der Deformation ändern, so haben wir, wenn die geänderten Werthe von x, y, z mit ξ, η, ζ bezeichnet werden,

$$\xi = \alpha x, \ \eta = \beta y, \ \zeta = \gamma z,$$

folglich

$$\frac{\xi^2}{(\alpha a)^2} + \frac{\eta^2}{(\beta b)^2} + \frac{\zeta^2}{(\gamma c)^2} = 1.$$

Dies ist auch die Gleichung eines auf conjugirte Diametralebenen bezogenen Ellipsoides. Die Winkel zwischen den neuen Ebenen können von denjenigen verschieden sein, welche die gegebenen Ebenen im anfänglichen Zustande des Körpers bildeten.

160. Deformationsellipsoid. — Das Ellipsoid, in welches sich irgend eine anfänglich sphärische Fläche des Körpers in Folge einer Deformation verwandelt, wollen wir der Kürze wegen das Deformationsellipsoid nennen.

161. In jeder durchaus unbeschränkten homogenen Defor-

mation giebt es drei auf einander senkrechte Richtungen (die drei Hauptaxen des Deformationsellipsoides), welche auch, wenn der Zustand des Körpers geändert ist, senkrecht auf einander stehen (§ 158). Längs einer dieser Richtungen ist die Elongation grösser, längs einer zweiten derselben kleiner, als längs jeder anderen Richtung im Körper. Längs der noch übrigen dritten Axe ist die Elongation kleiner, als in jeder anderen Linie der durch sie selbst und die ersterwähnte Axe gelegten Ebene und grösser, als in jeder Linie der Ebene, welche durch sie (die dritte Axe) und die zweite Axe hindurchgeht.

Anmerkung. — Eine Zusammenziehung oder Contraction ist als eine negative Elongation zu rechnen. Im vorstehenden Satze kann man das Maximum der Elongation auch als Minimum der Contraction und das Minimum der Elongation als Maximum der Contraction bezeichnen.

162. Das Ellipsoid, in welches sich eine Kugel verwandelt, kann auch ein Rotationsellipsoid oder, wie man sagt, ein gestrecktes oder ein abgeplattetes Sphäroid sein. Dann wird längs der Axe ein Maximum oder ein Minimum und längs aller zur Axe senkrechten Geraden ein überall gleiches Minimum oder Maximum der Elongation vorhanden sein.

Ist endlich das Deformationsellipsoid eine Kugel, so sind die Elongationen in allen Richtungen einander gleich. In diesem Falle hat die Deformation auf die Gestalt jedes Körpertheils keinen Einfluss, sondern bewirkt nur eine Aenderung der Dimensionen.

Das anfängliche Volumen (Kugel) verhält sich offenbar zu dem neuen (Ellipsoid) wie $1 : \alpha\beta\gamma$.

163. Axen einer Deformation. — Unter den Hauptaxen einer Deformation verstehen wir die Hauptaxen des Ellipsoides, in welches dieselbe eine Kugel verwandelt. Die Hauptelongationen einer Deformation sind die Elongationen in der Richtung ihrer Hauptaxen.

164. Elongation und Richtungsänderung einer Linie des Körpers. — Wenn die Lagen der Hauptaxen und die Grössen der Hauptelongationen einer Deformation gegeben sind, so lässt sich die Elongation einer jeden Linie des Körpers und die Aenderung des Winkels zwischen zwei beliebigen Linien augenscheinlich durch eine einfache geometrische Construction bestimmen.

Analytisch würde man folgendermaassen verfahren: — Es bezeichnen $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\gamma - 1$ die Hauptelongationen, so dass also α, β, γ nicht mehr

wie oben die Aenderungsverhältnisse längs dreier beliebigen zu einand rechtwinkligen oder schiefwinkligen Geraden, sondern diese Verhältnis für die Hauptaxen sind. Irgend eine Gerade habe, auf die drei Haup axen bezogen, die Richtungscosinus l, m, n. Dann sind

$$l r, \quad m r, \quad n r$$

die drei anfänglichen Coordinaten eines Punktes P, welcher in der Ric tung l, m, n in der Entfernung $OP = r$ vom Anfangspunkte liegt. De selbe Punkt des Körpers hat in Beziehung auf dieselben rechtwinklig Axen im geänderten Zustande die Coordinaten

$$\alpha l r, \quad \beta m r, \quad \gamma n r;$$

folglich ist die jetzige Länge von OP

$$(\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2} r,$$

und die „Elongation" des Körpers in jener Richtung

$$(\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2} - 1.$$

Der Kürze wegen wollen wir dies mit $\zeta - 1$ bezeichnen, d. h.

$$\zeta = (\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2}$$

setzen. Die Richtungscosinus der neuen Lage von OP sind

$$\frac{\alpha l}{\zeta}, \quad \frac{\beta m}{\zeta}, \quad \frac{\gamma n}{\zeta};$$

dies sind also beziehungsweise die neuen Werthe der Cosinus der Win XOP, YOP, ZOP, welche vorher l, m, n waren.

Hatte irgend eine zweite Gerade OP' anfänglich die Richtungscosi l', m', n', so war der Cosinus des zwischen ihr und OP liegenden Wink im ursprünglichen Zustande des Körpers gleich

$$l l' + m m' + n n';$$

derselbe nimmt in Folge der Deformation den Werth

$$\frac{(\alpha^2 l l' + \beta^2 m m' + \gamma^2 n n')}{(\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2)^{1/2} (\alpha^2 l'^2 + \beta^2 m'^2 + \gamma^2 n'^2)^{1/2}}$$

an.

165. Aenderung einer Ebene im Körper. — Aus de selben Daten kann man auch leicht die Aenderung des Wink zwischen zwei beliebigen Ebenen des Körpers sowohl geometri als analytisch bestimmen.

Es seien l, m, n die Cosinus der Winkel, welche eine Ebene l ziehungsweise mit den Ebenen YOZ, ZOX, XOY im anfänglich Zustande des Körpers bildet. Da die Wirkungen der Deformation a alle parallelen Ebenen dieselben sind, so dürfen wir voraussetzen, dass d in Rede stehende Ebene durch den Coordinatenanfangspunkt O geht; il Gleichung ist daher

$$l x + m y + n z = 0.$$

Nach der im Körper eingetretenen Aenderung werden die Coordinat x, y, z eines jeden Punktes sich wie früher in

$$\xi = \alpha x, \quad \eta = \beta y, \quad \zeta = \gamma z$$

verwandelt haben; die Gleichung unserer Ebene ist daher nach dieser Aenderung

$$\frac{l\xi}{\alpha} + \frac{m\eta}{\beta} + \frac{n\zeta}{\gamma} = 0.$$

Nach unserer jetzigen Voraussetzung sind aber die Coordinatenebenen noch rechtwinklig zu einander. Die Cosinus der Neigungswinkel der in Rede stehenden Ebene gegen die Ebenen YOZ, ZOX, XOY sind daher aus l, m, n beziehungsweise in

$$\frac{l}{\alpha\vartheta}, \quad \frac{m}{\beta\vartheta}, \quad \frac{n}{\gamma\vartheta}$$

übergegangen, wo der Kürze wegen

$$\vartheta = \left(\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2}\right)^{1/2}$$

gesetzt ist. Haben wir eine zweite Ebene, welche im anfänglichen Zustande des Körpers durch ihre Richtungscosinus l', m', n' bestimmt ist, so hat der Cosinus des Winkels zwischen ihr und der ersteren Ebene anfänglich den Werth

$$l l' + m m' + n n',$$

und dieser Werth verwandelt sich in

$$\frac{\frac{ll'}{\alpha^2} + \frac{mm'}{\beta^2} + \frac{nn'}{\gamma^2}}{\left(\frac{l^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\gamma^2}\right)^{1/2} \left(\frac{l'^2}{\alpha^2} + \frac{m'^2}{\beta^2} + \frac{n'^2}{\gamma^2}\right)^{1/2}}.$$

166. Kegelfläche gleicher Elongation. — Um wieder auf die Elongationen zu kommen, die im Allgemeinen in verschiedenen Richtungen verschieden sein werden, so leuchtet ein, dass alle durch irgend einen Punkt gehenden Geraden, in welchen die Elongationen von der nämlichen zwischen dem grössten und dem kleinsten Elongationswerth enthaltenen Grösse sind, auf einer bestimmten Kegelfläche liegen müssen. Es ist dies, wie sich leicht darthun lässt, im Allgemeinen ein Kegel zweiten Grades.

Denn in einer durch die Richtungscosinus l, m, n bezeichneten Richtung haben wir

$$\alpha^2 l^2 + \beta^2 m^2 + \gamma^2 n^2 = \zeta^2,$$

wo ζ das entsprechende Elongationsverhältniss bezeichnet, das zwischen dem grössten (α) und dem kleinsten (γ) Werthe der Elongation enthalten ist. Diese Gleichung stellt aber einen Kegel zweiten Grades dar, wenn l, m, n die Richtungscosinus einer erzeugenden Linie sind.

167. Ebenen, in denen keine Verzerrung erfolgt. — In einem besonderen Falle geht dieser Kegel in zwei Ebenen über, die Ebenen der Kreisschnitte des Deformationsellipsoids.

Es sei $\zeta = \beta$. Dann verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\alpha^2 l^2 + \gamma^2 n^2 - \beta^2 (1 - m^2) = 0,$$

oder, weil $1 - m^2 = l^2 + n^2$ ist, in

$$(\alpha^2 - \beta^2)\, l^2 - (\beta^2 - \gamma^2)\, n^2 = 0.$$

Das erste Glied dieser Gleichung ist das Product zweier Factoren: dieselbe wird also befriedigt, wenn man jeden Factor gleich Null setzt, und stellt daher zwei Ebenen dar, welche beziehungsweise die Gleichungen

$$l\,(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} + n\,(\beta^2 - \gamma^2)^{1/2} = 0,$$

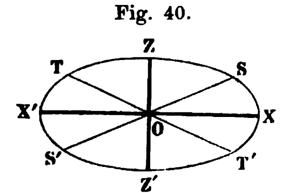
$$l\,(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} - n\,(\beta^2 - \gamma^2)^{1/2} = 0$$

haben.

Dies ist der Fall, in welchem die gegebene Elongation gleich derjenigen ist, welche längs der mittleren Hauptaxe des Deformationsellipsoides stattfindet. Die beiden Ebenen gehen durch die mittlere Hauptaxe des Ellipsoides und beide bilden mit jeder einzelnen der beiden anderen Hauptaxen gleiche Winkel. Die Linien, längs welcher die Elongation gleich der mittleren Hauptelongation ist, liegen sämmtlich in einer dieser beiden Ebenen oder parallel zu derselben. Dies lässt sich leicht, ohne jede analytische Untersuchung, in folgender Weise darthun: —

168. In Fig. 40 stelle die Ellipse den durch die grösste und die kleinste Hauptaxe gehenden Schnitt des Deformationsellipsoides dar.

Fig. 40.

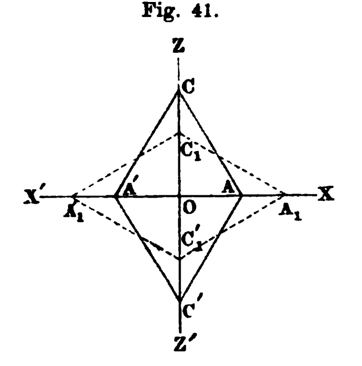


$S'OS$ und $T'OT$ seien die beiden Durchmesser dieser Ellipse, welche gleich der mittleren Hauptaxe des Ellipsoides sind. Jede durch O zur Ebene der Figur senkrecht gelegte Ebene schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Hauptaxen sich leicht angeben lassen. Eine derselben ist nämlich der Durchmesser, in welchem die Ebene die Ellipse der Figur schneidet, die zweite ist der mittlere Hauptdurchmesser des Ellipsoides. Folglich wird eine entweder durch SS' oder durch TT' zur Ebene der Zeichnung senkrecht gelegte Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Hauptaxen gleich sind, d. h. in einem Kreise schneiden, und die Elongationen längs aller Linien jeder dieser beiden Ebenen sind gleich der Elongation längs der mittleren Hauptaxe des Deformationsellipsoides.

169. Die Betrachtung der Kreisschnitte des Deformationsellipsoids ist äusserst lehrreich und für die Untersuchung des allgemeinen Charakters einer Deformation von bedeutendem Nutzen. Wir wollen zunächst voraussetzen, es finde im Ganzen keine Volumenänderung und längs der mittleren Hauptaxe weder Ausdehnung noch Zusammenziehung statt, d. h. es sei $\beta = 1$ und $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ (§ 162).

Es seien OX und OZ beziehungsweise die Richtungen der Elongation $\alpha - 1$ und der Contraction $1 - \frac{1}{\alpha}$. Ferner sei A irgend ein Punkt des Körpers in seinem anfänglichen Zustande und A_1 derselbe Punkt des geänderten Körpers, so dass $OA_1 = \alpha . OA$ ist.

Fig. 41.



Nehmen wir nun $OC = OA_1$ an, und ist C_1 die Lage desjenigen Körperpunktes, der sich anfänglich in C befand, so werden wir $OC_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot OC$, folglich $OC_1 = OA$ haben. Die beiden Dreiecke COA und C_1OA_1 sind somit congruent.

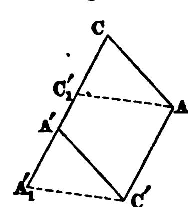
Daraus geht hervor, dass CA bei der hier besprochenen Aenderung des Körpers seine Länge unverändert beibehält und nur eine neue Lage C_1A_1 annimmt. Messen wir ebenso auf der Verlängerung von XO die Strecken OA' und OA_1' ab, die beziehungsweise gleich OA und OA_1 sind, so ergiebt sich, dass die Linie CA' keine Aenderung ihrer Länge erleidet, aber die neue Lage C_1A_1' annimmt.

Betrachten wir jetzt eine anfänglich durch CA gehende zur Ebene der Figur senkrechte Ebene. Dieselbe wird sich in eine Ebene verwandeln, die durch C_1A_1 geht und gleichfalls zur Ebene der Zeichnung senkrecht ist. Alle anfänglich zur Ebene der Zeichnung senkrechten Linien bleiben senkrecht zu dieser Ebene und ändern auch ihre Längen nicht. Von AC haben wir eben bewiesen, dass seine Länge unverändert bleibt. Folglich (§ 158) bleiben alle Linien der eben gezogenen Ebene sowohl hinsichtlich ihrer Länge, wie hinsichtlich ihrer gegenseitigen Neigung unverändert. Auf dieselbe Weise erkennen wir, dass keine Aenderung der Länge und der gegenseitigen Neigung bei allen Linien in derjenigen Ebene erfolgt, welche anfänglich durch CA', später durch $C_1A'_1$ geht und zur Ebene der Figur in beiden Lagen senkrecht ist.

170. Das Wesen der Deformation, die wir jetzt untersuchen, wird durch die folgende Betrachtung bedeutend klarer werden: — Man verlängere CO, mache OC' und OC_1' beziehungsweise gleich OC und OC_1 und verbinde C' mit A, A' durch einfache, C_1' mit A_1, A_1' durch punktirte Linien (Fig. 41). Dann sehen wir, dass der Rhombus $CAC'A'$ (einfache Linien) des Körpers in seinem anfänglichen Zustande sich in den Rhombus $C_1'A_1C_1'A_1'$ (punktirte Linien)

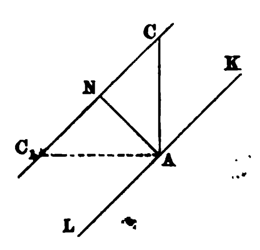
verwandelt. Stellen wir uns jetzt vor, der so deformirte Körper werde als starrer Körper (d. h. so, dass seine Deformation unverändert bleibt) fortbewegt, bis A_1 mit A und C_1' mit C' zusammenfällt, während alle Linien der Figur noch in derselben Ebene bleiben. $A_1' C_1$ wird, wie es die Fig. 42 zeigt, in die Verlängerung von CA' zu liegen kommen, und das anfängliche und das neue Parallelogramm werden auf derselben Basis AC' stehen und zwischen denselben Parallelen AC' und CA_1' liegen; ihre anderen Seiten sind gegen eine auf ihnen senkrechte Gerade beiderseits gleich geneigt. Abgesehen von einer Rotation oder sonst einer absoluten Bewegung des Körpers, die von keiner Form- oder Dimensionenänderung begleitet ist, kann die betrachtete Deformation folglich dadurch hervorgebracht werden, dass man die durch AC' gehende zur Ebene der Zeichnung senkrechte Ebene festhält und unverändert lässt und jede ihr parallele Ebene, ohne ihren Abstand von dieser festen Ebene zu ändern, einen diesem Abstande proportionalen Weg hindurchgleiten lässt. (Verschiedene der festen Ebene parallele Ebenen gleiten verschieden weit; die Wege, durch die sie gleiten, sind ihren Abständen von der festen Ebene proportional.)

Fig. 42.



171. Einfache Schiebung. — Diese Art der Deformation wird eine einfache Schiebung genannt. Unter der Ebene einer Schiebung versteht man eine Ebene, welche senkrecht auf den Ebenen steht, die keine Verzerrung erleiden, und welche den Richtungen, in denen letztere sich relativ zu einander bewegen, parallel ist. Eine einfache Schiebung hat die Eigenschaft, dass (1) von einer Schaar paralleler Ebenen jede unverändert in ihren Dimensionen bleibt, und dass es (2) noch eine zweite Schaar paralleler Ebenen giebt, von denen dasselbe gilt. Wenn die erstere Schaar und die Grösse der Schiebung gegeben sind, so kann man die zweite Schaar auf folgende Weise ermitteln: — Es sei CC_1 die Bewegung eines Punktes einer Ebene in Beziehung auf eine festgehaltene Ebene KL, wobei die Ebene der Zeichnung eine Ebene der Schiebung ist. Wird nun CC_1 halbirt und in der Mitte N

Fig. 43.



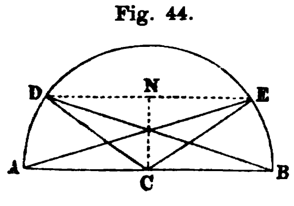
eine Senkrechte NA auf CC_1 errichtet, so behält eine anfänglich durch AC und zuletzt durch AC_1 gehende zur Ebene der Zeichnung senkrechte Ebene ihre Dimensionen unverändert bei.

172. Wir haben eben gesehen, wie man die zweite Schaar der parallelen Ebenen findet, die keine Verzerrung erleiden, wenn man die erstere Schaar kennt und ausserdem weiss, wie weit jede Ebene dieser Schaar sich fortbewegt. Man kann nun die Verziehung auch als ein Gleiten dieser zweiten Schaar paralleler Ebenen in Beziehung auf eine derselben ansehen. Die Grösse dieses relativen Gleitens ist natürlich gleich demjenigen der ersteren Schaar in Beziehung auf eine ihrer Ebenen.

173. Axen einer Schiebung. — Die Hauptaxen einer Schiebung sind beziehungsweise die Linien der grössten Elongation und der grössten Contraction. Sie können mittels der vorhergehenden Construction (§ 171) auf folgende Weise bestimmt werden: — Man halbire in der Ebene der Schiebung den stumpfen und den spitzen Winkel zwischen den Ebenen, welche keine Formänderung erleiden sollen. Die Halbirungslinien sind die gesuchten Hauptaxen in ihren anfänglichen Lagen, und zwar ist die erstere Halbirungslinie die Hauptaxe der Elongation, die letztere die Hauptaxe der Contraction. In Folge der Aenderung des Körpers wird der erstere (stumpfe) Winkel gleich dem letzteren, seinem Supplement (spitz), und die Linien, welche die geänderten Winkel halbiren, sind die Hauptaxen der Deformation in dem geänderten Körper.

Man kann auch auf eine andere Weise verfahren: — Wir nehmen eine Ebene der Schiebung zur Ebene der Zeichnung. Dieselbe werde von einer Ebene einer der beiden Schaaren paralleler Ebenen, die keine Verzerrung erleiden, in der Geraden AB geschnitten. Ueber irgend einem Theil AB dieser Geraden als Durchmesser beschreiben wir einen Halbkreis. Durch den Mittelpunkt C dieses Halbkreises ziehen wir nach der vorhergehenden Construction die Linien CD und CE, welche beziehungsweise die anfängliche und die letzte Lage einer Geraden sind, die ihre Länge unverändert beibehält. Werden dann D und E mit A und B verbunden, so sind DA und DB die anfänglichen, EA und EB die letzten Lagen der Hauptaxen.

Fig. 44.



174. Maass einer Schiebung. — Das Verhältniss ein Schiebung ist das Verhältniss der Elongation und Contraction ihr Hauptaxen. Wenn also eine Hauptaxe in dem Verhältniss 1 : ausgedehnt, die andere folglich (§ 169) in dem Verhältniss $\alpha : 1$ zu sammengezogen wird, so wird α das Verhältniss der Schiebung ge nannt. Es ist zweckmässig, dasselbe allgemein als das Elongatio verhältniss anzusehen, d. h. sein numerisches Maass grösser als Ei zu machen.

In der Fig. 44 ist das Verhältniss von DB zu EB oder vo EA zu DA das Verhältniss der Schiebung.

175. Die Grösse einer Schiebung ist die Grösse der relativ Bewegung, genommen für die Einheit des Abstandes zwischen zw Ebenen, die nicht verzerrt werden.

Man kann leicht darthun, dass diese Grösse gleich dem Ueb schuss des Verhältnisses der Schiebung über seinen reciproken Werth i

Da $DCA = 2\,DBA$ und $\tan DBA = \frac{1}{\alpha}$ ist, so haben wir $\tan DC$ $= \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}$. Es ist aber

$$DE = 2\,CN \tan DCN = 2\,CN \cot DCA,$$

folglich

$$\frac{DE}{CN} = 2\,\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} = \alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

176. Die Ebenen des Körpers, welche bei einer einfachen Schiebung keine Verzerrung erleiden, sind offenbar die Kreisschnitte des Deformationsellipsoides. Wir wiederholen, dass die mittlere Axe im Ellipsoid dieses Falles ungeändert bleibt und eine mittlere Proportionale zwischen der grössten und der kleinsten Axe ist.

177. Verbindung einer Schiebung, einer einfachen Elongation und einer Expansion. — Wenn wir jetzt voraussetzen, dass alle zur Ebene der Schiebung senkrechten Linien in irgend einem Verhältniss ausgedehnt oder zusammengezogen werden, ohne dass dabei in der Ebene der Schiebung selbst eine Aenderung der Längen und der Winkel erfolgte, und wenn wir schliesslich noch annehmen, alle Linien im Körper würden in irgend einem andern festgesetzten Verhältnisse ausgedehnt oder zusammengezogen, so haben wir offenbar (§ 161) die allgemeinste mögliche Art einer Deformation. Ist s das Verhältniss der einfachen Schiebung, in welchem Falle s, 1, $\frac{1}{s}$ die drei Hauptverhältnisse sind, und werden die zur

Ebene der Schiebung senkrechten Linien in dem Verhältniss $1 : m$ ausgedehnt, ohne dass vorläufig eine weitere Aenderung vorgenommen wird, so erhalten wir eine Deformation, deren Hauptverhältnisse

$$s, m, \frac{1}{s}$$

sind. Werden schliesslich alle Linien in dem Verhältniss $1 : n$ ausgedehnt, so haben wir eine Deformation mit den Hauptverhältnissen

$$ns, nm, \frac{n}{s},$$

und es liegt auf der Hand, dass ns, nm, $\frac{n}{s}$ alle möglichen Werthe haben können. Natürlich braucht nm nicht das mittlere Hauptverhältniss zu sein. Werden die Werthe dieser Verhältnisse mit α, β, γ bezeichnet, so haben wir

$$s = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}, \; n = \sqrt{\alpha\gamma}, \; m = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$$

178. Zerlegung einer Deformation. — Wir sehen daraus, dass man jede Deformation (α, β, γ) als das Resultat betrachten kann, das man erhält, wenn man auf eine einfache Schiebung vom Verhältniss $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ $\left(\text{oder von der Grösse } \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)$ in der Ebene der beiden Hauptaxen, die sich auf α und γ beziehen, eine einfache Elongation $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$ in der Richtung der dritten Hauptaxe folgen lässt und zuletzt noch alle Richtungen im Verhältniss $\sqrt{\alpha\gamma}$ gleichförmig ausdehnt.

179. Es leuchtet ein, dass diese drei Componenten der Deformation nicht gerade in der angegebenen Reihenfolge vorgenommen zu werden brauchen. Ihre Reihenfolge ist für das Endresultat ohne Einfluss. So muss, wenn die einfache Elongation zuerst ausgeführt wird, der bereits geänderte Körper dieselbe Schiebung in den Ebenen erhalten, die zur Elongationsrichtung senkrecht stehen, wie ihn der ursprünglich ungeänderte Körper erfährt, wenn die oben festgesetzte Reihenfolge inne gehalten wird. Man kann auch zuerst die allseitige Ausdehnung, dann die Elongation (in einer Richtung) und zuletzt die Schiebung vornehmen, u. s. w.

180. Verschiebung eines starren oder nicht starren Körpers, von dem ein Punkt fest ist. — In den vorhergehenden der

Untersuchung der Deformation gewidmeten Paragraphen haben wir die Aenderungen betrachtet, welche die Längen von Linien des Körpers und die Winkel zwischen Linien und Ebenen desselben erleiden. In besonderen Fällen, die auf besondere Voraussetzungen gegründet waren (dass die Hauptaxen der Deformation ihre Richtung unverändert beibehalten, § 169, oder dass eine Ebene einer der beiden Schaaren von Ebenen, die bei einer einfachen Schiebung keine Verzerrung erleiden, fest bleibt, § 170) haben wir auch die wirklichen Verschiebungen von Körpertheilen aus ihren anfänglichen Lagen ins Auge gefasst. Um aber die Kinematik eines nicht starren festen Körpers zu vervollständigen, haben wir eine allgemeinere Betrachtung über den Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Deformationen anzustellen. Wir können dabei unbeschadet der Allgemeinheit einen Punkt des Körpers als fest voraussetzen, da sich leicht ersehen lässt, welche Wirkung eintreten wird, wenn zu einer Bewegung, bei der ein Punkt fest bleibt, eine von keiner Deformation oder Rotation begleitete blosse Verschiebung hinzutritt.

181. Wir nehmen daher an, ein Punkt des Körpers ändere seine Lage nicht, und irgend einem anderen Punkte (oder auch mehreren Punkten) sei eine Verschiebung mitgetheilt, die nur der Bedingung unterworfen sein soll, dass die ganze Substanz entweder überhaupt keine Deformation, oder eine homogene Deformation erleide.

Es seien in Beziehung auf die anfängliche Lage und den anfänglichen Zustand des Körpers drei beliebige zu einander senkrechte Axen OX, OY, OZ festgelegt. Irgend ein Punkt des Körpers habe anfänglich die Coordinaten x, y, z und nach der mit dem Körper vorgenommenen Aenderung die Coordinaten x_1, y_1, z_1. Beide Male ist dieser Punkt auf die oben angegebenen Axen bezogen, die als ein festes System angesehen werden. Die Bedingung, dass die Deformation überall homogen sei, wird durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt: —

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = [Xx]x + [Xy]y + [Xz]z \\ y_1 = [Yx]x + [Yy]y + [Yz]z \\ z_1 = [Zx]x + [Zy]y + [Zz]z; \end{cases}$$

darin sind $[Xx]$, $[Xy]$, u. s. w. neun Grössen von völlig willkürlichen Werthen, die für alle Werthe von x, y, z dieselben sind.

$[Xx]$, $[Yx]$, $[Zx]$ bezeichnen die drei neuen Coordinaten eines Punktes, der sich anfänglich auf der Axe OX in der Einheit der Entfernung von O befand. Sie sind natürlich den Richtungscosinus der neuen Lage der anfangs mit OX zusammenfallenden Geraden proportional. Aehnliches gilt von $[Xy]$, $[Yy]$, $[Zy]$, u. s. w.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, wo möglich eine Linie des Körpers zu finden, deren Richtung unverändert bleibt, während die durch

$[Xx]$, u. s. w. bestimmte Aenderung erfolgt. Es seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 die anfänglichen und die geänderten Coordinaten eines Punktes einer solchen Linie. Dann muss, wenn ε die Elongation der Linie ist,

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \varepsilon$$

sein. Wir haben also $x_1 = \varepsilon x$, u. s. w., und daher

$$(2)\quad \begin{cases} \{[Xx]-\varepsilon\}\,x + [Xy]\,y + [Xz]\,z = 0 \\ [Yx]\,x + \{[Yy]-\varepsilon\}\,y + [Yz]\,z = 0 \\ [Zx]\,x + [Zy]\,y + \{[Zz]-\varepsilon\}\,z = 0. \end{cases}$$

Werden aus diesen Gleichungen die Verhältnisse $x:y:z$ auf die bekannte Weise eliminirt, so ergiebt sich

$$\begin{gathered}([Xx]-\varepsilon)([Yy]-\varepsilon)([Zz]-\varepsilon) \\ -[Yz][Zy]([Xx]-\varepsilon)-[Zx][Xz]([Yy]-\varepsilon)-[Xy][Yx]([Zz]-\varepsilon) \\ +[Xz][Yx][Zy]+[Xy][Yz][Zx]=0.\end{gathered}$$

Diese kubische Gleichung wird jedenfalls durch wenigstens einen reellen Werth von ε befriedigt, und die beiden anderen Werthe sind entweder beide reell oder beide imaginär. Jeder reelle Werth von ε liefert eine reelle Lösung der Aufgabe, da irgend zwei der vorhergehenden Gleichungen, nachdem darin der für ε gefundene reelle Werth eingesetzt worden ist, reelle Werthe der Verhältnisse $x:y:z$ bestimmen. Wenn der Körper starr ist (d. h. wenn die Verschiebungen der Bedingung unterworfen sind, dass keine Deformation erzeugt werde), so wissen wir schon (§ 95), dass es gerade nur eine dem Körper in seinen beiden Lagen gemeinschaftliche Linie giebt, nämlich die Axe, um die er sich drehen muss, um aus der einen Lage in die andere überzugehen. Eine Ausnahme machen nur zwei besondere Fälle, die unten behandelt werden, nämlich der Fall, in welchem überhaupt keine Rotation erfolgt, sowie derjenige, in welchem der Körper durch zwei rechte Winkel rotirt. Wenn der Körper starr ist, so hat demnach die kubische Gleichung nur eine reelle Wurzel, folglich zwei imaginäre Wurzeln. Die eben gebildeten Gleichungen lösen die Aufgabe, die Rotationsaxe zu finden, wenn die wirklichen Verschiebungen der Punkte gegeben sind, die anfänglich in drei gegebenen festen Coordinatenaxen OX, OY, OZ lagen. Es verdient bemerkt zu werden, dass die praktische Lösung dieser Aufgabe sich auf die eine reelle Wurzel einer kubischen Gleichung gründet, die zwei imaginäre Wurzeln hat.

Andererseits mögen die gegebenen Verschiebungen so beschaffen sein, dass sie eine Deformation des Körpers erzeugen, die von keiner angularen Verschiebung der Hauptaxen der Deformation begleitet ist. Dann bleiben also drei Linien des Körpers ungeändert. Folglich muss die Gleichung in ε drei reelle Wurzeln haben, eine für jede solche Axe, und die drei durch diese Wurzeln bestimmten Linien stehen nothwendig senkrecht auf einander.

Wenn aber keine dieser beiden Bedingungen besteht, so können wir drei reelle Lösungen und drei zu einander schiefwinklige Linien haben, deren Richtungen unverändert bleiben; oder aber wir erhalten nur eine reelle Lösung und daher nur eine Linie, welche ihre Richtung nicht ändert.

Diese Schlüsse lassen sich leicht analytisch beweisen. Wir könne[n] nämlich die kubische Gleichung in folgender Form schreiben: —

$$(3)\left\{\begin{vmatrix}[Xx], [Xy], [Xz]\\ [Yx], [Yy], [Yz]\\ [Zx], [Zy], [Zz]\end{vmatrix} - \varepsilon\left\{\begin{vmatrix}[Yy], [Yz]\\ [Zy], [Zz]\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}[Zz], [Zx]\\ [Xz], [Xx]\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}[Xx], [Xy]\\ [Yx], [Yy]\end{vmatrix}\right\} \\ + \varepsilon^2\{[Xx] + [Yy] + [Zz]\} - \varepsilon^3 = 0.\right.$$

In dem besonderen Falle, in welchem keine Deformation erfolgt, sin[d] $[Xx]$, u. s. w. den Richtungscosinus dreier auf einander senkrechten Gerade[n] nicht bloss proportional, sondern gleich, und wir haben dann nac[h] bekannten geometrischen Sätzen

$$\begin{vmatrix}[Xx], [Xy], [Xz]\\ [Yx], [Yy], [Yz]\\ [Zx], [Zy], [Zz]\end{vmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix}[Yy], [Yz]\\ [Zy], [Zz]\end{vmatrix} = [Xx], \text{ u. s. w.}$$

Die kubische Gleichung verwandelt sich daher in

$$1 - (\varepsilon - \varepsilon^2)\{[Xx] + [Yy] + [Zz]\} - \varepsilon^3 = 0$$

und hat augenscheinlich die Wurzel $\varepsilon = 1$. Diese führt zu der oben e[r]läuterten Lösung; die durch den Werth 1 von ε bestimmte Linie ist eb[en] die Rotationsaxe. Wird der Factor $1 - \varepsilon$ durch Division entfernt, so e[r]halten wir für die beiden übrigen Wurzeln die Gleichung

$$1 - ([Xx] + [Yy] + [Zz] - 1)\varepsilon + \varepsilon^2 = 0,$$

deren Wurzeln imaginär sind, wenn der Coefficient von ε zwischen + [2] und — 2 liegt. Nun ist + 2 offenbar sein grösster Werth, und f[ür] diesen Fall ist jede Wurzel gleich Eins; es findet also keine Rotation sta[tt]. Weiter liefert — 2, der kleinste Werth, den der Coefficient von ε hab[en] kann, ein Paar von Wurzeln, deren jede — 1 ist; dies bedeutet, dass ei[ne] Rotation durch zwei rechte Winkel hindurch erfolgt. In diesem Fa[ll] wird, wie im Allgemeinen, eine Linie (die Rotationsaxe) durch die Gl[ei]chungen (2) bestimmt, nachdem darin + 1 für ε eingesetzt worden i[st]. Für $\varepsilon = -1$ dagegen werden diese Gleichungen durch jede zur eben g[e]nannten senkrechte Linie befriedigt.

Interessant ist der Fall, in welchem bei stattfindender Deformation zwei Wurzeln einander gleich sind. Wir überlassen es dem Leser, ihn weiter zu verfolgen. Er trennt die Fälle, in denen es nur eine Axe giebt, die ihre Richtung nicht ändert, von denjenigen, in welchen drei solche Axen vorhanden sind.

Es sei ferner die Aufgabe gestellt, diejenigen Linien des Körpers zu ermitteln, deren Elongationen am grössten oder kleinsten sind. Zu diesem Zwecke haben wir die Gleichungen zu bilden, welche ausdrücken, dass $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ ein Maximum ist, wenn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ einen constanten Werth hat. Zunächst haben wir

$$(4)\quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(ayz + bzx + cxy),$$

wo

$$(5)\quad \begin{cases} A = [Xx]^2 + [Yx]^2 + [Zx]^2 \\ B = [Xy]^2 + [Yy]^2 + [Zy]^2 \\ C = [Xz]^2 + [Yz]^2 + [Zz]^2 \\ a = [Xy][Xz] + [Yy][Yz] + [Zy][Zz] \\ b = [Xz][Xx] + [Yz][Yx] + [Zz][Zx] \\ c = [Xx][Xy] + [Yx][Yy] + [Zx][Zy] \end{cases}$$

ist. Die Gleichung

$$(6)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(ayz + bzx + cxy) = r_1^2,$$

worin r_1 irgend eine Constante ist, stellt offenbar ein Ellipsoid dar, in das sich eine Kugelfläche des geänderten Körpers vom Radius r_1 verwandeln würde, wenn man den Körper in seinen anfänglichen Zustand zurückversetzte. Die Aufgabe, r_1 zu einem Maximum zu machen, wenn r eine gegebene Constante ist, führt zu den folgenden Gleichungen: —

$$(7)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$(8)\quad \begin{cases} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \\ (Ax + cy + bz)\,dx + (cx + By + az)\,dy + (bx + ay + Cz)\,dz = 0. \end{cases}$$

Andererseits führt die Aufgabe, r zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn r_1 gegeben ist, d. h. die Aufgabe, den grössten und den kleinsten Durchmesser oder die Hauptaxen des Ellipsoides (6) zu finden, zu genau denselben beiden Differentialgleichungen (8) und unterscheidet sich von der ersteren Aufgabe nur dadurch, dass bei ihr statt der Gleichung (7) die Gleichung (6) zur vollständigen Bestimmung der Werthe von x, y, z genommen werden muss. Es werden folglich die Verhältnisse $x : y : z$ in beiden Aufgaben die nämlichen sein, und daher sind die Richtungen, die sie bestimmen, diejenigen der Hauptaxen des Ellipsoides (6). Aus den Eigenschaften des Ellipsoides schliessen wir somit, dass es drei reelle Lösungen giebt, und dass die Richtungen der drei so bestimmten Radien auf einander senkrecht stehen. Die gewöhnliche (Lagrange's) Methode, jene Differentialgleichungen zu behandeln, besteht darin, dass man eine derselben mit einem willkürlichen Factor multiplicirt, sie darauf addirt und die Coefficienten der einzelnen Differentiale gleich Null setzt. Wenden wir diese Methode an, indem wir $-\varepsilon$ zum willkürlichen Factor nehmen und die erstere der beiden Gleichungen damit multipliciren, so folgt

$$(9)\quad \begin{cases} (A-\varepsilon)x + cy + bz = 0 \\ cx + (B-\varepsilon)y + az = 0 \\ bx + ay + (C-\varepsilon)z = 0. \end{cases}$$

Die Bedeutung von ε ergiebt sich, wenn wir die letzten Gleichungen addiren, nachdem dieselben beziehungsweise mit x, y, z multiplicirt worden sind. Wir erhalten auf diese Weise

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(ayz + bzx + cxy) - \varepsilon(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

oder

$$r_1^2 - \varepsilon r^2 = 0,$$

und dies liefert

$$\varepsilon = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2. \tag{10}$$

Werden aus (9) die Verhältnisse $x:y:z$ nach der gewöhnlichen Methode eliminirt, so ergiebt sich die bekannte kubische Gleichung

$$(A-\varepsilon)(B-\varepsilon)(C-\varepsilon)-a^2(A-\varepsilon)-b^2(B-\varepsilon)-c^2(C-\varepsilon)+2\,abc=0, \tag{11}$$

von der wir wissen, dass ihre Wurzeln sämmtlich reell sind. Wird irgend eine dieser drei reellen Wurzeln in (9) für ε gebraucht, so werden die Coefficienten von x, y, z in allen diesen Gleichungen bekannt und diese Gleichungen selbst für die wahren Werthe der Verhältnisse $x:y:z$ in Uebereinstimmung versetzt, so dass wir aus irgend zweien derselben oder auch symmetrisch aus allen dreien, mittels der geeigneten algebraischen Operationen, die gesuchten Verhältnisse bestimmen können. Es erübrigt dann nur noch, die absoluten Grössen von x, y, z zu ermitteln, und das kann, wenn ihre Verhältnisse einmal bekannt sind, mit Hülfe der Gleichung (7) geschehen.

Es ist zu beachten, dass, wenn $[Yz]=[Zy]$, $[Zx]=[Xz]$ und $[Xy]=[Yx]$ ist, die kubische Gleichung (3) die Eigenschaft annimmt, dass die Quadrate ihrer Wurzeln die Wurzeln von (11) sind, und dass die durch (2) bestimmten drei Linien in diesem Falle mit den durch (9) bestimmten identisch sind. Der Leser wird gut thun, dies direct aus den Gleichungen herzuleiten. Es ist eine nothwendige Folge des § 183 (s. unten).

Genau dieselbe Aufgabe haben wir zu lösen, wenn es sich darum handelt, die Radien einer Kugel zu finden, welche auf der Oberfläche der geänderten Figur senkrecht bleiben. Geometrisch betrachtet, leuchtet dies sofort ein. Die Tangentialebene steht auf dem Radius senkrecht, wenn der Radius ein Maximum oder ein Minimum ist. Daher ist jede einer solchen Tangentialebene parallele Ebene des Körpers in dem geänderten wie im anfänglichen Zustande zum Radius senkrecht.

Analytisch würde die Aufgabe, in der letztgenannten Weise gestellt, folgendermassen behandelt werden: — Wir nehmen wieder die oben gebrauchten festen Axen OX, OY, OZ zu Coordinatenaxen. Eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Ebene der geänderten Substanz habe die Gleichung

$$l_1 x_1 + m_1 y_1 + n_1 z_1 = 0. \tag{12}$$

Die Richtungscosinus einer zu dieser Ebene senkrechten Geraden sind natürlich proportional l_1, m_1, n_1. Wenn wir nun, wie in (1), x_1, y_1, z_1 durch ihre Werthe ersetzen, die aus den Coordinaten gebildet sind, welche derselbe Punkt der Substanz anfänglich hatte, so erhalten wir die Gleichung derselben Ebene des Körpers in der anfänglichen Lage. Bei passender Anordnung der Glieder ergiebt sich als diese Gleichung:

$$\begin{aligned}\{l_1[Xx]+m_1[Yx]+n_1[Zx]\}x+\{l_1[Xy]+m_1[Yy]+n_1[Zy]\}y\\ +\{l_1[Xz]+m_1[Yz]+n_1[Zz]\}z=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Die Richtungscosinus der zur Ebene senkrechten Geraden sind den Coefficienten von x, y, z proportional. Diese sollen nun die Richtungscosinus derselben Linie der Substanz sein, welche sich in die Linie $l_1:m_1:n_1$ ver-

wandelte. Wenn also $l:m:n$ den Richtungscosinus dieser Linie in ihrer anfänglichen Lage proportionale Grössen sind, so müssen wir

$$(14)\quad \begin{cases} l_1 [Xx] + m_1 [Yx] + n_1 [Zx] = \varepsilon l \\ l_1 [Xy] + m_1 [Yy] + n_1 [Zy] = \varepsilon m \\ l_1 [Xz] + m_1 [Yz] + n_1 [Zz] = \varepsilon n \end{cases}$$

haben, wo ε willkürlich ist. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, l_1, m_1, n_1 seien die Coordinaten eines gewissen Punktes der Substanz in ihrem geänderten Zustande, und l, m, n seien den anfänglichen Coordinaten desselben Punktes der Substanz proportional. Dann werden unsere Fundamentalgleichungen l_1, m_1, n_1 durch l, m, n ausdrücken, und durch Einsetzung dieser Ausdrücke in die ersten Glieder von (14) erhalten wir bei Benutzung der Abkürzungen (5) genau dieselben Gleichungen für l, m, n, welche wir oben (Gleichungen 9) für x, y, z erhielten.

182. Zerlegung einer Deformation in eine Verzerrung und eine Rotation. — Die vorhergehende Betrachtung lehrt, dass jede homogene Deformation, der man einen Körper unterwirft, im Allgemeinen eine Kugel des Körpers in ein Ellipsoid verwandelt und letzteres um eine bestimmte Axe einen bestimmten Winkel hindurch rotiren lässt. In besonderen Fällen kann die Kugel eine Kugel bleiben. Auch kann es vorkommen, dass keine Rotation erfolgt. Wenn keine Rotation eintritt, so giebt es im allgemeinen Falle drei Richtungen des Körpers (die Axen des Ellipsoides), welche fest bleiben. Tritt Rotation ein, so giebt es zwar im Allgemeinen drei solche Richtungen; dieselben sind aber nicht senkrecht zu einander. Zuweilen behält nur eine Axe ihre Richtung bei.

183. Reine Deformation — Wenn die Axen des Ellipsoides Linien des Körpers sind, deren Richtung unverändert bleibt, so ist die Deformation rein oder von keiner Rotation begleitet. Die Deformationen, die wir bereits betrachtet haben, waren von allgemeinerer Beschaffenheit, nämlich reine Deformationen, verbunden mit Rotationen. Wir wollen jetzt die analytischen Bedingungen für das Vorhandensein einer reinen Deformation aufsuchen.

Es seien $O\Xi, O\Xi', O\Xi''$ die drei Hauptaxen der Deformation und

$$l, m, n;\ l'\, m'\, n';\ l'', m'', n''$$

ihre Richtungscosinus. Ausserdem seien $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Hauptelongationen. Drücken dann ξ, ξ', ξ'' die Lage eines Punktes des ungeänderten Körpers in Beziehung auf $O\Xi, O\Xi', O\Xi''$ aus, so ist seine Lage im Körper, nachdem die Aenderung stattgefunden hat, $\alpha\xi, \alpha'\xi', \alpha''\xi''$. Sind aber x, y, z seine anfänglichen, x_1, y_1, z_1 seine letzten Lagen in Beziehung auf OX, OY, OZ, so haben wir

$$(15)\quad \xi = lx + my + nz,\ \xi' = \text{u. s. w.},\ \xi'' = \text{u. s. w.},$$

und

$$x_1 = l\alpha\xi + l'\alpha'\xi' + l''\alpha''\xi'',\ y_1 = \text{u. s. w.},\ z_1 = \text{u. s. w.}$$

Werden in die letzten Gleichungen die in (15) angegebenen Werthe von ξ, ξ', ξ'' eingesetzt, so erhalten wir die folgenden Gleichungen, welche x_1, y_1, z_1 durch x, y, z ausdrücken:

$$(16)\quad \begin{cases} x_1 = (\alpha l^2 + \alpha' l'^2 + \alpha'' l''^2)x + (\alpha l m + \alpha' l' m' + \alpha'' l'' m'')y \\ \qquad + (\alpha l n + \alpha' l' n' + \alpha'' l'' n'')z \\ y_1 = (\alpha m l + \alpha' m' l' + \alpha'' m'' l'')x + (\alpha m^2 + \alpha' m'^2 + \alpha'' m''^2)y \\ \qquad + (\alpha m n + \alpha' m' n' + \alpha'' m'' n'')z \\ z_1 = (\alpha n l + \alpha' n' l' + \alpha'' n'' l'')x + (\alpha n m + \alpha' n' m' + \alpha'' n'' m'')y \\ \qquad + (\alpha n^2 + \alpha' n'^2 + \alpha'' n''^2)z \end{cases}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den Gleichungen (1) des § 181 liefert

$$(17)\quad \begin{cases} [Xx] = \alpha l^2 + \alpha' l'^2 + \alpha'' l''^2, \text{ u. s. w.} \\ [Zy] = [Yz] = \alpha m n + \alpha' m' n' + \alpha'' m'' n'', \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

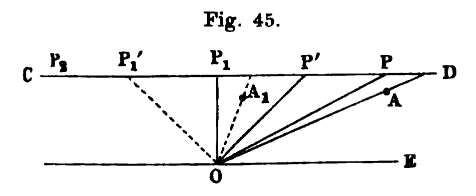
In diesen Gleichungen können l, l', l'', m, m', m'', n, n', n'' aus drei unabhängigen Elementen hergeleitet werden, nämlich aus den drei Winkelcoordinaten (§ 100) eines starren Körpers, von dem ein Punkt fest bleibt. Da noch $\alpha, \alpha', \alpha''$ hinzukommen, so haben wir im Ganzen sechs unabhängige Elemente und können dieselben so bestimmen, dass die sechs Glieder dieser Gleichungen sechs beliebige vorgeschriebene Werthe haben. Die Bedingungen, die nothwendig und hinreichend sind, damit keine Rotation erfolge, sind daher

$$(18)\quad [Zy] = [Yz],\ [Xz] = [Zx],\ [Xy] = [Yx].$$

184. Zusammensetzung reiner Deformationen. — Wenn ein Körper eine Anzahl von Deformationen erleidet, deren jede von keiner Rotation begleitet ist, so wird er in einen Zustand gerathen, in den er im Allgemeinen durch eine reine Deformation und eine Rotation hätte versetzt werden können. Daraus ergiebt sich der bemerkenswerthe Zusatz, dass drei reine Deformationen, die nach einander in irgend einem Stück Materie hervorgebracht werden, und deren jede rotationslos ist, so adjustirt werden können, dass der Körper schliesslich keine Deformation erlitten hat und nur um eine gewisse Axe durch einen gewissen Winkel hindurch gedreht ist. Wir werden später hiervon äusserst wichtige und interessante Anwendungen auf die Bewegung von Flüssigkeiten machen, die, wie (Bd. II) gezeigt werden wird, in jedem Augenblick, d. h. in ihren Elementen ganz rotationslos ist, aber zur Folge haben kann, dass eine ganze flüssige Masse von ihrer anfänglichen Lage aus nur herumgedreht wird, wie wenn sie ein starrer Körper wäre. Die folgende elementare geometrische Untersuchung gewährt uns zwar keinen völlig umfassenden Blick auf den Gegenstand, liefert aber einen strengen Beweis des Satzes, indem sie ihn für einen besonderen Fall nachweist.

Wir wollen wieder, wie oben (§ 171), eine einfache Schiebung betrachten. Ein Punkt O werde festgehalten; die Materie des Körpers, welche in einer die Ebene der Zeichnung senkrecht in CD schneidenden Ebene enthalten ist, bewege sich in dieser Ebene parallel CD von der Rechten zur Linken; dasselbe finde in den Ebenen statt, welche dieser Ebene parallel sind, und zwar seien die Grössen dieser Bewegungen den Abständen ihrer Ebenen von O proportional. Wir betrachten zunächst eine Schiebung von P nach P_1, dann eine solche von P_1 bis zu P_2. O sei in einer durch P_1 gehenden zu CD senkrechten Geraden angenommen. Die Schiebung von P nach P_1 ist natürlich dieselbe, wie die von P' nach P_1', wenn $P'P_1' = PP_1$ ist. Nehmen wir z. B. an, es sei $P_1P' = P_1'P_1 = \frac{1}{2} P_1P$. Nun ist, wie wir oben (§ 173) gesehen haben, die Linie des Körpers, welche die Hauptaxe der Contraction in der Schiebung von P' bis P_1' ist, die Gerade OA, die beim Beginn der Bewegung den Winkel $P'OE$ halbirt, und die Gerade OA_1, die am Ende der Bewegung den Winkel $P_1'OE$ halbirt. Der zwischen diesen beiden Linien enthaltene Winkel ist die Hälfte des Winkels $P_1'OP'$, d. h. gleich P_1OP'. Wenn also, während die Schiebung von P' nach P_1' oder, was dasselbe ist, die Schiebung von P nach P_1 erfolgt, die Ebene CD in der Ebene der Zeichnung durch einen Winkel von der Grösse des Winkels P_1OP' in derselben Richtung wie der Zeiger einer Uhr rotirt, so wird die Schiebung schliesslich keine Rotation ihrer Hauptaxen herbeigeführt haben. (Denken wir uns die Figur gedreht, bis OA_1 längs OA liegt. Die wirkliche und die eben gedachte Lage von CD werden uns zeigen, wie diese Ebene des Körpers sich während einer solchen rotationslosen Schiebung bewegt hat.)

Fig. 45.



Es werde jetzt der zweite Schritt, von P_1 nach P_2, ausgeführt und dadurch die ganze Schiebung von P bis P_2, die wir betrachten wollten, vollendet. Eine solche zweite partielle Schiebung besteht in einer der neuen (in der letzten Parenthese vorgestellten) Lage von CD parallelen Bewegung, und um auch sie wie die vorhergehende rotationslos zu machen, müssen wir CD in derselben Weise wie früher durch einen $P_1'OP_1$ gleichen Winkel weiter herumdrehen. Um also beide Schritte rotationslos zu machen, haben

wir die Ebene CD durch einen $P_1'OP'$ gleichen Winkel drehen müssen. Wenn wir aber gleich die ganze Schiebung PP_2 vornehmen, so ist, um die Rotation aufzuheben, eine Drehung von CD nur durch den Winkel P_1OP erforderlich, welcher um den Ueberschuss von P_1OP' über $P'OP$ kleiner als $P_1'OP'$ ist. Die Resultante der beiden Schiebungen PP_1, P_1P_2, deren jede einzeln der Rotation beraubt wird, ist danach eine einzige Schiebung PP_2 und eine Rotation ihrer Hauptaxen, die in der Richtung der Zeiger einer Uhr einen Winkel von der Grösse $P'OP_1 - POP'$ hindurch erfolgt.

185. Führt man die beiden partiellen Schiebungen jede ohne Rotation aus, und kehrt von ihrer Resultante in einer einzigen rotationslosen Schiebung zurück, so wird der Körper dem Vorhergehenden zufolge schliesslich nicht deformirt, aber in der Richtung der Zeiger einer Uhr durch einen Winkel von der Grösse $P'OP_1 - POP'$ hindurch gedreht sein.

Wenn ein Körper, von dem ein Punkt festgehalten wird, nach drei beliebigen zu einander senkrechten Linien als Hauptaxen deformirt wird, und letztere in Beziehung auf die Coordinatenaxen OX, OY, OZ ihre Richtungen unverändert beibehalten, so ist (§ 183) der allgemeinste mögliche Ausdruck für die Verschiebung, welche irgend einer seiner Punkte erfährt: —

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax + cy + bz \\ y_1 &= cx + By + az \\ z_1 &= bx + ay + Cz. \end{aligned}$$

Wenn der so deformirte Körper aufs Neue eine Deformation erleidet, die von keiner Rotation begleitet ist, so werden die allgemeinsten möglichen Ausdrücke für die Coordinaten x_2, y_2, z_2 der Lage, in welche der Punkt x_1, y_1, z_1 gebracht wird, folgende sein: —

$$\begin{aligned} x_2 &= A_1x_1 + c_1y_1 + b_1z_1 \\ y_2 &= c_1x_1 + B_1y_1 + a_1z_1 \\ z_2 &= b_1x_1 + a_1y_1 + C_1z_1. \end{aligned}$$

Wenn man hierin für x_1, y_1, z_1 die vorhergehenden Ausdrücke einsetzt, welche diese Coordinaten als Functionen der anfänglichen Coordinaten x, y, z des Punktes darstellen, so erhält man für die Coordinaten der Lage in welche der in Rede stehende Punkt durch die beiden Deformationen versetzt wird, die folgenden Formeln: —

$$\begin{aligned} x_2 &= (A_1A + c_1c + b_1b)x + (A_1c + c_1B + b_1a)y + (A_1b + c_1a + b_1C)z \\ y_2 &= (c_1A + B_1c + a_1b)x + (c_1c + B_1B + a_1a)y + (c_1b + B_1a + a_1C)z \\ z_2 &= (b_1A + a_1c + C_1b)x + (b_1c + a_1B + C_1a)y + (b_1b + a_1a + C_1C)z \end{aligned}$$

Die resultirende Verschiebung ist daher im Allgemeinen nicht rotationslos; denn, wie wir unmittelbar sehen, die Bedingungen (18) des § 183 sind im Allgemeinen nicht erfüllt. So sehen wir z. B., dass der Coefficient

von y in dem Ausdruck von x_2 nicht nothwendig gleich dem Coefficienten von x in dem Ausdruck von y_2 ist.

Zusatz. — Wenn beide Deformationen unendlich klein sind, so ist die resultirende Verschiebung eine reine rotationslose Deformation. Es ist dann nämlich jede der Grössen A, B, C, A_1, B_1, C_1 unendlich wenig von der Einheit verschieden und jede der Grössen a, b, u. s. w. unendlich klein. Wir können also alle Producte je zweier der letzteren Grössen vernachlässigen und ebenso jedes Product, das durch Multiplication einer der letzteren Grössen mit der Differenz zwischen der Einheit und einer der sechs ersteren Grössen entsteht. Für die resultirende Verschiebung ergiebt sich also

$$\begin{aligned} x_2 &= A_1 A x + (c + c_1) y + (b + b_1) z \\ y_2 &= (c_1 + c) x + B_1 B y + (a + a_1) z \\ z_2 &= (b_1 + b) x + (a_1 + a) y + C_1 C z, \end{aligned}$$

und diese Ausdrücke stellen eine Deformation dar, die von keiner Rotation begleitet ist.

186. Verschiebung einer Curve. — Die Messung der Rotation in einem deformirten elastischen festen Körper oder in einer in Bewegung begriffenen Flüssigkeit wird bedeutend erleichtert, wenn man die Verschiebung irgend einer Linie der Substanz abgesondert betrachtet. Dieser Umstand veranlasst uns zu einer kurzen Abschweifung über die Verschiebung einer Curve, die entweder einer continuirlichen festen oder flüssigen Masse angehören oder eine in irgend einer Lage gegebene elastische Schnur sein kann. Die Sätze, zu denen wir gelangen werden, sind natürlich auf eine biegsame aber unausdehnbare Schnur (§ 14) als auf einen besonderen Fall anwendbar.

Wir machen darauf aufmerksam, dass die Verschiebungen, die wir zu betrachten haben, nicht bloss von den Curven, welche die gegebene Linie in ihren verschiedenen Lagen nach einander bildet, sondern auch davon abhängen, wie sich die Punkte dieser Curven einander entsprechen.

Tangentiale Verschiebung. — Wir haben zunächst zu erklären, was wir unter tangentialer Verschiebung verstehen werden: Wir denken uns die noch unverschobene Curve in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner gleicher Theile zerlegt. Darauf multipliciren wir die tangentiale Componente der Verschiebung jedes Theilpunktes mit der Länge eines der unendlich kleinen Curvenbogen. Die Summe aller dieser Producte ist die ganze tangentiale Verschiebung der Curve, längs der anfänglichen Lage gerechnet. Wird in derselben Weise mit der verschobenen Curve ver-

fahren, so erhält man die ganze tangentiale Verschiebung. längs der neuen Lage gerechnet.

187. Vergleich der auf beide Arten, die tangentiale Verschiebung zu rechnen, erhaltenen Resultate. — Hat man die ganze tangentiale Verschiebung einer Curve zuerst längs der späteren Lage, darauf längs der anfänglichen Lage gerechnet, so übertrifft das erstere Resultat das zweite um das halbe Rechteck aus der Summe und der Differenz der absoluten Verschiebungen der Endpunkte. Dies Rechteck ist positiv zu rechnen, wenn die Verschiebung des Endpunktes, nach welchem zu die tangentialen Componenten positiv gerechnet werden, diejenige des anderen Endpunktes übertrifft. Für diesen Satz lässt sich ein geometrischer Beweis geben, den der Leser leicht selbst finden wird.

Der analytische Beweis ist folgender: — Es seien x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes P in der noch unverschobenen Curve, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes P_1, in welchen derselbe Curvenpunkt P versetzt wird. Ferner seien dx, dy, dz die Zunahmen der drei Coordinaten, welche irgend einem unendlich kleinen Bogen ds der ersteren Curve entsprechen, so dass

$$ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$$

ist, und es gelte eine analoge Bezeichnung für das entsprechende Element der verschobenen Curve. Endlich bezeichne ϑ den Winkel zwischen der Geraden PP_1 und der durch P an die unverschobene Curve gelegten Tangente, so dass wir

$$\cos\vartheta = \frac{x_1 - x}{D}\frac{dx}{ds} + \frac{y_1 - y}{D}\frac{dy}{ds} + \frac{z_1 - z}{D}\frac{dz}{ds}$$

haben, wo die absolute Grösse der Verschiebung der Kürze wegen durch D ausgedrückt, also

$$D = \{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\}^{1/2}$$

ist. Es ergiebt sich daraus

$$D\cos\vartheta\, ds = (x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir

$$D\cos\vartheta_1\, ds_1 = (x_1 - x)\,dx_1 + (y_1 - y)\,dy_1 + (z_1 - z)\,dz_1,$$

folglich ist

$$D\cos\vartheta_1\, ds_1 - D\cos\vartheta\, ds = (x_1 - x)\,d(x_1 - x) + (y_1 - y)\,d(y_1 - y) + (z_1 - z)\,d(z_1 - z),$$

oder

$$D\cos\vartheta_1\, ds_1 - D\cos\vartheta\, ds = \tfrac{1}{2}\,d(D^2).$$

Um nun die Differenz zwischen den auf beide Arten gerechneten tangentialen Verschiebungen zu erhalten, haben wir nur den letzten Ausdruck zu integriren. Es ergiebt sich

$$\int D\cos\vartheta_1\, ds_1 - \int D\cos\vartheta\, ds = \tfrac{1}{2}(D''^2 - D'^2) = \tfrac{1}{2}(D'' + D')(D'' - D'),$$

wo D'' und D' die Verschiebungen der beiden Endpunkte bezeichnen.

188. Tangentiale Verschiebung einer geschlossenen Curve. — Für die ganze tangentiale Verschiebung einer geschlossenen Curve erhält man denselben Werth, man mag sie längs der anfänglichen oder längs der späteren Lage der Curve berechnen.

189. Bei zwei in denselben Punkten endigenden Bogen erhält man für die ganze tangentiale Verschiebung vom einen zum anderen denselben Werth, man mag sie längs des einen oder längs des anderen Bogens berechnen.

190. Rotation einer starren geschlossenen Curve. — Wenn eine starre geschlossene Curve um eine beliebige Axe durch einen beliebigen Winkel hindurch rotirt ist, so ist die ganze tangentiale Verschiebung gleich dem Product aus dem Sinus des Winkels in die doppelte Fläche ihrer Projection auf eine zur Axe senkrechte Ebene.

(a.) Satz, die tangentiale Verschiebung in einem festen Körper betreffend, diese ausgedrückt durch die Componenten der Deformation. — Die ganze tangentiale Verschiebung einer geschlossenen Curve eines homogen deformirten festen Körpers ist gleich

$$2(P\omega + Q\varrho + R\sigma),$$

wo P, Q, R für ihre anfängliche Lage beziehungsweise die Flächen ihrer Projectionen auf die Ebenen YOZ, ZOX, XOY bezeichnen, und ω, ϱ, σ folgende Werthe haben: —

$$\omega = \tfrac{1}{2}\{[Zy] - [Yz]\}$$
$$\varrho = \tfrac{1}{2}\{[Xz] - [Zx]\}$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}\{[Yx] - [Xy]\}.$$

Dies zu beweisen, setzen wir ferner

$$a = \tfrac{1}{2}\{[Zy] + [Yz]\}$$
$$b = \tfrac{1}{2}\{[Xz] + [Zx]\}$$
$$c = \tfrac{1}{2}\{[Yx] + [Xy]\}.$$

Dann haben wir

$$x_1 = Ax + cy + bz + \sigma y - \varrho z$$
$$y_1 = cx + By + az + \omega z - \sigma x$$
$$z_1 = bx + ay + Cz + \varrho x - \omega y.$$

Nach dem oben hergeleiteten Ausdruck ist also die tangentiale Verschiebung, längs der anfänglichen Lage der Curve gerechnet, gleich

$$\int \{(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz\}$$

$$= \int [\tfrac{1}{2} d\{(A-1)x^2 + (B-1)y^2 + (C-1)z^2 + 2(ayz + bzx + cxy)\}$$
$$+ \omega(y\,dz - z\,dy) + \varrho(z\,dx - x\,dz) + \sigma(x\,dy - y\,dx)].$$

Der erstere Theil, $\int \tfrac{1}{2} d\{\}$, verschwindet für eine geschlossene Curve. Es bleibt also von unserm Ausdruck nur der Theil

$$\omega \int (y\,dz - z\,dy) + \varrho \int (z\,dx - x\,dz) + \sigma \int (x\,dy - y\,dx)$$

übrig, und dieser ist nach den Formeln für die Projection von Flächen gleich

$$2P\omega + 2Q\varrho + 2R\sigma.$$

Denn wir haben (wie in § 36, a) in der xy Ebene

$$\int (x\,dy - y\,dx) = \int r^2\,d\vartheta$$

= der doppelten Fläche der orthogonalen Projection der Curve auf diese Ebene, und Aehnliches gilt für die übrigen Integrale.

(b.) Hieraus und aus § 190 folgt, dass, wenn der Körper starr ist, seine etwaige Verschiebung also nur in einer Rotation besteht, $[Zy]-[Yz]$ gleich dem doppelten Product des Sinus des Rotationswinkels in den Cosinus des Neigungswinkels der Rotationsaxe gegen die Coordinatenaxe OX ist.

(c.) Bei jeder geschlossenen Curve, die, wenn sie eben ist, in der Ebene YOZ liegt und, wenn sie gewunden ist, eine solche Lage hat, dass ihre Projectionen auf die Ebenen ZOX und XOY Null sind, ist allgemein $[Zy]$ — $[Yz]$ das Maass für die ganze tangentiale Verschiebung, dividirt durch die Fläche der Projection auf die Ebene ZOY. Ist irgend eine geschlossene Curve in einer Ebene A gegeben, und sind die Richtungscosinus der Normalen dieser Ebene beziehungsweise den Grössen ω, ϱ, σ proportional, so ist die ganze tangentiale Verschiebung gleich dem doppelten Product der Fläche der Curve in $\sqrt{(\omega^2+\varrho^2+\sigma^2)}$, und die ganze tangentiale Verschiebung jeder beliebigen geschlossenen Curve ist gleich dem doppelten Product der Fläche ihrer Projection auf die Ebene A in $\sqrt{(\omega^2+\varrho^2+\sigma^2)}$.

Bei der Coordinatentransformation transformiren sich ω, ϱ, σ nach dem elementaren Cosinusgesetz, und $\omega^2+\varrho^2+\sigma^2$ ist natürlich eine Invariante, d. h. behält denselben Werth, wenn man von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem anderen übergeht.

(d.) Bei einer rotationslosen homogenen Deformation ist die ganze tangentiale Verschiebung längs irgend einer Curve vom festen Punkte aus bis zu x, y, z, wenn man sie längs der anfänglichen Lage rechnet, gleich

$$\tfrac{1}{2}\{(A-1)x^2+(B-1)y^2+(C-1)z^2+2(ayz+bzx+cxy)\}.$$

Hieraus und aus § 187 folgt, dass die Verschiebung, längs der späteren Lage der Curve gerechnet, folgende ist: —

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\{(A-1)x^2&+(B-1)y^2+(C-1)z^2+2(ayz+bzx+cxy)\}\\ &+\tfrac{1}{2}\{[(A-1)x+cy+bz]^2+[cx+(B-1)y+az]^2\\ &\qquad+[bx+ay+(C-1)z]^2\}.\end{aligned}$$

Ferner ist die ganze tangentiale Verschiebung längs irgend einer Curve von einem Punkte zu einem anderen von der Curve unabhängig, d. h. für eine beliebige Anzahl in demselben Punkte beginnender und in demselben Punkte endigender Curven dieselbe, man mag die Verschiebung in jedem Falle längs der anfänglichen oder längs der späteren Lage gerechnet haben.

(e.) **Heterogene Deformation.** — Man soll aus der absoluten Verschiebung jedes Punktes die Deformation bestimmen. Es seien α, β, γ die in Beziehung auf die festen Axen OX, OY, OZ genommenen Componenten der Verschiebung eines materiellen Punktes P, welcher anfänglich die Coordi-

naten x, y, z hatte, d. h. es seien $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ in dem deformirten Körper die Coordinaten des Punktes, welcher sich vor der Deformation in x, y, z befand.

Betrachten wir in jeder der beiden Lagen die um diesen Punkt herum befindliche Materie. Wir nehmen P als beweglichen Anfangspunkt an. Irgend ein anderer P nahe liegender Punkt habe in Beziehung auf dies neue System anfänglich die Coordinaten ξ, η, ζ, nach der Deformation die Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1.

Dieser letzterwähnte Punkt wird in Beziehung auf die festen Axen OX, OY, OZ anfänglich die Coordinaten

$$x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta,$$

später die Coordinaten

$$x + \alpha + \xi_1,\ y + \beta + \eta_1,\ z + \gamma + \zeta_1$$

haben, d. h. es sind

$$\alpha + \xi_1 - \xi,\ \beta + \eta_1 - \eta,\ \gamma + \zeta_1 - \zeta$$

die Componenten der Verschiebung des Punktes, welcher anfänglich die Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ hatte, oder, was dasselbe ist, jene Grössen sind die Werthe von α, β, γ, wenn sich x, y, z in

$$x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta$$

verwandelt hat.

Hieraus folgt nach dem Taylor'schen Satze, wenn man nur die ersten Potenzen von ξ, η, ζ beibehält, die höheren Potenzen und die Producte dieser Grössen aber vernachlässigt,

$$\xi_1 - \xi = \frac{d\alpha}{dx}\xi + \frac{d\alpha}{dy}\eta + \frac{d\alpha}{dz}\zeta$$

$$\eta_1 - \eta = \frac{d\beta}{dx}\xi + \frac{d\beta}{dy}\eta + \frac{d\beta}{dz}\zeta$$

$$\zeta_1 - \zeta = \frac{d\gamma}{dx}\xi + \frac{d\gamma}{dy}\eta + \frac{d\gamma}{dz}\zeta.$$

Vergleichen wir diese Ausdrücke mit den Formeln (1) des § 181, so sehen wir, dass sie die Aenderungen der Coordinaten irgend eines verschobenen Punktes eines Körpers in Beziehung auf drei durch einen Punkt des Körpers gehende zu einander senkrechte Axen von festen Richtungen ausdrücken, wenn alle anderen Punkte desselben in Beziehung auf diesen einen Punkt in einer Weise verschoben werden, die nur der Bedingung unterworfen ist, eine homogene Deformation zu geben. Dies lehrt uns, dass um jeden Punkt herum für die Entfernungen, die so klein sind, dass nur die ersten Terme der Taylor'schen Entwicklung für die Verschiebungsdifferenzen eine merkliche Grösse haben, die Deformation als homogen angesehen werden darf. Wir schliessen daraus, dass die Richtungen der Hauptaxen der Deformation in jedem Punkte (x, y, z), die Grössen der längs derselben stattfindenden Elongationen der Materie, sowie die tangentialen Verschiebungen in geschlossenen Curven nach den oben dargelegten allgemeinen Methoden gefunden werden, wenn man

$$[Xx] = \frac{d\alpha}{dx} + 1,\ [Xy] = \frac{d\alpha}{dy},\qquad [Xz] = \frac{d\alpha}{dz},$$
$$[Yx] = \frac{d\beta}{dx},\qquad [Yy] = \frac{d\beta}{dy} + 1,\ [Yz] = \frac{d\beta}{dz},$$
$$[Zx] = \frac{d\gamma}{dx},\qquad [Zy] = \frac{d\gamma}{dy},\qquad [Zz] = \frac{d\gamma}{dz} + 1$$

nimmt. Wenn jede dieser neun Grössen constant (d. h. für alle Werthe von x, y, z dieselbe) ist, so ist die Deformation homogen, sonst nicht.

(f.) Die Bedingung dafür, dass die Deformation unendlich klein sei, ist, dass jede der Grössen

$$\frac{d\alpha}{dx},\ \frac{d\alpha}{dy},\ \frac{d\alpha}{dz},$$
$$\frac{d\beta}{dx},\ \frac{d\beta}{dy},\ \frac{d\beta}{dz},$$
$$\frac{d\gamma}{dx},\ \frac{d\gamma}{dy},\ \frac{d\gamma}{dz}$$

unendlich klein sei.

(g.) **Allgemeinste Bewegung einer Materie.** — Diese Formeln gelten für die allgemeinste mögliche Bewegung einer jeden Substanz und können als die Fundamentalgleichungen der Kinematik angesehen werden. Führen wir die Zeit als unabhängig Veränderliche ein, so erhalten wir für die den festen Axen OX, OY, OZ parallelen Geschwindigkeitscomponenten u, v, w die folgenden Ausdrücke: —

$$u = \frac{d\alpha}{dt},\ v = \frac{d\beta}{dt},\ w = \frac{d\gamma}{dt};$$

x, y, z, t sind unabhängig Veränderliche, α, β, γ Functionen dieser Grössen.

(h.) Führen wir die Bedingung ein, dass keine Linie des Körpers irgend eine Ausdehnung erfahre, so gelangen wir zu den allgemeinen Gleichungen für die Kinematik eines starren Körpers, die uns jedoch schon zur Genüge beschäftigt hat. Um dies auszudrücken, wird man sechs Bedingungsgleichungen zwischen den neun Grössen $\frac{d\alpha}{dx}$, u. s. w. aufzustellen haben, die in diesem Falle sämmtlich in Beziehung auf x, y, z constant sind. Es bleiben noch drei willkürliche unabhängige Elemente übrig, um irgend eine angulare Bewegung des starren Körpers auszudrücken.

(i.) **Rotationslose Deformation.** — Wenn der neue Zustand zum anfänglichen in einer solchen Beziehung steht, dass jeder Theil des Körpers aus seiner anfänglichen Lage und Deformation in die neue durch eine Translation und eine rotationslose Deformation übergehen kann, d. h. wenn in jedem Punkte die drei Hauptaxen der Deformation Linien der Substanz sind, die ihren Parallelismus beibehalten, so müssen wir nach § 183 (18)

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy},\ \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\alpha}{dz},\ \frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}$$

haben, und wenn diese Gleichungen erfüllt sind, so ist die Deformation

rotationslos. Diese drei Gleichungen drücken aber nicht mehr und nicht weniger aus, als dass

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

das Differential einer Function dreier unabhängig Veränderlichen ist. Wir erhalten also den bemerkenswerthen Satz (und seine Umkehrung), dass, wenn $F(x, y, z)$ eine beliebige Function der Coordinaten irgend eines Punktes eines Körpers bezeichnet, und wenn jeder solche Punkt aus seiner gegebenen Lage (x, y, z) in einen Punkt verschoben wird, welcher die Coordinaten

$$(1) \qquad x_1 = x + \frac{dF}{dx},\ y_1 = y + \frac{dF}{dy},\ z_1 = z + \frac{dF}{dz}$$

hat, die Hauptaxen der Deformation in jedem Punkte Linien der Substanz sind, die ihren Parallelismus behalten haben. Die Rückverschiebung von (x_1, y_1, z_1) nach (x, y, z) genügt derselben Bedingung; es muss daher

$$(2) \qquad x = x_1 + \frac{dF_1}{dx_1},\ y = y_1 + \frac{dF_1}{dy_1},\ z = z_1 + \frac{dF_1}{dz_1}$$

sein, wo F_1 eine Function von x_1, y_1, z_1 bezeichnet, und $\frac{dF_1}{dx_1}$, u. s. w. die in Beziehung auf dieses System von Veränderlichen genommenen partiellen Differentialquotienten von F_1 sind. Die Beziehung zwischen F und F_1 ist offenbar

$$(3) \qquad F + F_1 = -\tfrac{1}{2} D^2,$$

wo

$$(4) \qquad D^2 = \frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2} = \frac{dF_1^2}{dx_1^2} + \frac{dF_1^2}{dy_1^2} + \frac{dF_1^2}{dz_1^2}$$

ist. Dies lässt sich natürlich mittels der gewöhnlichen analytischen Methode beweisen, nach der man x, y, z durch x_1, y_1, z_1 ausdrückt, wenn die letzteren Grössen durch (1) als Functionen der ersteren gegeben sind.

(j.) Es seien α, β, γ drei beliebige Functionen von x, y, z. Ferner seien dS irgend ein Element einer Oberfläche, l, m, n die Richtungscosinus ihrer Normalen.

Dann ist

$$\iint dS \left\{ l\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + m\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) + n\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}$$
$$= \int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz),$$

wo das erstere Integral sich über irgend eine von einer geschlossenen Curve begrenzte krummlinige Fläche erstreckt, und das zweite, für welches man auch

$$\int ds\left(\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds}\right)$$

schreiben kann, um die Peripherie dieser Curve herum zu integriren ist. Diesen Satz zu beweisen, hat man nur zu bemerken, dass

$$l\,dS = dy\,dz,\ m\,dS = dz\,dx,\ n\,dS = dx\,dy$$

ist, und zu zeigen, dass zwischen den bezeichneten Grenzen

$$\int\int\frac{d\alpha}{dz}dz\,dx-\int\int\frac{d\alpha}{dy}dx\,dy=\int\alpha\frac{dx}{ds}ds,\text{ u. s. w.}$$

ist.

(k.) Es ist bemerkenswerth, dass der Ausdruck

$$\int\int dS\left\{l\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+m\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+n\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right\}$$

für alle Oberflächen, welche eine gemeinschaftliche krummlinige Umgrenzung haben, denselben Werth hat. Wenn α, β, γ die Componenten einer Verschiebung aus (x, y, z) sind, so ist dieser Ausdruck die ganze tangentiale Verschiebung um die genannte krummlinige Umgrenzung, die eine geschlossene Curve ist. Er wird daher Null sein, wenn die Verschiebung jedes Theils ohne Rotation erfolgt, und wenn er von Null verschieden ist, so ersehen wir aus den obigen Sätzen und Zusätzen, welches das genaue Maass der Rotation ist.

Verschiebungsfunction. — (l.) Endlich sehen wir, welche Bedeutung $\int(\alpha\,dx+\beta\,dy+\gamma\,dz)$ oder die sogenannte „Verschiebungsfunction" in dem Falle hat, wo keine Rotation stattfindet. Es ist die ganze tangentiale Verschiebung längs irgend einer Curve von dem festen Punkte O an bis zum Punkte $P(x, y, z)$. Diese ganze tangentiale Verschiebung ist längs aller zwei beliebige Punkte verbindenden Curven die nämliche und zwar gleich der Differenz der Werthe, welche die Verschiebungsfunctionen in jenen Punkten haben.

191. „Continuitätsgleichung." — Da bei keiner Bewegung oder Wirkung in der Natur eine Vernichtung oder eine Erzeugung von Materie stattfinden kann, so muss die zu irgend einer Zeit in irgend einem Raum enthaltene Flüssigkeitsmenge gleich der anfänglich darin enthaltenen sein, vermehrt um die ganze eingetretene und vermindert um die ganze ausgetretene Flüssigkeit. Drückt man diesen Gedanken in einer Form aus, die jeden Theil einer in Bewegung befindlichen Flüssigkeit vollkommen umfasst, so gelangt man zu einer Formel, die ganz unnöthiger Weise den verwirrenden Namen „Continuitätsgleichung" erhalten hat.

192. Es bieten sich uns zwei Wege dar, diesen Gedanken auszudrücken, die beide lehrreiche Betrachtungen über die Eigenschaften der Flüssigkeiten veranlassen. Auf dem einen Wege betrachten wir einen bestimmten Theil der Flüssigkeit, folgen ihm in seinen Bewegungen und drücken aus, dass die mittlere Dichtigkeit der Substanz sich umgekehrt wie das Volumen ändert. Wir erhalten auf diese Weise die Continuitätsgleichung in integrirter Form.

Continuitätsgleichung in integrirter Form. — Irgend ein Punkt einer in Bewegung befindlichen Flüssigkeit habe in dem Moment, wo wir

zu rechnen beginnen, die Coordinaten a, b, c und möge nach Ablauf der Zeit t, von diesem Augenblick an gerechnet, eine Lage erreicht haben, deren Coordinaten x, y, z sind. Um die Bewegung vollständig zu bestimmen, haben wir jede dieser drei veränderlichen Coordinaten als eine Function von a, b, c, t zu geben.

Es bezeichnen nun $\delta a, \delta b, \delta c$ die zur Zeit $t = 0$ den Coordinatenaxen parallelen Kanten eines sehr kleinen Flüssigkeitsparallelepipeds. Jeder Theil der Flüssigkeit muss nach § 190 (e), wenn er nur klein genug in allen seinen Dimensionen ist, während der Bewegung annähernd die Bedingung eines überall gleichförmig deformirten Körpers erfüllen. Wenn also $\delta a, \delta b, \delta c$ unendlich klein genommen werden, so muss der entsprechende Flüssigkeitstheil (§ 156) während der Bewegung ein Parallelepiped bleiben.

Wenn a, b, c die anfänglichen Coordinaten eines Eckpunktes dieses Parallelepipeds sind und die zweiten Endpunkte der in (a, b, c) zusammenstossenden Kanten beziehungsweise die Coordinaten $a + \delta a, b, c$; $a, b + \delta b, c$; $a, b, c + \delta c$ haben, so haben dieselben Punkte der Flüssigkeit zur Zeit t die Coordinaten

$$x, y, z;$$
$$x + \frac{dx}{da}\delta a, \quad y + \frac{dy}{da}\delta a, \quad z + \frac{dz}{da}\delta a;$$
$$x + \frac{dx}{db}\delta b, \quad y + \frac{dy}{db}\delta b, \quad z + \frac{dz}{db}\delta b;$$
$$x + \frac{dx}{dc}\delta c, \quad y + \frac{dy}{dc}\delta c, \quad z + \frac{dz}{dc}\delta c.$$

Die Längen und die Richtungscosinus der Kanten sind daher beziehungsweise

$$\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{da^2} + \frac{dz^2}{da^2}\right)^{1/2}\delta a, \quad \frac{\frac{dx}{da}}{\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}}, \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\frac{dx^2}{db^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{db^2}\right)^{1/2}\delta b, \quad \frac{\frac{dx}{db}}{\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}}, \text{ u. s. w.}$$

$$\left(\frac{dx^2}{dc^2} + \frac{dy^2}{dc^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}\delta c, \quad \frac{\frac{dx}{dc}}{\left(\frac{dx^2}{da^2} + \frac{dy^2}{db^2} + \frac{dz^2}{dc^2}\right)^{1/2}}, \text{ u. s. w.},$$

und folglich ist das Volumen dieses Parallelepipeds

$$\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc} - \frac{dx}{da}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{db} + \frac{dx}{db}\frac{dy}{dc}\frac{dz}{da} - \frac{dx}{db}\frac{dy}{da}\frac{dz}{dc} + \frac{dx}{dc}\frac{dy}{da}\frac{dz}{db} - \frac{dx}{dc}\frac{dy}{db}\frac{dz}{da}\right)\delta a\,\delta b\,\delta c,$$

oder, wie man jetzt gewöhnlich schreibt,

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{da}, & \frac{dy}{da}, & \frac{dz}{da} \\ \frac{dx}{db}, & \frac{dy}{db}, & \frac{dz}{db} \\ \frac{dx}{dc}, & \frac{dy}{dc}, & \frac{dz}{dc} \end{vmatrix} \delta a \delta b \delta c.$$

Da nun weder eine Zunahme noch eine Abnahme der in einem Theil der Flüssigkeit enthaltenen Stoffmenge stattfinden kann, so muss die Dichtigkeit oder die auf die Volumeneinheit kommende Stoffmenge in dem unendlich kleinen Theil, den wir betrachtet haben, sich umgekehrt wie das Volumen desselben ändern, wenn dies überhaupt ein anderes wird. Bezeichnet also ϱ_0 die anfängliche und ϱ die Dichtigkeit, welche die Flüssigkeit in der Nähe des Punktes (x, y, z) zur Zeit t hat, so müssen wir

$$(1) \qquad \varrho \begin{vmatrix} \frac{dx}{da}, & \frac{dy}{da}, & \frac{dz}{da} \\ \frac{dx}{db}, & \frac{dy}{db}, & \frac{dz}{db} \\ \frac{dx}{dc}, & \frac{dy}{dc}, & \frac{dz}{dc} \end{vmatrix} = \varrho_0$$

haben, und dies ist die Continuitätsgleichung in integrirter Form.

193. Differentialgleichung der Continuität. — Die Form, in welcher die Continuitätsgleichung gewöhnlich gegeben wird, oder die Differentialgleichung der Continuität, wie wir sie nennen können, drückt aus, dass in jedem Augenblick die verhältnissmässige Verminderung der Dichtigkeit zur Dichtigkeit in demselben Verhältniss steht, wie die verhältnissmässige Zunahme des Volumens eines unendlich kleinen Theils zum Volumen dieses Theils.

Wir wollen dies Verhältniss ermitteln. Ein Punkt der Flüssigkeit, welcher zur Zeit t die Coordinaten x, y, z hat, möge zu irgend einer Zeit $t - dt$ (nicht wenn $t = 0$ ist) die Coordinaten a, b, c haben, so dass nach der gewöhnlichen Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten

$$x - a = \frac{dx}{dt}dt, \; y - b = \frac{dy}{dt}dt, \; z - c = \frac{dz}{dt}dt,$$

oder, wenn u, v, w die den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit dieses Punktes der Flüssigkeit bezeichnen,

$$x - a = u\,dt, \; y - b = v\,dt, \; z - c = w\,dt$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{dx}{da} = 1 + \frac{du}{da}dt, \; \frac{dy}{da} = \frac{dv}{da}dt, \; \frac{dz}{da} = \frac{dw}{da}dt;$$

$$\frac{dx}{db} = \frac{du}{db}dt, \; \frac{dy}{db} = 1 + \frac{dv}{db}dt, \; \frac{dz}{db} = \frac{dw}{db}dt;$$

$$\frac{dx}{dc} = \frac{du}{dc}dt, \; \frac{dy}{dc} = \frac{dv}{dc}dt, \; \frac{dz}{dc} = 1 + \frac{dw}{dc}dt,$$

und da wir alle Glieder fortzulassen haben, welche eine höhere als die erste Potenz von dt enthalten, so wird die Determinante einfach

$$1 + \left(\frac{du}{da} + \frac{dv}{db} + \frac{dw}{dc}\right) dt.$$

Dies drückt also das Verhältniss aus, in welchem das Volumen während der Zeit dt zunimmt. Das entsprechende Verhältniss für die Aenderung der Dichtigkeit ist

$$1 + \frac{D\varrho}{\varrho},$$

wenn ϱ die Dichtigkeit eines und desselben Flüssigkeitstheils bezeichnet und $D\varrho$ das Differential von ϱ ist, welches der im Zeitraum von $t - dt$ bis t erfolgenden Bewegung dieses Theils aus der Lage (a, b, c) in die Lage (x, y, z) entspricht. Wir erhalten folglich

$$\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{dt} + \frac{du}{da} + \frac{dv}{db} + \frac{dw}{dc} = 0. \tag{1}$$

Hier werden ϱ, u, v, w als Functionen von a, b, c und t angesehen, und die durch $\frac{D\varrho}{dt}$ ausgedrückte Aenderung von ϱ ist die verhältnissmässige Grösse der wirklichen Aenderung der Dichtigkeit eines unendlich kleinen Flüssigkeitstheils, welche eintritt, wenn sich das Theilchen aus einer festen Lage (a, b, c) fortbewegt. Wenn wir das Princip der Bezeichnung ändern und ϱ als die Dichtigkeit eines beliebigen Flüssigkeitstheils ansehen, der sich zur Zeit t in der Nähe des festen Punktes (a, b, c) befindet, ferner mit u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten der durch denselben Punkt zu derselben Zeit hindurchgehenden Flüssigkeit bezeichnen, so werden wir

$$\frac{D\varrho}{dt} = \frac{d_t\varrho}{dt} + u\frac{d_a\varrho}{da} + v\frac{d_b\varrho}{db} + w\frac{d_c\varrho}{dc} \tag{2}$$

haben. Nach der gebräuchlichen unvollständigen Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten, welche hier keinen Irrthum veranlassen kann, lassen wir die Indices wieder fort und erhalten dann, wenn der in (2) angegebene Werth für $\frac{D\varrho}{dt}$ in (1) substituirt wird,

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dt} + u\frac{d\varrho}{da} + v\frac{d\varrho}{db} + w\frac{d\varrho}{dc}\right) + \frac{du}{da} + \frac{dv}{db} + \frac{dw}{dc} = 0,$$

oder

$$\frac{d\varrho}{dt} + \frac{d(\varrho u)}{da} + \frac{d(\varrho v)}{db} + \frac{d(\varrho w)}{dc} = 0, \tag{3}$$

und dies ist die Differentialgleichung der Continuität in der Form, in der sie gewöhnlich gegeben wird.

194. Der zweite oben (§ 192) angedeutete Weg führt unmittelbar zur Differentialgleichung der Continuität.

Denken wir uns im Innern einer Flüssigkeit einen festen Raum. Zu irgend einer Zeit wird durch verschiedene Theile der Grenzflächen dieses Raumes Flüssigkeit eintreten, durch andere Theile

austreten. Wenn die Flüssigkeit überall von derselben Dichtigkeit und nicht zusammendrückbar ist, so muss die in dem in Rede stehenden Raume enthaltene Stoffmenge zu allen Zeiten constant, folglich die zu irgend einer Zeit einströmende der zu derselben Zeit ausströmenden Menge gleich sein. Wenn dagegen während irgend einer Periode der Bewegung mehr Flüssigkeit ein- als austritt, so wird in dem Raume eine Verdichtung der Materie erfolgen; eine Verdünnung wird eintreten, wenn mehr Flüssigkeit den Raum verlässt, als in ihn neu hineinkommt. Die für die Zeiteinheit genommene Grösse der Zunahme der mittleren Dichtigkeit der Flüssigkeit in dem betrachteten festen Raume verhält sich in jedem Augenblick zur wirklichen Dichtigkeit, wie die Grösse der Zunahme der in dem Raume enthaltenen Stoffmenge zu dieser ganzen Stoffmenge.

Der Raum S sei ein unendlich kleines Parallelepiped, dessen Kanten α, β, γ den Coordinatenaxen parallel sind, und dessen Mittelpunkt die Coordinaten x, y, z hat, so dass $x \pm \frac{1}{2}\alpha$, $y \pm \frac{1}{2}\beta$, $z \pm \frac{1}{2}\gamma$ die Coordinaten seiner Eckpunkte sind. Zur Zeit t sei ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit im Punkte (x, y, z) oder die mittlere Dichtigkeit im ganzen Raume S. Dann wird die Dichtigkeit zur Zeit $t + dt$ gleich $\varrho + \frac{d\varrho}{dt}dt$ sein, und folglich sind die in S zu den Zeiten t und $t + dt$ enthaltenen Flüssigkeitsmengen beziehungsweise $\varrho\alpha\beta\gamma$ und $\left(\varrho + \frac{d\varrho}{dt}dt\right)\alpha\beta\gamma$. Während der Zeit dt hat also der Raum S die Flüssigkeitsmenge

$$\text{(a)} \qquad -\frac{d\varrho}{dt}\alpha\beta\gamma\,dt$$

verloren (wenn $\frac{d\varrho}{dt}$ positiv ist, so wird natürlich ein absoluter Gewinn da sein).

Es seien nun u, v, w die drei Componenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit (oder eines Flüssigkeitspunktes) in P. Diese Grössen werden Functionen von x, y, z (und, ausser im Falle einer „stationären Bewegung", auch von t abhängig) sein, und sich im Allgemeinen von Punkt zu Punkt continuirlich ändern. Durch diese Erwägung wird jedoch die nachstehende Untersuchung nicht beschränkt; dieselbe bleibt sogar in den Fällen gültig, in denen an gewissen Stellen der Flüssigkeit unstetige Uebergänge der Geschwindigkeit stattfinden, wie man erkennt, wenn man solche Fälle als Grenzfälle von Bewegungen ansieht, bei denen sehr plötzliche aber noch stetige Aenderungen der Geschwindigkeit erfolgen. Wenn ω eine kleine zur x Axe senkrechte ebene Fläche ist, die ihren Schwerpunkt in P hat, so wird das Volumen der in der Zeit dt hindurchfliessenden Flüssigkeit gleich $u\omega dt$, ihre Masse also $\varrho u\omega dt$ sein. Substituiren wir $\beta\gamma$ für ω, so wird die Menge, die durch eine der beiden Flächen $\beta\gamma$ des Parallelepipeds S fliesst, von diesem Ausdruck nur wegen der Variation des Werthes von ϱu verschieden sein; die Flüssigkeits-

mengen, welche durch die beiden Flächen $\beta\gamma$ fliessen, sind daher beziehungsweise

$$\left\{\varrho u - \tfrac{1}{2}\alpha\frac{d(\varrho u)}{dx}\right\}\beta\gamma\,dt$$

und

$$\left\{\varrho u + \tfrac{1}{2}\alpha\frac{d(\varrho u)}{dx}\right\}\beta\gamma\,dt.$$

Folglich ist $\alpha\frac{d(\varrho u)}{dx}\beta\gamma\,dt$ oder $\frac{d(\varrho u)}{dx}\alpha\beta\gamma\,dt$ der Ueberschuss der durch die eine Fläche $\beta\gamma$ ausströmenden über die durch die zweite Fläche $\beta\gamma$ einströmende Flüssigkeitsmenge. Zählen wir die Wirkung der Bewegungen hinzu, welche durch die übrigen Flächen des Parallelepipeds hindurch stattfinden, so erhalten wir die ganze Flüssigkeitsmenge, welche der Raum S während der Zeit dt verloren hat, nämlich

$$\text{(b)} \qquad \left\{\frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz}\right\}\alpha\beta\gamma\,dt.$$

Wird dieser Ausdruck dem oben erhaltenen (a) gleich gesetzt, so folgt

$$\left\{\frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz}\right\}\alpha\beta\gamma\,dt = -\frac{d\varrho}{dt}\alpha\beta\gamma\,dt,$$

und daraus leiten wir

$$\frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d(\varrho v)}{dy} + \frac{d(\varrho w)}{dz} + \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

her, was die gesuchte Gleichung ist.

195. Freiheit und Gebundenheit. — In früheren Paragraphen haben wir mehrmals auf die Anzahl der unabhängig Veränderlichen in einer Verschiebung oder auf die Grade von Freiheit oder Gebundenheit hingewiesen, unter denen die Verschiebung stattfindet. Daher wird es gut sein, eine allgemeine (aber kurze) Uebersicht über diesen Theil unseres Gegenstandes zu geben.

196. Ein freier Punkt hat drei Grade von Bewegungsfreiheit, da die allgemeinste Verschiebung, die er erfahren kann, sich in drei von einander unabhängige Verschiebungen zerlegen lässt, welche drei beliebigen Richtungen beziehungsweise parallel sind. Es ist im Allgemeinen zweckmässig, diese drei Richtungen, nach denen man die Zerlegung vornimmt, rechtwinklig zu einander zu wählen.

Wenn der Punkt gezwungen wird, beständig auf einer gegebenen Oberfläche zu bleiben, so ist ein Grad von Gebundenheit eingeführt, oder es sind nur noch zwei Grade von Freiheit übrig. Wir können nämlich die Normale an die Oberfläche als eine der drei zu einander senkrechten Zerlegungsrichtungen annehmen. Parallel dieser Normale kann keine Verschiebung stattfinden, und es bleiben nur zwei von einander unabhängige Verschiebungen übrig, deren

Richtungen senkrecht zu einander sind und in der Tangentialebe
der Oberfläche liegen.

Wenn der Punkt gezwungen wird, auf jeder von zwei Fläch
zu bleiben, so verliert er zwei Grade von Freiheit und behält n
noch einen übrig. In der That muss er auf der Curve bleibe
welche beiden Flächen gemeinschaftlich ist, und längs einer Cur
giebt es an jeder Stelle nur eine Verschiebungsrichtung.

197. Was weiter den Fall eines freien starren Systems b
trifft, so haben wir offenbar sechs Grade von Freiheit zu betrac
ten, nämlich drei unabhängige in zu einander senkrechten Richtu
gen mögliche Verschiebungen, wie sie ein Punkt hat, und drei u
abhängige Rotationen um drei zu einander senkrechte Axen.

Wenn ein Punkt des Systems fest wird, so verliert dassel
drei Grade von Freiheit; es sind ihm dann nämlich nur die dr
oben erwähnten Rotationen möglich.

Dieser feste Punkt kann und wird im Allgemeinen ein Punk
einer continuirlichen Fläche des Körpers sein, die mit einer feste
continuirlichen Fläche in Berührung ist. Diese Flächen müssen a
„vollkommen rauh" vorausgesetzt werden, so dass ein Gleiten u
möglich ist.

Wenn ein zweiter Punkt festgelegt wird, so verliert der Körpe
zwei weitere Grade von Freiheit, und es bleibt ihm nur die ei
Freiheit, um die Gerade zu rotiren, welche die beiden festen Punkt
verbindet.

Wird noch ein dritter Punkt festgelegt, welcher mit den beide
ersteren nicht in einer Geraden liegt, so kann sich der Körper g
nicht mehr bewegen.

198. Wenn ein Punkt des starren Systems gezwungen wir
auf einer glatten Fläche zu bleiben, so geht ein Grad von Freihe
verloren, und es bleiben noch fünf übrig, nämlich zwei Verschie
bungen in der Tangentialebene der Fläche und drei Rotationen. D
durch jede weitere Beschränkung eines Punktes des Körpers au
eine glatte Fläche ein weiterer Grad von Freiheit verloren geht, s
werden sechs solche Bedingungen die Lage eines Körpers vollstän
dig bestimmen. So kann man eine Flinte, dadurch dass man sech
passend gewählte Punkte ihres Laufs und Schaftes auf sechs co
vexe Theile der Oberfläche eines unbeweglichen starren Körpers leg
so oft man will, wieder in genau dieselbe Lage bringen und ihre
Genauigkeit prüfen.

199. Wenn ein Punkt gezwungen wird, in einer Curve zu
bleiben, so sind noch vier Grade von Freiheit vorhanden.

Wenn zwei Punkte in gegebenen Curven bleiben müssen, so nd vier Grade von Gebundenheit eingeführt, also nur zwei Grade n Freiheit übrig. Eine derselben kann als eine einfache Rotation n die Verbindungslinie der Punkte angesehen werden, welche in nen Curven bleiben müssen, eine Bewegung, welche der Körper fenbar annehmen kann. Es lässt sich zeigen, dass die zweite noch ögliche Bewegung die allgemeinste ist, die bei einem Grad von reiheit vorkommen kann, nämlich eine Translation, verbunden it Rotation in irgend welchem festen Verhältniss, wie bei der ewegung einer Schraubenmutter auf der Schraubenspindel.

Wenn eine Linie eines starren Systems gezwungen wird, sich lbst parallel zu bleiben, so sind noch drei Verschiebungen und ne Rotation möglich. Das ist z. B. bei einem dreibeinigen Stuhl r Fall, der auf einem ganz glatten Brette steht, welches an ein in nem Rahmen frei gleitendes Fallfenster befestigt ist.

Wir brauchen uns aber nicht länger bei diesem Gegenstande fzuhalten. Die Zahl der Combinationen, die man betrachten nnte, ist fast endlos, und die schon gegebenen zeigen hinlänglich, e einfach es ist, in jedem Falle, der sich uns darbieten mag, die rade von Freiheit oder von Gebundenheit zu bestimmen.

200. Ein Grad von Gebundenheit vom allgemeinsten harakter. — Wenn man einen Punkt des Körpers zwingt, auf ner krummen Fläche zu bleiben, so führt man zwar einen Grad n Gebundenheit ein; derselbe ist aber nicht vom allgemeinsten arakter. Ein solcher Grad von Gebundenheit besteht darin, dass an eine Linie des Körpers von jeder longitudinalen Bewegung rückhält, die nicht von einer um diese Linie stattfindenden Rotaon begleitet ist, und zwar einer Rotation, die in einem festen Verltniss zur longitudinalen Bewegung steht; zugleich muss dem Körr jede andere Bewegung gestattet sein. Der Körper kann dann so um jede zu dieser Linie senkrechte Axe frei rotiren (zwei Grade on Freiheit), und in jeder zu derselben Linie senkrechten Richtung rschoben werden (zwei Grade von Freiheit); ausserdem ist ihm die fangs genannte Schraubenbewegung gestattet; er hat also fünf rade von Freiheit, die in Verbindung mit dem einen Grad von bundenheit die sechs Elemente ausmachen.

201. Mechanische Erläuterung dieses Falles. — Es sei ne Schraube in den einen Schaft eines Hooke'schen Schlüssels ngeschnitten und der andere Schaft desselben durch einen zweiten looke'schen Schlüssel mit einem festen Schafte verbunden. Eine

sich auf dieser Schraube drehende Schraubenmutter hat die allgemeinste Art der Bewegung, die bei einem Grad von Gebundenheit möglich ist, oder sie ist einem Grad von Gebundenheit vom allgemeinsten Charakter unterworfen. Sie hat fünf Grade von Freiheit, da sie folgende Bewegungen ausführen kann: 1) sie kann sich auf der Schraubenspindel drehen, während die beiden Hooke'schen Schlüssel in Ruhe bleiben; 2) sie kann um jede der beiden Axen des ersten Hooke'schen Schlüssels oder um irgend eine in der Ebene derselben liegende Axe rotiren (zwei weitere Grade von Freiheit, nämlich die Freiheit um zwei durch einen Punkt gehende Axen zu rotiren); 3) sie kann vermittels der beiden Hooke'schen Schlüssel, indem sie jeden biegt, eine von keiner Rotation begleitete Translation in jeder zu dem Zwischenglied zwischen den beiden Schlüsseln senkrechten Richtung erfahren (zwei weitere Grade von Freiheit). Sie kann aber nicht parallel der Richtung dieses Gliedes verschoben werden, ohne dass eine verhältnissmässige Rotation um diese Richtung eintreten müsste, und ebenso wenig kann eine Rotation um dieses Glied erfolgen, die nicht von einer demselben parallelen Translation von verhältnissmässiger Grösse begleitet wäre.

Man kann wohl kaum einen einfacheren Mechanismus ersinnen, um einen Grad der Gebundenheit vom allgemeinsten Charakter zu erzeugen.

Besonderer Fall (a). — Die Höhe des Schraubenganges sei unendlich (wie bei einer Flinte mit geraden Zügen), d. h. die Schraubenmutter soll frei gleiten, aber sich nicht drehen können. Der eine Grad von Gebundenheit besteht dann darin, dass um eine gewisse Axe keine Rotation soll stattfinden können. Dies ist die Art und der Grad von Freiheit, welche der äussere Ring eines Gyroskops besitzt, dessen Schwungrad sich unendlich schnell dreht. Der äussere Ring kann sich um keine zur Ebene des inneren Ringes senkrechte Axe drehen, wohl aber um jede der beiden zu dieser Richtung senkrechten Axen, nämlich um die Axe des Schwungrads und um die Axe des äusseren Ringes in Beziehung auf den inneren; auch kann er natürlich vollkommen frei in jeder Richtung verschoben werden.

Besonderer Fall (b). — Die Höhe des Schraubenganges sei $= 0$. In diesem Falle kann sich die Schraubenmutter frei um die Axe des Schaftes drehen, aber sich nicht längs derselben bewegen. Die Gebundenheit besteht also einfach darin, dass der Körper keine zur Richtung des Schaftes parallele Translation erfahren kann, während ihm jede andere Bewegung möglich ist. Das ist dasselbe

als wenn irgend ein in dieser Linie liegender Punkt des Körpers auf einer festen Oberfläche bleiben müsste. Um die Reibung besser zu vermeiden, bedient man sich zur Hervorbringung dieser Gebundenheit keiner solchen Fläche, sondern nimmt von unserer letzten Vorrichtung nur das Zwischenglied und den zweiten Hooke'schen Schlüssel (der erstere wird beseitigt) und lässt einen Punkt des Körpers sich als Zapfen in einer am Ende des Zwischengliedes angebrachten Pfanne drehen. Das Ende des Zwischengliedes kann auch eine continuirliche Fläche sein, auf welcher eine continuirliche Fläche des Körpers aufliegt, so dass sie nöthigenfalls rollen oder kreiseln, aber nicht gleiten kann.

Analytischer Ausdruck der Gebundenheit. — Ein Grad von Gebundenheit wird durch eine Gleichung zwischen den sechs Coordinaten ausgedrückt, welche die Lage eines starren Körpers in Beziehung auf einen anderen als fest angesehenen angeben. Es hat dies für den Körper in jeder besonderen Lage die Folge, dass er verhindert wird, diese Lage zu verlassen, ausser vermittels Geschwindigkeitscomponenten (oder unendlich kleinen Bewegungen), die eine gewisse zwischen ihnen bestehende lineare Gleichung erfüllen.

So ist, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ die sechs Coordinaten und $F(\sigma_1 \ldots) = 0$ die Bedingung sind,

$$\frac{dF}{d\sigma_1}\delta\sigma_1 + \ldots = 0$$

die lineare Gleichung, welche die Bewegung durch jede besondere Lage hindurch einschränkt; die der besonderen Lage entsprechenden Werthe von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, u. s. w. sind in $\frac{dF}{d\sigma_1}$ und in jedem der übrigen partiellen Differentialquotienten von F anzuwenden.

Welches Coordinatensystem man nun auch genommen haben mag, wir können diese Gleichung, wenn wir wollen, stets auf eine Gleichung zwischen drei linearen Geschwindigkeiten u, v, w und drei Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ reduciren.

Diese Gleichung sei

$$Au + Bv + Cw + A'\omega_1 + B'\omega_2 + C'\omega_3 = 0.$$

Sie ist der folgenden äquivalent: —

$$q + a\omega = 0,$$

wenn q die Geschwindigkeitscomponente längs oder parallel der Geraden ist, deren Richtungscosinus den Grössen

$$A,\ B,\ C$$

proportional sind, wenn ausserdem ω die Componente der Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe ist, deren Richtungscosinus den Grössen

$$A',\ B',\ C'$$

proportional sind, und wenn endlich

$$a = \sqrt{\frac{A'^2 + B'^2 + C'^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ist.

Man könnte glauben, durch Aenderung des Anfangspunktes liessen sich die Winkelgeschwindigkeiten beseitigen, so dass nur eine lineare Gleichung zwischen den Componenten der Geschwindigkeit der Translation übrig bliebe. Dem ist nicht so. Es werde nämlich der Anfangspunkt in einen Punkt verlegt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind. Die Winkelgeschwindigkeiten um die den alten parallelen neuen Axen werden unverändert bleiben; die linearen Geschwindigkeiten dagegen, welche, in Verbindung mit diesen Winkelgeschwindigkeiten um die neuen Axen, uns ω_1, ω_2, ω_3, u, v, w in Beziehung auf die alten Axen geben, sind (§ 89)

$$u - \omega_3 \eta + \omega_2 \zeta = u',$$
$$v - \omega_1 \zeta + \omega_3 \xi = v',$$
$$w - \omega_2 \xi + \omega_1 \eta = w'.$$

Die Gleichung der Gebundenheit wird also

$$Au' + Bv' + Cw' + (A' + B\zeta - C\eta)\,\omega_1 + \text{u. s. w.} = 0.$$

Nun können wir nicht allgemein ξ, η, ζ so bestimmen, dass ω_1, u. s. w. verschwinden; dies würde nämlich drei Bedingungen erfordern, während die Coefficienten von ω_1, u. s. w., als Functionen von ξ, η, ζ, nicht von einander unabhängig, sondern durch die Relation

$$A(B\zeta - C\eta) + B(C\xi - A\zeta) + C(A\eta - B\xi) = 0$$

verbunden sind. Die einfachste Form, auf die wir jene Gleichung reduciren können, ist

$$lu' + mv' + nw' + a(l\omega_1 + m\omega_2 + n\omega_3) = 0,$$

d. h. jede longitudinale Bewegung einer gewissen Axe muss von einer bestimmten verhältnissmässigen Rotation um diese Axe begleitet sein.

202. **Allgemeine Coordinaten.** — Die im Vorhergehenden entwickelten Principien gehören im Grunde zur allgemeinen Theorie der „Coordinaten" der Geometrie. Die drei Coordinaten jedes der beiden gewöhnlich angewandten Systeme, des rechtwinkligen und polaren, welche erforderlich sind, um die Lage eines Punktes anzugeben, entsprechen den drei Graden von Freiheit, welche ein keiner Beschränkung unterworfener Punkt besitzt. Das allgemeinste Coordinatensystem zur Angabe der Lage eines Punktes besteht aus drei Schaaren von Flächen, wobei der Punkt auf einer Fläche jeder Schaar liegt. Wenn nur eine dieser Flächen gegeben ist, so kann der Punkt irgendwo auf derselben liegen, oder er besitzt, wie wir es oben ausgedrückt haben, zwei Grade von Freiheit. Kommt noch eine zweite und eine dritte Fläche hinzu, auf deren jeder der Punkt liegen muss, so hat er, wie wir sehen, seine ganze Freiheit verloren; mit anderen Worten: seine Lage ist vollständig bestimmt, da sie der Punkt ist, in welchem diese drei Flächen einander schneiden. Die analytischen Mehr-

deutigkeiten, die eintreten, wenn die angewandten Flächen sich in mehr als einem Punkte schneiden, brauchen wir hier nicht zu behandeln.

Um dies analytisch auszudrücken, nehmen wir an, $\psi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\vartheta = \gamma$, wo ψ, φ, ϑ Functionen der Lage des Punktes und α, β, γ Constanten sind, seien die Gleichungen der drei Schaaren von Flächen, und die verschiedenen Werthe jeder Constante geben die verschiedenen Flächen der entsprechenden Schaar. So z. B. wird irgend ein Werth von α eine Fläche der ersten Schaar bestimmen, und ebenso verhält es sich mit den übrigen Constanten. Drei besondere Werthe der drei Constanten bestimmen dann einen besonderen Punkt P, insofern derselbe der Durchschnittspunkt der drei Oberflächen ist, die sie bestimmen. Daher sind α, β, γ die „Coordinaten" des Punktes P, und man kann ihn als „den Punkt (α, β, γ)" bezeichnen. Die Form der Coordinatenflächen des Systems $(\psi, \varphi, \vartheta)$ wird nach irgend einem anderen System, z. B. nach dem rechtwinkligen Ebenensystem durch die Coordinaten x, y, z bestimmt, wenn jede der Grössen ψ, φ, ϑ als Function von (x, y, z) gegeben wird.

203. Ursprung der Differentialrechnung. — Die den drei Coordinatenaxen eines gewöhnlichen rechtwinkligen Systems parallelen Geschwindigkeitscomponenten eines in Bewegung befindlichen Punktes sind, wie wir gesehen haben, die für die Zeiteinheit genommenen Zunahmen der entsprechenden Coordinaten. Sie werden nach Newton's Bezeichnung $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ und nach Leibnitz's Bezeichnung, die wir oben angewandt haben, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ geschrieben. Lagrange hat, wie wir im zweiten Capitel sehen werden, in seiner Mécanique Analytique beide Bezeichnungen mit bewundernswerthem Geschick und Geschmack verbunden. Wird die Bewegung eines Punktes nach dem allgemeinen Coordinatensystem angegeben, so hat man ψ, φ, ϑ als mit der Zeit veränderlich anzusehen. Es werden dann $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}$ oder $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}$ die allgemeinen Componenten der Geschwindigkeit und $\ddot{\psi}, \ddot{\varphi}, \ddot{\vartheta}$, oder $\frac{d\dot{\psi}}{dt}, \frac{d\dot{\varphi}}{dt}, \frac{d\dot{\vartheta}}{dt}$, oder $\frac{d^2\psi}{dt^2}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ die allgemeinen Componenten der Beschleunigung sein.

204. Coordinaten eines beliebigen Systems. — Nach genau denselben Principien können wir Reihen von Coordinaten für

die Bestimmung der Lage und der Bewegung eines materiellen Systems aufstellen, das aus einer endlichen Anzahl starrer Körper oder materieller Punkte besteht, die in irgend einer Weise verbunden sind. Wenn also ψ, φ, ϑ, u. s. w. irgendwelche unabhängig veränderliche Elemente bezeichnen, welche, wenn sie sämmtlich gegeben sind, die Lage und die Configuration des Systems genau angeben — ihre Anzahl ist natürlich gleich derjenigen der Grade von Freiheit, die das System besitzt, — so sind sie die Coordinaten des Systems. Wenn sich das System wirklich bewegt, so drücken ihre in der Zeiteinheit erfolgenden Aenderungen oder $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. das aus, was wir die allgemeinen Componenten der Geschwindigkeit nennen werden, und die Zunahmen, welche $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. in der Zeiteinheit erfahren, sind die Componenten der Beschleunigung des Systems. Wenn das System z. B. aus einem einzigen völlig freien starren Körper besteht, so können von den sechs Grössen ψ, φ, u. s. w. drei die gewöhnlichen Coordinaten eines Punktes des Körpers sein, während die drei anderen Winkelcoordinaten (§ 100) sind, welche die Lage des Körpers in Beziehung auf Axen fixiren, die in gegebenen Richtungen durch diesen Punkt gehen. Es sind dann $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. die drei Componenten der Geschwindigkeit dieses Punktes und, insofern sie den Aenderungen der Winkelcoordinaten entsprechen, die Geschwindigkeiten der drei in § 100 erläuterten angularen Bewegungen. Oder das System möge aus mehreren starren Körpern bestehen, deren jeder von einer Axe getragen wird, und zwar sei die Axe des ersten Körpers absolut fest, die des zweiten fest in Beziehung auf den ersten, die dritte Axe fest in Beziehung auf den zweiten Körper, u. s. w. In diesem Falle wird es nur so viel Coordinaten geben, als starre Körper vorhanden sind. Diese Coordinaten könnten z. B. folgende sein: — Der Winkel zwischen einer Ebene des ersten Körpers und einer durch die erste Axe gehenden festen Ebene; der Winkel zwischen zwei Ebenen, die durch die zweite Axe gehen und deren eine gegen den ersten, die andere gegen den zweiten Körper fest ist, u. s. w. Die Geschwindigkeitscomponenten $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. würden dann sein: — Die Winkelgeschwindigkeit des ersten Körpers in Beziehung auf im Raum festliegende Richtungen; die Winkelgeschwindigkeit des zweiten Körpers in Beziehung auf den ersten, die des dritten in Beziehung auf den zweiten, u. s. w. Oder wenn das System aus einer Anzahl i völlig freier materieller Punkte besteht, so könnte eine seiner $3\,i$ Coordinaten die Summe der Quadrate der Abstände dieser Punkte von einem gewissen Punkte sein, der entweder fest ist oder sich in Beziehung auf das

System in irgend einer Weise bewegt, und die $3i - 1$ übrigen Coordinaten könnten Winkel oder blosse Verhältnisse von Abständen zwischen individuellen Punkten des Systems sein. Es ist aber unnöthig, hier noch mehr Beispiele anzuführen. Wir werden noch genug Erläuterungen des Princips der allgemeinen Coordinaten geben, da wir dasselbe im zweiten Capitel und in anderen Theilen dieses Werkes wirklich anwenden werden.

Zusätze zum ersten Capitel.

A. Ausdehnung des Green'schen Satzes.

Wir müssen hier den Beweis einiger rein analytischen Sätze geben, von denen wir viele und wichtige Anwendungen zu machen haben, nicht nur in der unmittelbar folgenden Theorie der harmonischen Kugelfunctionen, sondern auch in den allgemeinen Theorien der Attraction, der Bewegung von Flüssigkeiten, und der Wärmeleitung, sowie in den praktisch wichtigen Untersuchungen, welche die Elektricität, die magnetische und elektro-magnetische Kraft betreffen.

(a.) Es bezeichnen U und U' zwei Functionen dreier unabhängig Veränderlichen x, y, z, die wir passend als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes P ansehen, und α entweder eine constante Grösse oder eine beliebige Function der Veränderlichen. Ferner bezeichne $\int\int\int dx\,dy\,dz$ eine Integration durch einen begrenzten Raum hindurch, der von einer geschlossenen Oberfläche S umgeben wird, und $\int\int dS$ eine Integration, die sich über die ganze Oberfläche S erstreckt. Endlich bezeichne der Buchstabe δ, wenn er vor irgend eine Function gesetzt wird, die Grösse ihrer Variation in irgend einem Punkte von S, genommen für die Längeneinheit einer Linie, welche zu S normal ist und von innen nach aussen als wachsend betrachtet wird *). Dann ist

$$(1)\left\{\begin{aligned}
&\int\int\int \alpha^2\left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz}\right)dx\,dy\,dz\\
&=\int\int dS.\,U'\alpha^2\delta U-\int\int\int U'\left\{\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)}{dz}\right\}dx\,dy\,dz\\
&=\int\int dS.\,U\alpha^2\delta U'-\int\int\int U\left\{\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU'}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU'}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU'}{dz}\right)}{dz}\right\}dx\,dy\,dz.
\end{aligned}\right.$$

*) Nach dem deutschen Gebrauche des Begriffs einer Function müssen wir hier noch die Bedingung hinzufügen: „Wenn U, U' und α innerhalb des von S umgrenzten Raumes überall eindeutig und continuirlich sind".

Denn wenn wir einen der drei Theile des ersten Gliedes allein nehmen und partiell integriren, so erhalten wir

$$\int\int\int \alpha^2 \frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int\int U'\alpha^2 \frac{dU}{dx}\,dy\,dz$$
$$- \int\int\int U' \frac{d\left(\alpha^2 \frac{dU}{dx}\right)}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Das erste Integral des zweiten Gliedes des letzten Ausdrucks ist zwischen den Grenzen zu nehmen, welche der Oberfläche S entsprechen, d. h. es ist vom negativen zum positiven Ende des innerhalb S liegenden Theils oder der innerhalb S liegenden Theile der durch den Punkt $(0, y, z)$ gehenden Linie x zu nehmen. Bezeichnen nun A_2 und A_1 die Neigung dieser Linie gegen die auswärts an die Oberfläche in solchen Punkten gezogene Normale, in denen jene Linie beziehungsweise in S eintritt und aus S austritt, und sind ferner dS_2 und dS_1 die Elemente der Oberfläche, in denen sie in diesen Punkten durch das auf $dy\,dz$ stehende rechtwinklige Prisma geschnitten wird, so haben wir

$$dy\,dz = -\cos A_2\,dS_2 = \cos A_1\,dS_1.$$

Das betrachtete erste Integral enthält also zwischen den passenden Grenzen die Elemente $U'\alpha^2\frac{dU}{dx}\cos A_1\,dS_1$ und $-U'\alpha^2\frac{dU}{dx}\cos A_2\,dS_2$, von denen das letztere, als der unteren Grenze entsprechend, subtrahirt wird. Da nun, wenn man die ganze Fläche S berücksichtigt, für jedes Element dS_1 ein Element dS_2 vorhanden ist, so ist das erste Integral einfach

$$\int\int U'\alpha^2\frac{dU}{dx}\cos A\,dS,$$

und zwar ist dies für die ganze Oberfläche zu nehmen. Fügt man die entsprechenden Ausdrücke für y und z hinzu und beachtet, dass

$$\frac{dU}{dx}\cos A + \frac{dU}{dy}\cos B + \frac{dU}{dz}\cos C = \delta U$$

ist, wo B und C die Neigungen der durch dS auswärts an die Oberfläche gelegten Normale gegen die durch dS gehenden Linien bezeichnen, welche beziehungsweise den y und z Axen parallel und in den positiven Richtungen gezogen sind, so erkennt man die Wahrheit der Formel (1).

(b.) Weiter mögen U und U' zwei Functionen von x, y, z bezeichnen, die in jedem Punkte von S gleiche Werthe haben, und von denen die erstere für jeden innerhalb S gelegenen Punkt der Gleichung

(2) $$\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)}{dz} = 0$$

genügt.

Wird dann $U' - U = u$ gesetzt, so haben wir

$$(3)\quad \int\int\int\left\{\left(\alpha\frac{dU'}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU'}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU'}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz$$

$$=\int\int\int\left\{\left(\alpha\frac{dU}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz$$

$$+\int\int\int\left\{\left(\alpha\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz.$$

Denn das erste Glied wird dem zweiten identisch gleich, wenn man zu letzterem

$$2\int\int\int\alpha^2\left(\frac{dU}{dx}\frac{du}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{du}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{du}{dz}\right)dx\,dy\,dz$$

addirt. Dieser Ausdruck ist aber nach (1) gleich

$$2\int\int dS.u\alpha^2\delta U-2\int\int\int u\left\{\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)}{dz}\right\}dx\,dy\,dz,$$

folglich gleich Null; das Doppelintegral verschwindet nämlich, weil u der Voraussetzung nach in jedem Punkte von S Null ist, und der zweite Theil oder das dreifache Integral verschwindet der Bedingung (2) wegen.

(c.) Der zweite Theil des zweiten Gliedes von (3) ist seiner Natur nach positiv, vorausgesetzt dass α für jeden innerhalb S gelegenen Punkt (x, y, z) einen reellen Werth hat, der positiv, Null oder negativ sein mag. Folglich ist das erste Glied von (3) grösser als der erste Theil des zweiten Gliedes. Die einzige charakteristische Eigenschaft der Function U ist aber, dass sie der Gleichung (2) genügt; mithin kann nicht auch U' diese Gleichung befriedigen. Mit anderen Worten, wenn U irgend eine Lösung von (2) ist, so kann es keine zweite Lösung geben, welche mit U in jedem Punkte von S übereinstimmt, aber für irgend einen Theil des innerhalb S gelegenen Raumes von U abweicht.

(d.) Es giebt eine Lösung von (2), welche der Bedingung genügt, dass U für jeden Punkt der Oberfläche S einen willkürlichen Werth hat. Es bezeichne nämlich U eine ganz beliebige Function, welche in jedem Punkte von S den gegebenen willkürlichen Werth hat. Ferner bezeichne u irgend eine Function, welche in jedem Punkte von S Null ist und in jedem inneren Punkte irgend einen reellen, endlichen oder unendlich kleinen Werth hat, dessen Zeichen mit dem Zeichen von

$$\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)}{dz}$$

übereinstimmt, so dass u natürlich für jeden inneren Punkt (wenn es deren giebt), für welchen dieser Ausdruck den Werth Null hat, gleichfalls Null ist. Endlich sei noch $U' = U + \vartheta u$, wo ϑ eine beliebige Constante bezeichnet. Wendet man dann die Formeln von (b.) an, nachdem man die-

selben so modificirt hat, dass sie für die geänderten Umstände passen, und bezeichnet der Kürze wegen das Integral

$$\iiint\left\{\left(\alpha\frac{dU}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{dU}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz$$

mit Q und das daraus durch Vertauschung von U und U' gebildete Integral mit Q', so erhält man

$$Q'=Q-2\vartheta\iiint u\left\{\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)\right\}dx\,dy\,dz$$
$$+\vartheta^2\iiint\left\{\left(\alpha\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\alpha\frac{du}{dz}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz.$$

Der Coefficient von -2ϑ ist hier in Folge der Bedingung, unter welcher u gewählt wurde, seiner Natur nach positiv, ausser wenn die Gleichung (2) erfüllt ist, in welchem Falle er den Werth Null hat. Auch der Coefficient von ϑ^2 ist, wenn er nicht gerade Null ist, seiner Natur nach positiv; denn alle Grössen, die er enthält, sind reell. Die letzte Gleichung kann daher in folgender Weise geschrieben werden: —

$$Q'=Q-m\vartheta(n-\vartheta),$$

wo jede der Grössen m, n positiv ist. Dies zeigt, dass, wenn man ϑ irgend einen positiven Werth beilegt, der kleiner als n ist, Q' kleiner als Q gemacht wird, d. h. es lässt sich, ausser wenn die Gleichung (2) befriedigt ist, eine Function U' finden, welche auf S denselben Werth wie U hat und welche, für U in das Integral Q eingesetzt, dieses Integral kleiner macht, als es vorher war. Mit anderen Worten, eine Function U, welche auf der ganzen Oberfläche S irgend einen vorgeschriebenen Werth hat und im Innern von S das Integral Q so klein als möglich macht, muss der Gleichung (2) genügen. Das Integral Q ist aber seiner Natur nach positiv, und daher giebt es eine Grenze, kleiner als welche es nicht gemacht werden kann. Folglich giebt es auch eine der vorgeschriebenen Bedingung unterworfene Lösung von (2).

(e.) Wir haben in (c.) gesehen, dass, wenn es eine Lösung der angegebenen Art von (2) giebt, nur eine solche Lösung vorhanden sein kann, und jetzt sehen wir, dass es wirklich eine giebt. Unsere Betrachtung hat uns also Folgendes gelehrt: — Wenn der Werth der Function U in jedem Punkte irgend einer geschlossenen Oberfläche willkürlich gegeben ist, so bestimmt die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha^2\frac{dU}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\alpha^2\frac{dU}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\alpha^2\frac{dU}{dz}\right)=0$$

den Werth dieser Function unzweideutig für jeden innerhalb der Oberfläche gelegenen Punkt. Dass dieser wichtige Satz auch für den ganzen unendlichen Raum ausserhalb der Oberfläche S gültig bleibt, geht aus dem vorhergehenden Beweise hervor. Nur hat man die Vorsicht anzuwenden, die verschiedenen Functionen, mit denen man zu thun hat, so zu wählen, dass die dreifachen Integrale sämmtlich convergent gemacht werden. S braucht nicht gerade eine einzige geschlossene Fläche zu sein,

sondern kann eine beliebige Anzahl von Oberflächen sein, welche abgesonderte Theile des Raumes einschliessen. Auch der äusserste Fall, in welchem S oder irgend ein abgesonderter Theil von S eine offene Schale, d. h. eine endliche nicht geschlossene Oberfläche ist, ist offenbar nicht ausgeschlossen. Endlich kann S oder irgend ein abgesonderter Theil von S auch eine sich ins Unendliche erstreckende Oberfläche sein, wenn nur der Werth, den man auf derselben der Function U nach Willkür beilegt, so gewählt wird, dass die in Rede stehenden dreifachen und zweifachen Integrale convergent gemacht werden.

B. Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen.

Die mathematische Methode, welche gewöhnlich die Methode der „Laplace'schen Coefficienten" genannt wird, die wir aber die Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen nennen wollen, hat zum Gegenstande, eine beliebige periodische Function zweier unabhängig Veränderlichen in einer Form auszudrücken, die sich für eine umfangreiche Klasse physikalischer Probleme eignet, wo willkürliche Data über eine Kugeloberfläche hin gegeben sind, und daraus die Lösung für jeden Punkt des Raumes abzuleiten.

(a.) Eine harmonische Kugelfunction definiren wir als eine homogene Function V von x, y, z, welche der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \tag{4}$$

genügt. Ihr Grad kann eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, er kann auch gebrochen oder imaginär sein.

(b.) Eine harmonische Kugelflächenfunction ist die Function zweier Winkelcoordinaten oder Kugelflächencoordinaten, in welche sich eine harmonische Kugelfunction auf irgend einer Kugeloberfläche verwandelt, die vom Anfangspunkt O der Coordinaten als Mittelpunkt aus beschrieben ist. Wir werden zuweilen eine Function, die nach der Definition (a.) einfach eine harmonische Kugelfunction ist, eine räumliche harmonische Kugelfunction nennen, wenn wir besonders darauf aufmerksam machen wollen, dass sie nicht auf eine Kugeloberfläche beschränkt ist.

(c.) Eine harmonische Kugelfunction heisst vollkommen, wenn ihr Werth für alle endlichen Werthe der Coordinaten endlich und eindeutig ist.

Eine harmonische Kugelfunction heisst unvollkommen, wenn sie entweder für einen den Mittelpunkt umgebenden Raum nicht überall der Fundamentalgleichung (4) genügt, oder nicht wieder denselben Werth annimmt, während sie um jede geschlossene Curve einmal herumgeht.

(d.) Es wird später gezeigt werden, dass eine vollkommene harmonische Kugelfunction nothwendig entweder eine rationale ganze Function der Coordinaten ist, oder auf eine solche durch einen Factor von der Form $(x^2 + y^2 + z^2)^m$ reducirt werden kann.

(e.) Die allgemeine Aufgabe, harmonische Functionen zu finden, lässt sich kurz so aussprechen: —

Das allgemeinste Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d^2 u}{d y^2} + \frac{d^2 u}{d z^2} = 0 \tag{4}$$

zu finden, welches der Bedingung

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} = p u \tag{5}$$

genügt. Die letzte Gleichung ist bloss der analytische Ausdruck der Bedingung, dass u eine homogene Function von x, y, z sei, deren Grad p eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, oder irgend ein Bruch, oder eine beliebige imaginäre Grösse sein mag.

(f.) Analytische Ausdrücke für eine absolut allgemeine Integration dieser Gleichungen liessen sich wohl ohne grosse Schwierigkeit in verschiedenen Formen ermitteln. Für uns hängt aber der Werth oder das Interesse, das eine solche Untersuchung haben kann, nur davon ab, dass die gefundenen Lösungen im Stande seien, den Bedingungen auf gewissen Umgrenzungsflächen zu genügen, wie sie sich in physikalischen Problemen darbieten. In einer sehr ausgedehnten und wichtigen Klasse von physikalischen Problemen, in denen ein Raum in Betracht kommt, der von einer vollständigen Kugeloberfläche, oder von zwei vollständigen concentrischen Kugeloberflächen, oder von ganz nahezu kugelförmigen geschlossenen Oberflächen begrenzt wird, ist der unter der in (d.) ausgesprochenen Beschränkung integrirte Fall, in welchem p irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist, von der höchsten Bedeutung. Wir werden denselben unten vollständig ausarbeiten. Weiter giebt es ähnliche Aufgaben, in denen Lösungen für Fälle von gebrochenen und imaginären Werthen von p nützlich sind. In diesen Aufgaben handelt es sich um Ausschnitte aus Kugelräumen, welche durch zwei Diametralebenen gebildet werden, zwischen denen ein beliebiger Winkel enthalten ist, der kein Submultiplum von zwei rechten Winkeln ist; oder sie beziehen sich auf Räume, welche durch zwei Kegel von kreisförmiger Basis mit gemeinschaftlichem Scheitel und gemeinschaftlicher Axe und von dem in ihnen liegenden Theil zweier um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kugelflächen begrenzt werden. Wenn endlich der Gegenstand ein fester oder flüssiger Körper von der Form des Ausschnittes ist, der aus den letzterwähnten Räumen durch zwei durch die Axe der Kegel gehende Ebenen herausgeschnitten wird, deren Neigung zu einander ein beliebiger Winkel ist, so haben wir es mit einem Falle zu thun, in welchem p eine ganze oder eine gebrochene Zahl ist, je nachdem der letzterwähnte Winkel ein Submultiplum von π ist oder nicht; doch ist dieser Fall unter einer Voraussetzung zu integriren, die von der in (d.) angegebenen verschieden ist. Wir werden daher, nachdem wir allgemeine Ausdrücke für vollkommene harmonische Kugelfunctionen erforscht haben werden, einige Andeutungen über die Bestimmung der unvollkommenen harmonischen Functionen von gebrochenem oder imaginärem oder ganzzahligem Grade machen, welche für die Lösung von Aufgaben erforderlich sind, in denen Räume betrachtet werden, wie wir sie eben beschrieben haben.

Zunächst stellen wir einige wenige Formeln zusammen, welche im Folgenden benutzt werden.

(g.) Wir nennen den Anfangspunkt der Coordinaten O, den Punkt x, y, z P und nehmen $OP = r$ an, so dass $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Ferner bezeichne der Buchstabe ∂, wenn er vor irgend eine Function gesetzt ist, die in Beziehung auf die Längeneinheit in der Richtung OP genommene Grösse der Variation dieser Function, so dass

$$\partial = \frac{x}{r}\frac{d}{dx} + \frac{y}{r}\frac{d}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d}{dz} \tag{6}$$

ist. Bezeichnet H_p irgend eine homogene Function $p$ter Ordnung von x, y, z, so haben wir offenbar

$$\partial H_p = \frac{p}{r} H_p, \tag{7}$$

folglich

(5) oder (8) $$x\frac{dH_p}{dx} + y\frac{dH_p}{dy} + z\frac{dH_p}{dz} = pH_p,$$

die bekannte Differentialgleichung einer homogenen Function, in der p natürlich jeden positiven oder negativen ganzen, jeden gebrochenen oder imaginären Werth haben kann. Wird weiter der Kürze wegen $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ mit ∇^2 bezeichnet, so ergiebt sich durch Differentiation

$$\nabla^2(r^m) = m(m+1)r^{m-2}. \tag{9}$$

Auch ist, wenn u, u' zwei beliebige Functionen bezeichnen,

$$\nabla^2(uu') = u'\nabla^2 u + 2\left(\frac{du}{dx}\frac{du'}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{du'}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{du'}{dz}\right) + u\nabla^2 u', \tag{10}$$

und hieraus folgt, wenn jede dieser Functionen u, u' eine Lösung von (4) ist,

$$\nabla^2(uu') = 2\left(\frac{du}{dx}\frac{du'}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{du'}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{du'}{dz}\right), \tag{11}$$

oder, wenn wir $u = V_p =$ einer harmonischen Function $p$ten Grades und $u' = r^m$ annehmen,

$$\nabla^2(r^m V_p) = 2mr^{m-2}\left(x\frac{dV_p}{dx} + y\frac{dV_p}{dy} + z\frac{dV_p}{dz}\right) + V_p\nabla^2(r^m).$$

oder, nach (8) und (9),

$$\nabla^2(r^m V_p) = m(2p + m + 1)r^{m-2}V_p. \tag{12}$$

Aus dieser letzten Gleichung geht hervor, dass $r^{-2p-1}V_p$ eine harmonische Function ist, und da sie vom Grade $-p-1$ ist, so können wir sie mit V_{-p-1} bezeichnen, so dass wir

$$\tag{13} \begin{cases} V_{-p-1} = r^{-2p-1} V_p, \\ \text{oder} \\ \dfrac{V_{p'}}{r^{p'}} = \dfrac{V_p}{r^p} \\ \text{für} \\ p + p' = -1 \end{cases}$$

haben, eine Formel, die uns die gegenseitige Beziehung zwischen zwei räumlichen harmonischen Functionen zeigt, welche auf jeder um O als Mittelpunkt beschriebenen Kugeloberfläche dieselbe Form der harmonischen Flächenfunction liefern. Wird weiter in (9) $m = -1$ angenommen, so erhält man

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0. \tag{14}$$

Danach ist $\frac{1}{r}$ eine harmonische Function vom Grade -1. Wir werden später sehen, dass sie die einzige vollkommene harmonische Function dieses Grades ist.

Wenn u irgend eine Lösung der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ ist, so hat man auch

$$\nabla^2 \frac{du}{dx} = 0,$$

und ebenso sind die höheren Differentialquotienten Lösungen derselben Gleichung. Ist also V_ν eine harmonische Function von einem beliebigen Grade ν, so ist $\frac{d^{j+k+l} V_\nu}{dx^j dy^k dz^l}$ eine harmonische Function vom Grade $\nu - j - k - l$, oder wir können

$$\frac{d^{j+k+l} V_\nu}{dx^j dy^k dz^l} = V_{\nu-j-k-l} \tag{15}$$

schreiben.

Weiter giebt es einen äusserst wichtigen Satz, der durch die folgende Gleichung ausgedrückt wird: —

$$\iint S_n S_{n'} \, d\omega = 0; \tag{16}$$

darin bezeichnet $d\omega$ ein Element einer Kugeloberfläche, die von O als Mittelpunkt aus mit dem Radius Eins beschrieben ist; die Integration $\iint$ hat sich über die ganze Oberfläche zu erstrecken, und S_n, $S_{n'}$ bezeichnen zwei vollkommene harmonische Flächenfunctionen, deren Ordnungen n und n' weder einander gleich sind, noch zur Summe -1 haben. Denn wenn wir die räumlichen harmonischen Functionen $r^n S_n$ und $r^{n'} S_{n'}$ für jeden Punkt (x, y, z) mit V_n und $V_{n'}$ bezeichnen, so ergiebt sich durch Anwendung des obigen allgemeinen Satzes (1) in $A(a)$ auf den Raum, der zwischen zwei um O als Mittelpunkt mit den Radien a und a_1 beschriebenen concentrischen Kugeloberflächen liegt,

$$\iiint \left(\frac{dV_n}{dx}\frac{dV_{n'}}{dx} + \frac{dV_n}{dy}\frac{dV_{n'}}{dy} + \frac{dV_n}{dz}\frac{dV_{n'}}{dz} \right) dx\,dy\,dz$$
$$= \iint V_n \delta V_{n'} d\sigma = \iint V_{n'} \delta V_n d\sigma.$$

Nach (7) ist aber $\delta V_{n'} = \frac{n'}{r} V_{n'}$ und $\delta V_n = \frac{n}{r} V_n$, und für die beziehungsweise durch die beiden Kugeloberflächen gebildeten Theile der Umgrenzungsfläche ist $d\sigma = a^2 d\omega$, $d\sigma = a_1^2 d\omega$. Folglich gehen die beiden letzten gleichen Glieder der vorhergehenden Doppelgleichung über in

$$n\,(a^{n+n'+1} - a_1^{n+n'+1}) \int\!\!\int S_n S_{n'}\, d\omega =$$
$$n'\,(a^{n+n'+1} - a_1^{n+n'+1}) \int\!\!\int S_n S_{n'}\, d\omega,$$

und damit dies erfüllt sei, muss, wenn n von n' und $a^{n+n'+1}$ von $a_1^{n+n'+1}$ verschieden ist, die Gleichung (16) bestehen.

Der entsprechende Satz für unvollkommene harmonische Kugelfunctionen ist folgender: —

Es bezeichnen $S_n, S_{n'}$ irgend zwei unvollkommene harmonische Kugelflächenfunctionen, deren Grade n, n' von einander verschieden sind und eine von -1 verschiedene Summe haben; ferner sollen diese Functionen folgender Bedingung genügen: An jedem Punkte der Umgrenzung irgend eines Theils der Kugeloberfläche soll entweder jede derselben oder aber ihr Differentialquotient, genommen in normaler Richtung zur Umgrenzung für jede von beiden verschwinden, und in jedem Punkte des eingeschlossenen Theils der Oberfläche soll jede einen endlichen und eindeutigen Werth haben. Dann bleibt die Gleichung (16) gültig, vorausgesetzt dass die Integration $\int\!\!\int$ auf den in Rede stehenden Theil der Oberfläche beschränkt wird. Der Beweis weicht von dem vorhergehenden nur darin ab, dass man hier nicht den ganzen zwischen zwei concentrischen Kugeloberflächen liegenden Raum zu nehmen hat, sondern nur den Theil desselben, der durch den Kegel eingeschlossen wird, welcher O zum Scheitel hat und die Umgrenzung der betrachteten sphärischen Fläche enthält.

(h.) Wir wenden uns jetzt zur Erforschung vollkommener harmonischer Functionen und werden zunächst beweisen, dass eine jede solche Function entweder eine rationale und ganze Function der Coordinaten x, y, z ist, oder vermittels eines Factors von der Form r^m dazu gemacht werden kann.

Es bezeichne V irgend eine Function, welche in jedem Punkte innerhalb einer Kugeloberfläche S, die von O als Mittelpunkt aus mit einem beliebigen Radius a beschrieben ist, der Gleichung

$$\nabla^2 V = 0 \tag{17}$$

genügt. Wenn ihr Werth an dieser Oberfläche eine bekannte Function von beliebigem Charakter ist, so kann er nach dem unten in (51) enthaltenen allgemeinen Satze in folgende Reihe entwickelt werden: —

$$(r = a),\ V = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \text{u. s. w.,} \tag{18}$$

wo $S_1, S_2, \cdots S_n$ die Flächenwerthe räumlicher harmonischer Kugelfunctionen von den Graden $1, 2, \cdots n$ bezeichnen, deren jede für jeden innerhalb S gelegenen Punkt eine rationale ganze Function ist. Es ist aber

$$S_0 + S_1 \frac{r}{a} + S_2 \frac{r^2}{a^2} + \cdots + S_n \frac{r^n}{a^n} + \text{u. s. w.} \tag{19}$$

eine den gestellten Bedingungen genügende Function, und folglich kann, wie oben in $A(c)$ bewiesen worden, V von (19) nicht verschieden sein. Es sei nun, als ein besonderer Fall, V eine harmonische Function von einem posi-

tiven Grade ν; wir können sie dann mit $S_\nu \frac{r^\nu}{a^\nu}$ bezeichnen, und es muss

$$S_\nu \frac{r^\nu}{a^\nu} = S_0 + S_1 \frac{r}{a} + S_2 \frac{r^2}{a^2} + \cdots + S_n \frac{r^n}{a^n} + \text{u. s. w.}$$

sein. Das ist unmöglich, ausser wenn $\nu = n$, $S_\nu = S_n$ ist und alle übrigen Functionen S_0, S_1, S_2, u. s. w. verschwinden. Es kann also keine vollkommene harmonische Kugelfunction von einem positiven Grade geben, welche nicht, wie $S_n \frac{r^n}{a^n}$, von einem ganzzahligen Grade und eine ganze rationale Function der Coordinaten ist.

Es sei ferner V irgend eine Function, welche für jeden Punkt ausserhalb der Kugeloberfläche S der Gleichung (17) genügt und in unendlicher Entfernung nach jeder Richtung zu verschwindet; ihr Werth auf der Oberfläche S werde wieder durch (18) ausgedrückt. Wir beweisen dann auf ähnliche Weise, dass diese Function nicht von

$$(20) \qquad \frac{a S_0}{r} + \frac{a^2 S_1}{r^2} + \frac{a^3 S_2}{r^3} + \cdots + \frac{a^{n+1} S_n}{r^{n+1}} + \text{u. s. w.}$$

verschieden sein kann. Wenn daher, als ein besonderer Fall, V irgend eine vollkommene harmonische Function $\frac{r^\varkappa S_\varkappa}{a^\varkappa}$ von einem negativen Grade $\varkappa$ ist, so muss für alle ausserhalb S gelegenen Punkte

$$\frac{r^\varkappa S_\varkappa}{a^\varkappa} = \frac{a S_0}{r} + \frac{a^2 S_1}{r^2} + \frac{a^3 S_2}{r^3} + \cdots + \frac{a^{n+1} S_n}{r^{n+1}} + \text{u. s. w.}$$

sein, und dies erfordert, dass $\varkappa = -(n+1)$, $S_\varkappa = S_n$ ist, und dass alle übrigen Functionen S_0, S_1, S_2, u. s. w. verschwinden. Eine vollkommene harmonische Kugelfunction negativen Grades kann somit keine andere als $\frac{a^{n+1} S_n}{r^{n+1}}$, oder $\frac{a^{n+1}}{r^{2n+1}} S_n r^n$ sein, wo $S_n r^n$ nicht nur, wie behauptet wurde, eine rationale ganze Function der Coordinaten, sondern selbst eine harmonische Kugelfunction ist.

(i.) **Ordnung und Grad vollkommener Kugelfunctionen.** — Wir haben also bewiesen, dass eine vollkommene Kugelfunction, wenn sie von einem positiven Grade ist, nothwendig auch von einem ganzzahligen Grade und ausserdem eine rationale ganze Function der Coordinaten ist, oder, wenn sie von einem negativen Grade $-(n+1)$ ist, nothwendig die Form $\frac{V_n}{r^{2n+1}}$ hat, wo V_n eine harmonische Function von einem positiven Grade n ist. Wir werden daher unter der Ordnung einer vollkommenen harmonischen Kugelfunction negativen Grades den Grad oder die Ordnung der mit ihr verbundenen vollkommenen harmonischen Function positiven Grades und unter der Ordnung einer harmonischen Flächenfunction ebenso den Grad oder die Ordnung der räumlichen harmonischen Kugelfunction positiven Grades oder die Ord-

nung der räumlichen harmonischen Function negativen Grades verstehen, welche mit ihr auf der Kugeloberfläche übereinstimmt.

(j.) Um allgemeine Ausdrücke für vollkommene harmonische Kugelfunctionen aller Ordnungen zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass eine vollkommene harmonische Function vom Grade 0 nothwendig constant ist, da ja eine Constante die einzige rationale ganze Function 0ten Grades ist. Nach dem, was wir soeben gesehen haben, ist also eine vollkommene harmonische Function vom Grade -1 nothwendig von der Form $\frac{A}{r}$. Dass diese Function harmonisch ist, haben wir schon früher aus (14) erkannt.

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (15)

$$(21)\qquad \begin{cases} V_{-n-1} = \dfrac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}\,\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}, \\ \text{wenn } j+k+l=n \text{ ist,} \end{cases}$$

wo V_{-n-1} eine harmonische Function vom Grade $-(n+1)$ bezeichnet, die offenbar eine vollkommene harmonische Function ist. Berechnet man den hier angegebenen Differentialquotienten, so sieht man, dass derselbe ein Bruch ist, dessen Zähler eine rationale ganze Function $n$ten Grades, und dessen Nenner r^{2n+1} ist. Nach dem eben erhaltenen Resultat muss der Zähler eine harmonische Function sein; wird dieselbe mit V_n bezeichnet, so haben wir daher

$$(22)\qquad V_n = r^{2n+1}\,\frac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}\,\frac{1}{r}.$$

Die Anzahl der unabhängigen harmonischen Functionen $n$ter Ordnung, die wir auf diese Weise aus $\frac{1}{r}$ durch Differentiation herleiten können, ist $2n+1$. Es giebt zwar $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Differentialquotienten $\frac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}$, für welche $j+k+l=n$ ist; aber wenn $\frac{1}{r}$ der Gegenstand der Differentiation ist, so sind nur $2n+1$ derselben unabhängig. Es ist nämlich

$$(14)\qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\frac{1}{r} = 0;$$

dies liefert für jede ganze Zahl p

$$(23)\qquad \frac{d^{2p}}{dz^{2p}}\,\frac{1}{r} = (-1)^p\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)^p\frac{1}{r}$$

und zeigt, dass

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}\,\dfrac{1}{r} = (-1)^{\frac{l}{2}}\,\dfrac{d^{j+k}}{dx^j\,dy^k}\left(\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{d^2}{dy^2}\right)^{\frac{l}{2}}\dfrac{1}{r}, & \text{wenn } l \text{ gerade ist,} \\ \text{oder} & \\ \qquad = (-1)^{\frac{l-1}{2}}\,\dfrac{d^{j+k}}{dx^j\,dy^k}\left(\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{d^2}{dy^2}\right)^{\frac{l-1}{2}}\dfrac{d}{dz}\,\dfrac{1}{r}, & \text{wenn } l \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Nehmen wir also erstens $l = 0$ und $j + k = n$, so erhalten wir $n + 1$ Differentialquotienten $\frac{d^{j+k}}{dx^j dy^k}$, und wird weiter $l = 1$ und $j + k = n - 1$ genommen, so ergeben sich noch n Differentialquotienten $\frac{d^{j+k}}{dx^j dy^k}$, d. h. wenn $\frac{1}{r}$ Gegenstand der Differentiation ist, so haben wir im Ganzen $2n + 1$ und nicht mehr verschiedene Differentialquotienten, von denen man leicht zeigen kann, dass sie in der That unabhängig sind. Wir brauchen uns aber hier nicht damit aufzuhalten, diese Unabhängigkeit nachzuweisen, da sie unten in den wirklichen Entwicklungen zu Tage treten wird.

Bezeichnet jetzt $H_n(x, y, z)$ irgend eine rationale ganze Function $n$ten Grades von x, y, z, so ist $\nabla^2 H_n(x, y, z)$ vom Grade $n - 2$, und da H_n aus $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Gliedern besteht, so ist $\frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl der Glieder von $\nabla^2 H_n$. Ist also $\nabla^2 H_n = 0$, so haben wir $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen zwischen den constanten Coefficienten, und die Anzahl der übrig bleibenden unabhängigen Constanten ist $\frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$, oder $2n + 1$, d. h. in der allgemeinen rationalen ganzen harmonischen Function $n$ten Grades giebt es $2n + 1$ Constanten. Wir haben aber gesehen, dass es $2n + 1$ verschiedene Differentialquotienten $n$ter Ordnung von $\frac{1}{r}$ giebt, und dass der Zähler eines jeden eine harmonische Function $n$ten Grades ist. Es lässt sich somit jede vollkommene harmonische Function $n$ter Ordnung durch die Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ ausdrücken. Es ist unmöglich, $2n + 1$ Functionen symmetrisch aus drei Veränderlichen zu bilden, ausser wenn $2n + 1$ durch 3 theilbar, d. h. n von der Form $n = 3p + 1$ ist, wo p jede ganze Zahl sein kann; diese Classe von Fällen verdient besondere Beachtung. Dagegen lässt sich für jeden Werth von n die allgemeine harmonische Function als eine Function mit $2n+1$ Constanten darstellen, welche zwei von den drei Veränderlichen symmetrisch enthält. Dies kann auf verschiedenen Wegen geschehen, von denen wir die beiden folgenden als die nützlichsten wählen: — Erstens ist

$$
(25) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{V_n}{r^{2n+1}} = &\left\{A_0\left(\frac{d}{dx}\right)^n + A_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\frac{d}{dy} + A_2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \cdots \right. \\
&\left. + A_n\left(\frac{d}{dy}\right)^n\right\}\frac{1}{r} \\
+ &\left\{B_0\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + B_1\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2}\frac{d}{dy} + B_2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-3}\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \cdots \right. \\
&\left. + B_{n-1}\left(\frac{d}{dy}\right)^{n-1}\right\}\frac{d}{dz}\frac{1}{r}.
\end{aligned}
\right.
$$

Zweitens sei

$$
(26) \qquad x + yi = \xi, \quad x - yi = \eta,
$$

wo i wie gewöhnlich $\sqrt{-1}$ bezeichnet. Dann erhält man

$$(27)\quad \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) \\ \frac{1}{r} = \frac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}}, \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}[x,y] = \left(\frac{d}{d\xi} + \frac{d}{d\eta}\right)[\xi,\eta], \quad \frac{d}{dy}[x,y] = i\left(\frac{d}{d\xi} - \frac{d}{d\eta}\right)[\xi,\eta] \\ \frac{d}{d\xi}[\xi,\eta] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx} - i\frac{d}{dy}\right)[x,y], \quad \frac{d}{d\eta}[\xi,\eta] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dx} + i\frac{d}{dy}\right)[x,y], \end{cases}$$

wo die Symbole $[x,y]$ und $[\xi,\eta]$ ein und dieselbe Grösse bezeichnen, die beziehungsweise durch x, y und durch ξ, η ausgedrückt ist. Hieraus folgt weiter

$$(29)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)[x,y,z] = \left(4\frac{d^2}{d\xi\, d\eta} + \frac{d^2}{dz^2}\right)[\xi,\eta,z], \\ \text{oder nach unserer abgekürzten Bezeichnung} \\ \nabla^2 = 4\frac{d^2}{d\xi\, d\eta} + \frac{d^2}{dz^2}. \end{cases}$$

Dann ist, wie früher

$$(30)\quad \begin{cases} \frac{V_n}{r^{2n+1}} = \left\{\mathfrak{A}_0\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n + \mathfrak{A}_1\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1}\frac{d}{d\eta} + \mathfrak{A}_2\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-2}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^2 + \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathfrak{A}_n\left(\frac{d}{d\eta}\right)^n\right\}\frac{1}{r} \\ \quad + \left\{\mathfrak{B}_0\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} + \mathfrak{B}_1\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-2}\frac{d}{d\eta} + \mathfrak{B}_2\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-3}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^2 + \cdots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \mathfrak{B}_{n-1}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^{n-1}\right\}\frac{d}{dz}\frac{1}{r}. \end{cases}$$

Die hier geforderten Differentiationen lassen sich mit grosser Leichtigkeit mit Hülfe des **Leibnitz**'schen Satzes ausführen. Man erhält

$$(31)\quad \begin{cases} r^{2(m+p)+1}\frac{d^{m+p}}{d\xi^m\, d\eta^p}\frac{1}{r} = (-1)^{m+p}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(m+p-\tfrac{1}{2})\Big[\eta^m\xi^p \\ \qquad - \frac{mp}{1.(m+p-\frac{1}{2})}\eta^{m-1}\xi^{p-1}r^2 \\ \qquad + \frac{m(m-1)\cdot p(p-1)}{1.2.(m+p-\frac{1}{2})(m+p-\frac{3}{2})}\eta^{m-2}\xi^{p-2}r^4 - \text{u. s. w.}\Big] \\ \text{und} \\ r^{2(m+p)+3}\frac{d^{m+p+1}}{d\xi^m\, d\eta^p\, dz}\frac{1}{r} = (-1)^{m+p+1}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(m+p+\tfrac{1}{2})\,2z \\ \qquad \Big[\eta^m\xi^p - \frac{mp}{1.(m+p+\frac{1}{2})}\eta^{m-1}\xi^{p-1}r^2 \\ \qquad + \frac{m(m-1).p(p-1)}{1.2.(m+p+\frac{1}{2})(m+p-\frac{1}{2})}\eta^{m-2}\xi^{p-2}r^4 - \text{u. s. w.}\Big] \end{cases}$$

Dieser Ausdruck führt sofort zu einer reellen Entwicklung in Polarcoordinaten: — Es sei

$$(32)\qquad z = r\cos\vartheta, \quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

so dass

$$\xi = r \sin \vartheta e^{i\varphi}, \quad \eta = r \sin \vartheta e^{-i\varphi} \tag{33}$$

ist. Dann ist noch

$$\xi \eta = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$$

und

$$\begin{aligned} \xi^p \eta^m = (\xi \eta)^m \xi^s &= (\xi \eta)^m (r \sin \vartheta)^s (\cos \varphi + i \sin \varphi)^s \\ &= (r \sin \vartheta)^{m+p} (\cos s\varphi + i \sin s\varphi), \end{aligned}$$

wo $s = p - m$ ist, und wenn wir weiter

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_p + \mathfrak{A}_m = A_s, \ (\mathfrak{A}_p - \mathfrak{A}_m) i = A'_s \\ \mathfrak{B}_p + \mathfrak{B}_m = B_s, \ (\mathfrak{B}_p - \mathfrak{B}_m) i = B'_s \end{cases} \tag{34}$$

nehmen, so erhalten wir:

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{A}_p \frac{d^{m+p}}{d\xi^m d\eta^p} \frac{1}{r} + \mathfrak{A}_m \frac{d^{m+p}}{d\xi^p d\eta^m} \frac{1}{r} \\ & = (-1)^{m+p} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (m+p-\tfrac{1}{2}) r^{-(m+p+1)} (A_s \cos s\varphi + A'_s \sin s\varphi) \times \\ & \Big[\sin^{m+p} \vartheta - \frac{mp}{1.(m+p-\frac{1}{2})} \sin^{m+p-2} \vartheta \\ & \quad + \frac{m(m-1).p(p-1)}{1.2.(m+p-\frac{1}{2})(m+p-\frac{3}{2})} \sin^{m+p-4} \vartheta - \text{u. s. w.} \Big], \\ & \mathfrak{B}_p \frac{d^{m+p+1}}{d\xi^m d\eta^p dz} \frac{1}{r} + \mathfrak{B}_m \frac{d^{m+p+1}}{d\xi^p d\eta^m dz} \frac{1}{r} \\ & = (-1)^{m+p+1} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (m+p+\tfrac{1}{2}) r^{-(m+p+2)} (B_s \cos s\varphi \\ & \qquad + B'_s \sin s\varphi) \cos \vartheta \times \\ & \Big[\sin^{m+p} \vartheta - \frac{mp}{1.(m+p+\frac{1}{2})} \sin^{m+p-2} \vartheta \\ & \quad + \frac{m(m-1).p(p-1)}{1.2.(m+p+\frac{1}{2})(m+p-\frac{1}{2})} \sin^{m+p-4} \vartheta - \text{u. s. w.} \Big]. \end{aligned} \right. \tag{35}$$

Wir nehmen jetzt weiter keine Rücksicht auf die constanten Factoren, die wir bisher nur aus dem Grunde beibehielten, um die Beziehungen der untersuchten Ausdrücke zu den Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ zu zeigen. Bezeichnen wir noch mit Σ die Summation in Beziehung auf die willkürlichen Constanten A, A', B, B', so erhalten wir den folgenden ganz allgemeinen Ausdruck für eine vollkommene harmonische Kugelflächenfunction $n$ter Ordnung: —

$$(36)\begin{cases} S_n = \sum^{m+p=n} (A_s \cos s\varphi + A'_s \sin s\varphi)\, \Theta(m,p) \\ \quad + \sum^{m+p+1=n} (B_s \cos s\varphi + B'_s \sin s\varphi) \cos\vartheta\, Z(m,p), \\ \text{wo } s = m \backsim p, \text{ d. h.} = +\sqrt{(m-p)^2} \text{ und} \\ \Theta(m,p) = \sin^{m+p}\vartheta - \frac{mp}{1.(m+p-\frac{1}{2})}\sin^{m+p-2}\vartheta \\ \quad + \frac{m(m-1).p(p-1)}{1.2.(m+p-\frac{1}{2})(m+p-\frac{3}{2})}\sin^{m+p-4}\vartheta - \text{u. s. w.} \end{cases}$$

ist, während $Z(m,p)$ von $\Theta(m,p)$ nur darin abweicht, dass in den Nennern von $Z(m,p)$ statt $m+p$ überall $m+p+1$ steht.

Die für eine harmonische Kugelfunction $n$ter Ordnung gewöhnlich gegebene, etwas einfachere Formel (Laplace, Mécanique Céleste, livre III, chap. II, oder Murphy's Electricity, Preliminary Prop. XI) ist folgende:—

$$(37)\qquad S_n = \sum_{s=0}^{s=n} (A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi)\, \Theta_n^{(s)},$$

$$(38)\qquad \Theta_n^{(s)} = \sin^s\vartheta\left[\cos^{n-s}\vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2.(2n-1)}\cos^{n-s-2}\vartheta \right.$$
$$\left. + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-s-4}\vartheta - \text{u.s.w.}\right].$$

Wir fügen hinzu, dass $\Theta_n^{(s)}$ dieselbe Bedeutung wie $\Theta(m,p)$ hat, wenn $m+p=n$ und $m \backsim p = s$ ist, oder dieselbe Bedeutung wie $\cos\vartheta\, Z(m,p)$, wenn $m+p+1=n$ und $m \backsim p = s$ ist. Dies kann aus dem Vorhergehenden durch eine algebraische Umformung hergeleitet werden; es kann auch direct durch eine passende Aenderung der oben angewandten Differentiationsmethode gefunden werden. Man kann es aber auch dadurch erhalten, dass man (a_s und b_s als willkürliche Constanten angenommen)

$$V_n = S_n r^n = \Sigma (a_s \xi^s + b_s \eta^s)(z^{n-s} + \alpha r^2 z^{n-s-2}$$
$$+ \beta r^4 z^{n-s-4} + \text{u. s. w.})$$

voraussetzt, was offenbar eine richtige Form ist, und α, β, u. s. w. durch die Differentialgleichung $\nabla^2 V_n = 0$ und (29) bestimmt.

Eine andere Form, die vielleicht die nützlichste ist, kann man mit sogar noch grösserer Leichtigkeit auf folgende Weise erlangen: — Nimmt man

$$V_n = \Sigma(a_s\xi^s + b_s\eta^s)(z^{n-s} + \alpha_1 z^{n-s-2}\xi\eta + \alpha_2 z^{n-s-4}\xi^2\eta^2 + \text{u. s. w.})$$

an und bestimmt α_1, α_2, u. s. w. durch die Differentialgleichung, so erhält man

$$(39)\begin{cases} V_n = \Sigma(a_s\xi^s + b_s\eta^s)\left[z^{n-s} - \frac{(n-s)(n-s-1)}{4.(s+1).1} z^{n-s-2}\xi\eta \right. \\ \left. \quad + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{4^2.(s+1)(s+2).1.2} z^{n-s-4}\xi^2\eta^2 - \text{u. s. w.}\right]. \end{cases}$$

was auch leicht durch Differentiation von $\frac{1}{r}$ hätte gefunden werden können. Werden jetzt die imaginären Symbole eliminirt und die Bezeichnung von (37) und (38) beibehalten, so ergiebt sich

$$(40) \begin{cases} \Theta_n^{(s)} = C \sin^s \vartheta \Big[\cos^{n-s} \vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{4.(s+1)} \cos^{n-s-2} \vartheta \sin^2 \vartheta \\ \quad + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{4^2.(s+1)(s+2).1.2} \cos^{n-s-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \text{u. s. w.} \Big], \\ \text{wo} \\ C = \frac{(2s+1)(2s+2)\cdots(n+s)}{(2s+1)(2s+3)\cdots(2n-1)} \text{ ist.} \end{cases}$$

Dieser Werth von C wird entweder durch Vergleich mit der Formel (38), von welcher die letzterhaltene eine algebraische Modification ist, oder, vielleicht leichter, auf folgende Weise gefunden: — Wir haben nach (29)

$$(41) \begin{cases} \frac{d^n}{dz^{n-s} d\eta^s} \frac{1}{r} = (-1)^{\frac{n-s}{2}} 2^{n-s} \frac{d^n}{d\xi^{\frac{n-s}{2}} d\eta^{\frac{n+s}{2}}} \frac{1}{r}, \text{ wenn } n-s \text{ gerade,} \\ \text{oder} \\ \qquad = (-1)^{\frac{n-s-1}{2}} 2^{n-s-1} \frac{d^n}{dz\, d\xi^{\frac{n-s-1}{2}} d\eta^{\frac{n+s-1}{2}}} \frac{1}{r}, \text{ wenn } n-s \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Wird das erste Glied nach Potenzen von z, ξ, η entwickelt, dadurch dass man der Reihe nach erst $s$mal in Beziehung auf η und sodann $(n-s)$mal in Beziehung auf z differentiirt, so erhält man für einen Term seines Zählers

$$(42) \qquad (-1)^n \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdots (s - \tfrac{1}{2})(2s+1)(2s+2)(2s+3)\cdots(n+s) z^{n-s} \xi^s,$$

und daraus ergiebt unter Benutzung von (41), (35), (39), (40) der Werth von C.

(k.) **Wichtige Eigenschaften der entwickelten Glieder.** — Es ist sehr wichtig zu bemerken, dass man erstens

$$(43) \qquad \int\int U_n U'_n \, d\sigma = 0$$

hat, wo U_n und U'_n irgend zwei von den Elementen bezeichnen, aus denen V in einem der vorhergehenden Ausdrücke zusammengesetzt ist, und dass zweitens

$$(44) \qquad \int_0^\pi \Theta_n^{(s)} \Theta_{n'}^{(s)} \sin \vartheta \, d\vartheta = 0$$

ist, wo natürlich der Fall $n = n'$ ausgeschlossen bleibt. Denn nehmen wir $r = a =$ dem Radius der Kugeloberfläche und, wie oben, $d\sigma = a^2 d\omega$, so haben wir $d\omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, u. s. w., und die Grenzen von ϑ und φ in der Integration für die ganze Kugeloberfläche sind beziehungsweise 0 bis π und 0 bis 2π. Da nun $\int_0^{2\pi} \cos s\varphi \cos s'\varphi \, d\varphi = 0$ ist, so erkennen wir die Wahrheit der ersteren Behauptung; die zweite lässt sich aus (16) und (36) algebraisch verificiren, was wir dem Leser zur Uebung überlassen.

(l.) **Entwicklungen unvollkommener Kugelfunctionen für Kegel und Keile.** — Jede der vorhergehenden Reihen kann mit jedem Ende begonnen und, auch wenn die Grössen n, m, p oder s sämmtlich oder zum Theil gebrochen oder imaginär sind, gebraucht werden. Jede auf diese Weise erhaltene Reihe, die Anzahl ihrer Glieder mag endlich oder unendlich sein, drückt eine harmonische Function $n$ten Grades aus, da sie vom $n$ten Grade ist und der Gleichung $\nabla^2 V_n = 0$ genügt. In einigen dieser Fälle bleibt die Reihe endlich, und dann ist ihre Anwendung an sich klar. Ist die Reihe unendlich, so darf sie im Falle ihrer Convergenz gebraucht werden, und ausser für besondere Grenzwerthe der Veränderlichen wird die aus irgend einem der vorhergehenden endlichen Ausdrücke, wenn derselbe mit einem seiner beiden Enden begonnen wird, erhaltene unendliche Reihe convergiren. Auf diese Weise verschafft uns jeder der endlichen Ausdrücke immer eine Reihe, welche für jeden der jetzt vorausgesetzten gebrochenen oder imaginären Werthe convergirt. (Es lässt sich in der That leicht zeigen, dass er eine divergente unendliche Reihe liefert, wenn man ihn mit dem einen Ende beginnt, dagegen eine convergente Reihe, wenn er mit dem anderen Ende begonnen wird.) Die Bestimmung der Werthe von $n - s$, welche $\Theta_n^{(s)}$ oder $\frac{d}{d\vartheta}\Theta_n^{(s)}$ für jeden von zwei festgesetzten Werthen von ϑ Null machen, ist ein analytisches Problem, das in Verbindung mit diesen Entwicklungen nach harmonischen Kugelfunctionen hohes Interesse hat. Es ist im Wesentlichen in der oben angeführten physikalischen Anwendung enthalten, in der die betreffenden Räume theilweise durch Kegel mit zusammenfallenden Axen begrenzt werden. Wenn die Umgrenzung durch die von diesen Kegeln aus zwei concentrischen Kugeloberflächen herausgeschnittenen Theile vervollständigt wird, so gehen auch Functionen der unten in (o.) beschriebenen Klasse in die Lösung ein. Wenn wir erst im Stande sein werden, physikalische Anwendungen mit Nutzen zu geben, werden wir auf den Gegenstand zurückkommen; für jetzt müssen wir uns mit diesen wenigen Bemerkungen begnügen.

(m.) **Entwicklungen für Keile.** — Wenn der in physikalischen Problemen, wie wir sie schon angeführt haben, betrachtete Raum zum Theil von zwei Ebenen begrenzt wird, die sich in einem Durchmesser unter irgend einem Winkel $\frac{\pi}{\nu}$ treffen, und wenn die weitere Umgrenzung der in dem Winkel zwischen diesen Ebenen liegende Theil einer Kugeloberfläche ist (den Fall $\nu < 1$, d. h. den Fall, in welchem der Winkel zwischen den Ebenen grösser als zwei Rechte ist, schliessen wir nicht aus), so sind die erforderlichen harmonischen Functionen sämmtlich von gebrochenen Graden, aber eine jede ist eine endliche algebraische Function der Coordinaten ξ, η, ζ, wenn ν irgend eine incommensurabele Zahl ist. Ist z. B. die Aufgabe gestellt, die innere Temperatur in irgend einem Punkte eines festen Körpers von der in Rede stehenden Gestalt zu finden, wenn jeder Punkt des gekrümmten Theils seiner Oberfläche beständig in einer beliebig gegebenen Temperatur erhalten wird und seine ebenen Grenzflächen eine constante Temperatur haben, so sind die Formen und die Grade der betreffenden harmonischen Functionen folgende: —

Grad	Harmonische Function	Grad	Harmonische Function	Grad	Harmonische Function
ν	ξ^ν	2ν	$\xi^{2\nu}$	3ν	$\xi^{3\nu}$
$\nu+1$	$r^{2\nu+3}\frac{d}{dz}\frac{\xi^\nu}{r^{2\nu+1}}$	$2\nu+1$	$r^{4\nu+3}\frac{d}{dz}\frac{\xi^{2\nu}}{r^{4\nu+1}}$	$3\nu+1$	$r^{6\nu+3}\frac{d}{dz}\frac{\xi^{3\nu}}{r^{6\nu+1}}$
$\nu+2$	$r^{2\nu+5}\frac{d^2}{dz^2}\frac{\xi^\nu}{r^{2\nu+1}}$	$2\nu+3$	$r^{4\nu+5}\frac{d^2}{dz^2}\frac{\xi^{2\nu}}{r^{4\nu+1}}$	...	...
$\nu+3$	$r^{2\nu+7}\frac{d^3}{dz^3}\frac{\xi^\nu}{r^{2\nu+1}}$	$2\nu+5$	$r^{4\nu+7}\frac{d^3}{dz^3}\frac{\xi^{2\nu}}{r^{4\nu+1}}$	...	...
...	...	...	...	...	...

Diese harmonischen Functionen lassen sich nach dem Vorhergehenden mittels der verschiedenen Formeln (36) bis (40) durch reelle Coordinaten ausdrücken.

(n.) **Darstellung der Kugelfunctionen beliebigen Grades durch verallgemeinerte Differentiation.** — Es verdient bemerkt zu werden, dass diese Functionen und jede andere Kugelfunction irgend eines Grades (derselbe mag ganz, oder ein reeller Bruch, oder imaginär sein) durch ein allgemeines Verfahren hergeleitet werden können, welches die Differentiation als einen besonderen Fall in sich schliesst. So haben wir offenbar, wenn $\left(\frac{d}{d\eta}\right)^\nu$ eine Operation bezeichnet, die im Falle eines ganzzahligen ν darin besteht, dass man den νten Differentialquotienten nimmt,

$$\xi^\nu = r^{2\nu+1} P_\nu \left(\frac{d}{d\eta}\right)^\nu \frac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}},$$

wo P_ν eine Function von ν bezeichnet, welche, wenn ν eine reelle ganze Zahl ist,

$$(-1)^\nu \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\left(\nu-\frac{1}{2}\right)$$

wird. Die Schwierigkeiten, welche diese verallgemeinerte Differentiation darbietet, sind auf die Auswerthung von P_ν beschränkt. Sie waren der Gegenstand höchst interessanter Untersuchungen von Liouville, Gregory, Kelland und Anderen.

Wenn wir den Factor P_ν bei Seite lassen und uns mit der Bestimmung der Formen der harmonischen Kugelfunctionen begnügen, so haben wir nur Leibnitz's Formel und andere bekannte Differentiationsformeln mit irgend einer gebrochenen oder imaginären Zahl als Index anzuwenden, und wir werden sehen, dass die oben für eine vollkommene harmonische Kugelfunction beliebigen Grades gegebenen äquivalenten Ausdrücke vermittels der hier angedeuteten verallgemeinerten Differentiation aus $\frac{1}{r}$

hergeleitet werden können, dergestalt dass sie jede mögliche unvollkommene harmonische Function beliebigen (ganzen, oder reellen und gebrochenen, oder imaginären) Grades in sich schliessen. Jene Ausdrücke können aber, wie oben angegeben, in der dargelegten Weise, ganz unabhängig von der hier erwähnten Ableitungsart, für unvollkommene harmonische Functionen benutzt werden, seien es nun endliche algebraische Functionen von ξ, η, ζ, oder durch convergirende unendliche Reihen ausgedrückte Transcendenten.

(o.) Um den Gebrauch von Kugelfunctionen imaginärer Grade zu erläutern, wollen wir das oben angegebene, die Leitung der Wärme betreffende Problem in folgender Weise ändern: — Der feste Körper werde von zwei concentrischen Kugeloberflächen, deren Radien a und a' sind, und durch zwei Kegel oder Ebenen begrenzt. Jeder Punkt jeder der beiden ebenen oder kegelförmigen Grenzflächen wird in einer beliebig gegebenen, und der ganze sphärische Theil der Umgrenzung in einer constanten Temperatur erhalten. Dann werden in die Lösung harmonische Functionen vom Grade

$$-\tfrac{1}{2} + \frac{n\pi\sqrt{-1}}{\log\frac{a}{a'}}$$

eingehen, wo n irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Convergirende Reihen für diese und für die übrigen zur Lösung erforderten Functionen sind in unseren allgemeinen Formeln (36) bis (40) enthalten.

(p.) Die oben untersuchte Methode, vollkommene harmonische Kugelfunctionen durch Differentiation von $\frac{1}{r}$ zu finden, hat den grossen Vortheil, dass sie unmittelbar wichtige Eigenschaften zeigt, welche diese Functionen in Beziehung auf die Werthe der Veränderlichen besitzen, für die sie verschwinden. So ergiebt sich, da die Grösse $\frac{1}{r}$ und alle ihre Differentialquotienten für jeden der beiden Werthe $x = \pm\infty$, oder $y = \pm\infty$, oder $z = \pm\infty$ verschwinden, dass

$$\frac{d^{j+k+l}}{dx^j\,dy^k\,dz^l}\,\frac{1}{r}$$

$j$mal verschwindet, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst
k „ „ „ y „ „ „ „ „
l „ „ „ z „ „ „ „ „

Der Leser, der mit Fourier's Theorie der Gleichungen nicht vertraut ist, wird leicht selbst die vorliegende Anwendung der in jenem bewundernswerthen Werke entwickelten Principien bewahrheiten können.

Es erhellt auf diese Weise, dass die harmonischen Kugelfunctionen zu der allgemeinen Klasse von Functionen gehören, welchen William Rowan Hamilton die Bezeichnung „fluctuirende Functionen“ beigelegt hat. Diese Eigenschaft ist wesentlich in ihrer Fähigkeit enthalten, willkürliche Functionen auszudrücken, und diese Fähigkeit wollen wir jetzt zum Schluss noch nachweisen.

(r.) **Eine willkürliche Function, ausgedrückt in einer Reihe harmonischer Flächenfunctionen. Einleitende Sätze.** — Es sei C der Mittelpunkt und a der Radius einer Kugeloberfläche, die wir mit S bezeichnen werden. Ferner sei P irgend ein innerer oder äusserer Punkt, dessen Abstand von C mit f bezeichnet werde, und $d\sigma$ ein in einem Punkte E, der von P die Entfernung $EP = D$ hat, liegendes Element von S. Bezeichnet dann $\int\int$ eine sich über S erstreckende Integration, so kann man leicht folgende Formeln beweisen: —

$$(45)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = \frac{a}{f}\,\frac{4\pi a}{f^2-a^2}, \text{ wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist,} \\ \displaystyle\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = \frac{4\pi a}{a^2-f^2}, \text{ wenn } P \text{ innerhalb } S \text{ liegt.} \end{cases}$$

Es ist dies nur ein besonderer Fall eines ganz allgemeinen Theorems von Green, welches in dem oben $A\,(a)$ gegebenen enthalten ist, wie wir später zeigen werden, wenn wir die allgemeine Theorie der Attraction besonders behandeln. Ein geometrischer Beweis eines speciellen Satzes, von welchem der vorliegende ein Fall ist, wird in Verbindung mit elementaren Untersuchungen über die Vertheilung der Elektricität auf kugelförmigen Conductoren vorkommen. Inzwischen wollen wir im Nachstehenden das Integral selbst direct auswerthen, damit kein Theil der wichtigen Betrachtung, die uns jetzt beschäftigt, auch nur zeitweilig unvollständig sei.

Wir wählen die Polarcoordinaten $\vartheta = ECP$ und den Winkel φ zwischen der Ebene von ECP und einer durch CP gehenden festen Ebene. Dann ist

$$d\sigma = a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Durch Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ ergiebt sich also

$$\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = 2\pi a^2\int_0^\pi\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{D^3}.$$

Es ist aber

$$D^2 = a^2 - 2af\cos\vartheta + f^2,$$

folglich

$$\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{D\,dD}{af}.$$

Die Grenzwerthe von D im Integral sind

$$f-a,\quad f+a, \text{ wenn } f > a,$$
$$a-f,\quad a+f, \text{ wenn } f < a.$$

Wir haben daher in diesen beiden Fällen beziehungsweise

$$\int\int\frac{d\sigma}{D^3} = \frac{2\pi a}{f}\left(\frac{1}{f-a}-\frac{1}{f+a}\right), \text{ oder } = \frac{2\pi a}{f}\left(\frac{1}{a-f}-\frac{1}{a+f}\right),$$

und damit sind die Formeln (45) bewiesen.

(s.) **Green's Aufgabe, für eine Kugeloberfläche durch bestimmte Integrale gelöst.** — Es bezeichne jetzt $F(E)$ eine beliebige Function der Lage von E auf S, und es sei

$$(46)\quad u = \int\int\frac{(f^2 \backsim a^2)\,F(E)\,d\sigma}{D^3}.$$

Wenn f unendlich wenig von a verschieden ist, so verschwindet jedes Element dieses Integrals, mit Ausnahme derjenigen, für welche D unendlich klein ist. Das Integral hat daher denselben Werth, den es haben würde, wenn die Function $F(E)$ überall den Werth hätte, den sie in dem P am nächsten gelegenen Theile von S hat. Wir haben also, wenn wir diesen Werth der willkürlichen Function mit $F(P)$ bezeichnen,

$$u = F(P) \int\int \frac{(f^2 \backsim a^2)\, d\sigma}{D^3}, \quad \text{wenn } f \text{ unendlich wenig von } a \text{ verschieden ist,}$$

oder nach (45)

$$(46') \qquad u = 4\pi a\, F(P).$$

Bezeichnet jetzt ε eine beliebige positive Grösse, die kleiner als Eins ist, so erhalten wir durch Entwicklung in eine convergente Reihe

$$(47) \qquad \frac{1}{(1 - 2\varepsilon \cos\vartheta + \varepsilon^2)^{1/2}} = 1 + Q_1 \varepsilon + Q_2 \varepsilon^2 + \text{u. s. w.},$$

wo Q_1, Q_2, u. s. w. Functionen von ϑ bezeichnen, deren Ausdrücke unten bestimmt werden sollen. Jede derselben ist $+1$, wenn $\vartheta = 0$ ist, und sie sind abwechselnd gleich -1 und $+1$, wenn $\vartheta = \pi$ ist. Für alle zwischen 0 und π liegenden Werthe von ϑ ist jede derselben, wie sich leicht darthun lässt, > -1 und $< +1$. Unsere Reihe, welche in den genannten äussersten Fällen in die geometrische Reihe $1 \pm \varepsilon + \varepsilon^2 \pm$ u. s. w. übergeht, convergirt daher rascher als die geometrische Reihe, diese äussersten Fälle ausgenommen. Es ist somit

$$(48) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{f}\left(1 + \dfrac{Q_1 a}{f} + \dfrac{Q_2 a^2}{f^2} + \text{u. s. w.}\right), & \text{wenn } f > a \\[2ex] \dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{Q_1 f}{a} + \dfrac{Q_2 f^2}{a^2} + \text{u. s. w.}\right), & \text{wenn } f < a. \end{cases}$$

Nun haben wir

$$\frac{d\frac{1}{D}}{df} = \frac{a\cos\vartheta - f}{D^3},$$

folglich

$$\frac{f^2 - a^2}{D^3} = -\left(2f\frac{d\frac{1}{D}}{df} + \frac{1}{D}\right),$$

und daraus folgt, wenn wir (48) differentiiren, u. s. w.,

$$(49) \qquad \begin{cases} \dfrac{f^2 - a^2}{D^3} = \dfrac{1}{f}\left(1 + \dfrac{3\, Q_1 a}{f} + \dfrac{5\, Q_2 a^2}{f^2} + \cdots\right), & \text{wenn } f > a \\[2ex] \dfrac{a^2 - f^2}{D^3} = \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{3\, Q_1 f}{a} + \dfrac{5\, Q_2 f^2}{a^2} + \cdots\right), & \text{wenn } f < a. \end{cases}$$

Wir erhalten also für u (46) die folgenden Entwicklungen: —

$$(50)\quad \begin{cases} u = \frac{1}{f}\left\{\int\int F(E)\,d\sigma + \frac{3a}{f}\int\int Q_1 F(E)\,d\sigma \right.\\ \qquad\qquad \left. + \frac{5a^2}{f^2}\int\int Q_2 F(E)\,d\sigma + \cdots\right\}, \text{ wenn } f > a, \\ u = \frac{1}{a}\left\{\int\int F(E)\,d\sigma + \frac{3f}{a}\int\int Q_1 F(E)\,d\sigma \right.\\ \qquad\qquad \left. + \frac{5f^2}{a^2}\int\int Q_2 F(E)\,d\sigma + \cdots\right\}, \text{ wenn } f < a. \end{cases}$$

Diese Reihen sind offenbar convergent, ausser im Falle $f = a$. Nun haben wir aber (46′) bewiesen, dass der unentwickelte Werth von u in diesem Grenzfalle endlich und gleich $4\pi a F(P)$ ist. Daraus geht hervor, dass die Summe jeder Reihe sich mehr und mehr diesem Werthe nähert, wenn sich f immer mehr a nähert, und wir erhalten im Grenzfall

$$(51)\quad F(P) = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{\int\int F(E)\,d\sigma + 3\int\int Q_1 F(E)\,d\sigma + 5\int\int Q_2 F(E)\,d\sigma + \text{u. s. w.}\right\}.$$

Dies ist die berühmte Entwicklung einer willkürlichen Function in eine Reihe „Laplace'scher Coefficienten" oder, wie wir sie jetzt nennen, harmonischer Kugelfunctionen.

(t.) **Convergenz der Reihe.** — Die vorstehende Untersuchung zeigt, dass, wenn die willkürliche Function F für jeden Punkt von S einen bestimmten Werth hat, die Reihe (51) zu dem Werthe dieser Function convergirt, welcher dem Punkt P entspricht. Ebenso erkennt man, dass die Reihe, wenn der Werth von F durch irgend eine auf S liegende Linie hindurch eine unstetige Aenderung erfährt, nicht convergiren kann, wenn P genau auf dieser Linie liegt, aber noch convergiren muss, wenn P dieser Linie auch noch so nahe liegt.

Später werden wir eine Regel für den Grad der Convergenz der Reihe (51) herleiten.

(u.) **Entwicklung der Coefficienten.** — In der Entwicklung (47) von $\frac{1}{(1 - 2\varepsilon\cos\vartheta + \varepsilon^2)^{1/2}}$ sind die Coefficienten von $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots \varepsilon^n$ offenbar rationale ganze Functionen von $\cos\vartheta$ und beziehungsweise von den Graden $1, 2, \cdots n$. Sie werden unten in (59) und (60), mit $\vartheta' = 0$, explicit gegeben. Wenn aber x, y, z und x', y', z' beziehungsweise die rechtwinkligen Coordinaten von P und E bezeichnen, so haben wir

$$\cos\vartheta = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

wo

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \text{ und } r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \text{ ist.}$$

Wird also, wie oben, der Coefficient von ε^n in der Entwicklung mit Q bezeichnet, so ist

$$(52)\quad Q_n = \frac{H_n[(x,y,z),(x',y',z')]}{r^n r'^n};$$

$H_n[(x,y,z),(x',y',z')]$ bezeichnet eine symmetrische Function von (x,y,z) und (x',y',z'), welche in Beziehung auf jede einzelne dieser beiden Reihen homogen ist. Mittels des Ausdrucks von Q_n wird diese Function natürlich durch $\cos\vartheta$ ausgedrückt werden können.

Als Function von (x,y,z) angesehen, ist $Q_n r^n r'^n$ symmetrisch um OE herum, und als Function von (x',y',z') symmetrisch um OP. Wir werden daher $Q_n r^n r'^n$ die zweiaxige harmonische Function $n$ten Grades von $(x,y,z)(x',y',z')$ und Q_n die zweiaxige harmonische Flächenfunction $n$ter Ordnung nennen.

(v.) **Entwicklung von $\frac{1}{D}$ mittels des Taylor'schen Satzes.** — Es verdient bemerkt zu werden, dass man den Coefficienten jedes ihrer Glieder, wie $x'^j y'^k z'^l$, ohne die übrigen Glieder berechnen zu müssen, durch Anwendung des Taylor'schen Satzes auf eine Function dreier Veränderlichen erhalten kann, und zwar auf folgende Weise: —

Es ist

$$\frac{1}{(1-2\varepsilon\cos\vartheta+\varepsilon^2)^{1/2}} = \frac{r}{(r^2-2rr'\cos\vartheta+r'^2)^{1/2}}$$
$$= \frac{r}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}.$$

Bezeichnet jetzt $F(x,y,z)$ irgend eine Function von x, y und z, so haben wir

$$F(x+f,\ y+g,\ z+h)$$
$$= \sum_{j=0}^{j=\infty}\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{f^j g^k h^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l}\,\frac{d^{j+k+l}F(x,y,z)}{dx^j\,dy^k\,dz^l};$$

dabei ist zu bemerken, dass $1.2\ldots j$ durch die Einheit ersetzt werden muss, wenn $j=0$ ist, und dasselbe gilt von k und l. Nehmen wir also

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},$$

so ist

$$\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}$$
$$= \sum\sum\sum \frac{(-1)^{j+k+l}x'^j y'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l}\,\frac{d^{j+k+l}}{dx^j dy^k dz^l}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}},$$

und diese Entwicklung ist, wie der Vergleich mit (48) lehrt, allemal convergent, wenn

$$x'^2+y'^2+z'^2 < x^2+y^2+z^2$$

ist. Es ist folglich

$$(53)\qquad (rr')^n Q_n = r^{2n+1} \sum\sum\sum^{(j+k+l=n)} \frac{(-1)^{j+k+l}x'^j y'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l}\,\frac{d^{j+k+l}}{dx^j dy^k dz^l}\,\frac{1}{(x^2+y^2}$$

und hat die Summation alle Glieder zu umfassen, welche die angegebene Bedingung $j+k+l=n$ erfüllen. Es lässt sich leicht darthun, dass die zweite Seite der Formel (53) nicht nur, wie unmittelbar ersichtlich, in x',y',z', sondern auch in x,y,z eine ganze und homogene Function $n$ten Grades und ferner in Beziehung auf jede dieser beiden Reihen von

Veränderlichen symmetrisch ist. Wir gelangen so zu dem oben in (52) ausgedrückten Schlusse und haben jetzt die daselbst angedeutete Function explicit in Differentialquotienten ausgedrückt; der erhaltene Ausdruck kann weiter mit Leichtigkeit unmittelbar auf eine algebraische Form gebracht werden.

(v'.) **Entwicklung der einaxigen harmonischen Function daraus hergeleitet.** — In dem besondern Falle $x' = 0$ und $y' = 0$ reducirt sich (53) auf ein einziges Glied, das eine um die Axe OZ symmetrische Function von x, y, z ist, und wenn wir jede Seite durch r'^n, oder durch die gleiche Grösse z'^n dividiren, so folgt

$$(54)\qquad r^n Q_n = \frac{(-1)^n r^{2n+1}}{1.2.3\ldots n} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$$

Durch wirkliche Differentiation kann man leicht das Bildungsgesetz der Reihe der Zähler entdecken, und wir finden auf diese Weise mit ungefähr derselben Leichtigkeit jede der obigen Entwicklungen (31), (40), (41) für den Fall $m = p$, wie die trigonometrischen Formeln, die natürlich dadurch erhalten werden, dass man $z = r \cos\vartheta$ und $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta$ setzt.

(w.) Wird darin wieder $\cos\vartheta = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$ gesetzt und, wie oben in (u.), wieder die Bezeichnung $(x, y, z), (x', y', z')$ eingeführt, so gelangen wir zu Entwicklungen von Q_n in den in (52) angezeigten Ausdrücken.

(x.) **Entwicklung der zweiaxigen harmonischen Functionen.** — Zu einigen der nützlichsten Entwicklungen von Q_n gelangt man mit grosser Schnelligkeit, wenn man den Gleichungen (26) gemäss wieder die imaginären Coordinaten (ξ, η) an Stelle von (x, y) und in ähnlicher Weise (ξ', η') an Stelle von (x', y') einführt. Wir haben dann

$$D^2 = (\xi - \xi')(\eta - \eta') + (z - z')^2,$$

also, wie oben,

$$\frac{1}{[(\xi - \xi')(\eta - \eta') + (z - z')^2]^{1/2}}$$
$$= \sum\sum\sum \frac{(-1)^{j+k+l} \xi'^j \eta'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l} \frac{d^{j+k+l}}{d\xi^j d\eta^k dz^l} \frac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}},$$

und folglich

$$(r')^n Q_n = r^{2n+1} \sum\sum\sum^{(j+k+l)=n} \frac{(-1)^{j+k+l} \xi'^j \eta'^k z'^l}{1.2\ldots j.1.2\ldots k.1.2\ldots l} \frac{d^{j+k+l}}{d\xi^j d\eta^k dz^l} \frac{1}{(\xi\eta + z^2)^{1/2}}.$$

Natürlich ist in diesem Falle

$$r^2 = \xi\eta + z^2, \quad r'^2 = \xi'\eta' + z'^2$$

und

$$\cos\vartheta = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta + zz'}{rr'},$$

und ganz wie oben sehen wir, dass dieser Ausdruck (55), der offenbar in Beziehung auf ξ', η', z' und ebenso in Beziehung auf ξ, η, z eine homogene Function $n$ten Grades ist, jedes dieser beiden Systeme von Veränderlichen symmetrisch enthält.

Nun lassen sich, wie wir oben gesehen haben, alle $n$ten Differentialquotienten von $\frac{1}{r}$ auf die folgenden unabhängigen Formen reduciren: —

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{r}, \quad \begin{matrix} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{d}{d\eta}\frac{1}{r}, & \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-2}\left(\frac{d}{d\eta}\right)^2 \frac{1}{r}, & \ldots \left(\frac{d}{d\eta}\right)^n \frac{1}{r} \\ \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{d}{d\xi}\frac{1}{r}, & \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 \frac{1}{r}, & \ldots \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n \frac{1}{r}. \end{matrix}$$

Folglich wird $r^n Q_n$, als Function von z, ξ, η angesehen, durch diese $2n + 1$ Grössen ausgedrückt, deren jede einen z', ξ', η' enthaltenden Coefficienten hat, und der Symmetrie wegen muss dieser Coefficient das Product der nämlichen Function von z', η', ξ' in einen Factor sein, welcher keine der beiden Reihen von Veränderlichen (z, ξ, η), (z', η', ξ') enthält. Aus der Symmetrie in Beziehung auf ξ, η' und η, ξ' ersehen wir ferner, dass der numerische Factor für diejenigen Grössen der nämliche sein muss, welche einerseits ξ, η', andererseits η, ξ' in ähnlicher Weise enthalten. Daher ist

$$(56)\begin{cases} Q_n = (rr')^{n+1}\Big[E_0\left(\frac{d}{dz'}\right)^n \frac{1}{r'}\left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{r} \\ \quad + \sum\limits_{s=1}^{s=n} E_n^{(s)}\Big\{\frac{d^n}{dz'^{n-s}\,d\xi'^s}\frac{1}{r'}\,\frac{d^n}{dz^{n-s}\,d\eta^s}\frac{1}{r} \\ \quad + \frac{d^n}{dz'^{n-s}\,d\eta'^s}\frac{1}{r'}\,\frac{d^n}{dz^{n-s}\,d\xi^s}\frac{1}{r}\Big\}\Big], \\ \text{wo} \\ E_n^{(s)} = \frac{1}{1.2\ldots s.1.2\ldots(n-s)\,{}^1\!/_2.{}^3\!/_2\ldots(s-{}^1\!/_2)(2s+1)(2s+2)\ldots(n+s)} \\ \text{ist.} \end{cases}$$

Der Werth von $E_n^{(s)}$ wird auf folgende Weise erhalten: — Vergleichen wir den Coefficienten des Gliedes $(zz')^{n-s}(\xi\eta')^s$ in dem Zähler des Ausdrucks, in den (55) übergeht, wenn man den Differentialquotienten entwickelt, mit dem Coefficienten desselben Gliedes in (56), so folgt

$$(57) \qquad \frac{(-1)^n M}{1.2\ldots(n-s).1.2\ldots s} = E_n^{(s)} M^2,$$

wo M den Coefficienten von $z^{n-s}\xi^s$ in $r^{2n+1}\frac{d^n}{dz^{n-s}\,d\eta^s}\frac{1}{r}$, oder, was dasselbe ist, den Coefficienten von $z'^{n-s}\eta'^s$ in $r'^{2n+1}\frac{d^n}{dz'^{n-s}\,d\xi'^s}\frac{1}{r}$ bezeichnet. Hieraus und aus dem Werthe (42) für M ergiebt sich der obige Werth von $E_n^{(s)}$.

(y.) Wir sind jetzt im Stande, die Entwicklung von Q_n auf eine reelle trigonometrische Form zu reduciren. Zunächst haben wir nach (33)

$$(58) \qquad (\xi\eta')^s + (\xi'\eta)^s = 2(rr'\sin\vartheta\sin\vartheta')^s \cos s(\varphi - \varphi').$$

Es sei nun

$$
(59)\begin{cases} \mathfrak{d}_n^{(s)} = \sin^s\vartheta\Big[\cos^{n-s}\vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{4(s+1)}\cos^{n-s-2}\vartheta\sin^2\vartheta \\ + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{4^2(s+1)(s+2).1.2}\cos^{n-s-4}\vartheta\sin^4\vartheta - \text{u. s. w.}\Big], \end{cases}
$$

(d. h. nach der Bezeichnung von (40) $C\mathfrak{d}_n^{(s)} = \Theta_n^{(s)}$), und die analoge Bezeichnung mit Accenten beziehe sich auf ϑ'. Dann erhalten wir aus (56), (57) und (58)

$$
Q_n = 2\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots(s-\frac{1}{2})}{1.2\ldots s}\cdot\frac{(2s+1)(2s+2)\ldots(2s+n-s)}{1.2\ldots(n-s)}\cos s(\varphi-\varphi')\mathfrak{d}_n^{(s)}\mathfrak{d}_n'^{(s)},
$$

wo jedoch vom ersten Glied (für welches $s=0$ ist) nur die Hälfte genommen werden darf.

(z.) Wir können jetzt den in (g.), (17) gegebenen Fundamentalsatz $\int\int S_n S_{n'}\,d\omega = 0$ und die entsprechenden auf die Elemente harmonischer Functionen bezüglichen Sätze (43) und (44) durch Auswerthung des Integrals $\int\int S_n^2\,d\omega$ vervollständigen.

Wenn wir zuerst den oben für S_n hergeleiteten allgemeinen Ausdruck (37) benutzen und die willkürlichen Constanten so modificiren, dass sie für unsere jetzige Bezeichnung passen, so haben wir

$$
(61)\qquad S_n = \sum_{s=0}^{s=n} A_s\cos(s\varphi + a_s)\mathfrak{d}_n^{(s)},
$$

folglich

$$
(62)\qquad \int\int S_n^2\,d\omega = \pi\sum_0^n A_s^2\int_0^\pi(\mathfrak{d}_n^{(s)})^2\sin\vartheta\,d\vartheta.
$$

Um das bestimmte Integral des zweiten Gliedes auszuwerthen, haben wir nur den allgemeinen Satz (51) für die Entwicklung einer Function in Glieder harmonischer Flächenfunctionen auf den besonderen Fall anzuwenden, in welchem die willkürliche Function $F(E)$ selbst die harmonische Function, $\cos s\varphi\,\mathfrak{d}_n^{(s)}$, ist. Man erhält dann mit Rücksicht auf (16)

$$
(63)\qquad \cos s\varphi\,\mathfrak{d}_n^{(s)} = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\sin\vartheta'\,d\vartheta'\int_0^{2\pi}d\varphi'\cos s\varphi'\,\mathfrak{d}_n'^{(s)}Q_n.
$$

Wird hierin für Q_n seine eben ermittelte trigonometrische Entwicklung benutzt und die Integration für φ' zwischen den angegebenen Grenzen ausgeführt, so stellt sich heraus, dass $\cos s\varphi\,\mathfrak{d}_n^{(s)}$ fortdividirt werden kann, und man gelangt leicht (wenn man noch die Accente in dem übrig bleibenden bestimmten Integral weglässt) zu der Formel

$$
\int \sin\vartheta(\mathfrak{d}_n^{(s)})^2\,d\vartheta = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1.2\ldots s}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots(s-\frac{1}{2})}\cdot\frac{1.2\ldots(n-s)}{(2s+1)(2s+2)\ldots(2s+n-s)}.
$$

Diese Formel bleibt auch für den Fall $s = 0$ bestehen; es wird dann das zweite Glied derselben $\frac{2}{2n+1}$. Es ist gut, hier die Gleichung (44) wieder anzuführen, welche, wenn man sie statt in $\Theta(m, n)$ in $\mathfrak{b}_n^{(s)}$ ausdrückt, sich in

$$(65) \qquad \int_0^\pi \sin\vartheta\, \mathfrak{b}_n^{(s)}\, \mathfrak{b}_{n'}^{(s)}\, d\vartheta = 0$$

verwandelt, wo n und n' verschieden sein müssen. Die durch diese beiden Gleichungen (64) und (65) ausgedrückten Eigenschaften können aus dem expliciten Ausdruck (59) von $\mathfrak{b}_n^{(s)}$ durch directe Integration bewahrheitet werden, und wird dies eine möglicher Weise zwar nicht sehr leichte, aber gute analytische Uebung sein.

Zweites Capitel.

Gesetze und Principien der Dynamik.

205. Einführung der Begriffe Materie und Kraft. — Im vorhergehenden Capitel haben wir die Bewegung von Punkten, Linien, Oberflächen und Körpern, mochte dieselbe nun von einer Ausdehnungs- und Formveränderung begleitet sein oder nicht, vom rein geometrischen Gesichtspunkte aus betrachtet. Die Resultate, zu denen wir gelangten, sind daher von dem Begriffe „Materie" und von den Kräften, welche die Materie äussert, sämmtlich unabhängig. Bisher haben wir die Existenz der Bewegung, der Formänderung, u. s. w. einfach vorausgesetzt: Jetzt liegt uns ob, zu erörtern, nicht wie eine solche Bewegung, u. s. w. wohl hervorgebracht werden könne, sondern welches die wirklichen Ursachen sind, die in der materiellen Welt eine solche nach sich ziehen. Die Resultate des vorliegenden Capitels müssen daher als Ergebnisse der wirklichen Erfahrung, sei es nun Beobachtung oder Experiment, angesehen werden. Wie eine solche Erfahrung gewonnen wird, soll den Gegenstand eines späteren Capitels ausmachen.

206. Wir glauben wohlzuthun, jedenfalls beim Beginn unserer Betrachtung Newton's Darstellung treu zu folgen. Denn die Einleitung zu den Principia enthält in äusserst durchsichtiger Form die allgemeine Grundlage der Dynamik. Die darin niedergelegten Definitiones und Axiomata sive Leges Motus erfordern nur einige durch spätere Entwicklungen gewonnene Erweiterungen und erläuternde Zusätze, um für den gegenwärtigen Stand der Wissenschaft

zu passen und eine weit bessere Einleitung zur Dynamik zu bilden als sogar in einigen der besten neueren Lehrbücher sich vorfindet.

207. Wir können natürlich keine dem Metaphysiker genügende Definition der Materie geben. Der Naturforscher wird sich mit der Erklärung begnügen, dass Materie das durch die Sinne Wahrnehmbare, oder dasjenige ist, was eine Kraft äussern oder die Wirkung einer Kraft erleiden kann. Die zweite und genau genommen auch die erstere dieser Definitionen schliesst den Begriff der Kraft in sich, die thatsächlich ein directes Object der Wahrnehmung, vielleicht für alle unsere Sinne, jedenfalls aber für den „Muskelsinn" ist.

Was die weitere Erörterung der Frage: Was ist Materie betrifft, so müssen wir auf unser Capitel über die Eigenschaften der Materie verweisen.

208. Masse, Dichtigkeit. — Die Stoffmenge oder, wie wir nunmehr sagen wollen, die Masse eines Körpers ist nach Newton dem Volumen und zugleich der Dichtigkeit proportional. Diese Definition giebt uns eigentlich eher den Begriff der Dichtigkeit, als denjenigen der Masse; denn sie zeigt uns, dass sich die Dichtigkeit verdoppelt, wenn man in ein Gefäss von gegebenem Rauminhalt doppelt so viel Materie, z. B. Luft hineinbringt, u. s. w. Sie zeigt aber auch, dass bei einem Stoffe von gleichförmiger Dichtigkeit die Masse oder Stoffmenge dem Volumen oder eingenommenen Raume proportional ist.

Bezeichnet M die Masse, ϱ die Dichtigkeit und V das Volumen eines homogenen Körpers, so ist

$$M = V\varrho,$$

wenn wir als Masseneinheit die in der Volumeneinheit eines Körpers von der Einheit der Dichtigkeit enthaltene Masse annehmen.

Wenn sich die Dichtigkeit eines Körpers von Punkt zu Punkt ändert, so erhalten wir aus der vorstehenden Formel offenbar

$$M = \int\int\int \varrho \, dx \, dy \, dz;$$

darin wird ϱ als bekannte Function von x, y, z vorausgesetzt, und die Integration hat sich über den ganzen von dem Stoffe des Körpers eingenommenen Raum zu erstrecken, mag derselbe continuirlich sein oder nicht.

Newton fügt dieser Definition eine Bemerkung hinzu, die besondere Beachtung verdient. Er sagt, dass, wenn es etwas gäbe, was die Zwischenräume aller Körper frei durchdringt, so würde

dies bei der Bestimmung ihrer Masse oder ihrer Dichtigkeit nicht in Rechnung gezogen sein.

209. Newton zeigt ferner, dass das Gewicht eines Körpers ein praktisches Maass seiner Masse ist. Die Pendelversuche, durch welche er diese wichtige Bemerkung begründet, werden später in unserem Capitel über die Eigenschaften der Materie beschrieben werden.

Wir werden alsbald darlegen, dass die für Messungen in England geeignetste Masseneinheit das englische Pfund ist.

210. **Bewegungsgrösse.** — Die Quantität der Bewegung, oder die Bewegungsgrösse eines starren, ohne Rotation sich bewegenden Körpers ist seiner Masse und zugleich seiner Geschwindigkeit proportional. Die Gesammtbewegung ist die Summe der Bewegungen seiner verschiedenen Theile. Danach würde eine doppelte Masse oder eine doppelte Geschwindigkeit einer doppelten Bewegungsgrösse entsprechen, u. s. w.

Wenn wir also die Bewegungsgrösse der Masseneinheit, die sich mit der Einheit der Geschwindigkeit bewegt, als Einheit der Bewegungsgrösse annehmen, so ist Mv die Bewegungsgrösse einer Masse M, deren Bewegung mit der Geschwindigkeit v erfolgt.

211. **Aenderung der Bewegungsgrösse.** — Die Aenderung der Quantität der Bewegung oder die Aenderung der Bewegungsgrösse ist der in Bewegung befindlichen Masse und zugleich der Aenderung ihrer Geschwindigkeit proportional.

Die Aenderung der Geschwindigkeit ist in dem allgemeinen Sinne des § 27 zu verstehen. Wenn also (s. d. Fig. des § 27) eine durch OA dargestellte Geschwindigkeit sich in eine andere Geschwindigkeit OC verwandelt, so stellt AC die Aenderung der Geschwindigkeit in Grösse und Richtung dar.

212. **Beschleunigung der Bewegungsgrösse.** — Die verhältnissmässige Grösse der Aenderung der Bewegungsgrösse oder die Beschleunigung der Bewegungsgrösse ist der in Bewegung befindlichen Masse und zugleich der Beschleunigung der Geschwindigkeit proportional.

So ist (§ 35, b) die Beschleunigung der Bewegungsgrösse eines frei fallenden Körpers eine constante Grösse und geht in verticaler Richtung vor sich. Ferner ist (§ 35, a) die Beschleunigung der Bewegungsgrösse einer Masse M, welche mit gleichförmiger Geschwindigkeit V einen Kreis vom Radius R beschreibt, gleich $\frac{MV^2}{R}$ und

gegen den Mittelpunkt des Kreises gerichtet, d. h. es findet eine Aenderung der Richtung, nicht aber eine Aenderung der Geschwindigkeit der Bewegung statt.

Allgemein (§ 29) ist für einen sich irgendwie im Raume bewegenden Körper von der Masse M die Beschleunigung der Bewegungsgrösse in der Richtung der Bewegung (die tangentiale Beschleunigung) gleich $M\frac{d^2s}{dt^2}$ und die nach dem Krümmungsmittelpunkt der Bahn genommene Beschleunigung der Bewegungsgrösse (die normale oder centripetale Beschleunigung) gleich $M\frac{v^2}{\varrho}$. Wir können die gesammte Beschleunigung der Bewegungsgrösse auch durch ihre nach den drei zu einander rechtwinkligen Coordinatenaxen genommenen Componenten $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$, oder nach Newton's Schreibweise durch $M\ddot{x}, M\ddot{y}, M\ddot{z}$ darstellen.

213. Kinetische Energie. — Die lebendige Kraft oder kinetische Energie eines in Bewegung befindlichen Körpers ist seiner Masse und zugleich dem Quadrate seiner Geschwindigkeit proportional. Wenn wir die früheren Einheiten der Masse und der Geschwindigkeit beibehalten, so ist es sehr vortheilhaft, die lebendige Kraft als das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit zu definiren.

214. Die für die Zeiteinheit genommene Aenderung der kinetischen Energie ist gleich dem Product aus der Geschwindigkeit in die tangentiale Componente der Beschleunigung der Bewegungsgrösse. Denn es ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Mv^2}{2}\right) = v\,.\,M\frac{dv}{dt}.$$

215. Materieller Punkt. — Es ist zu bemerken, dass wir im Vorhergehenden, ausser bei der Definition der Masse, keine Rücksicht auf die Ausdehnung des in Bewegung befindlichen Körpers genommen haben. Dies ist von keinem Einfluss, so lange der Körper nicht rotirt, und so lange seine Theile dieselbe Lage gegen einander beibehalten. In diesem Falle können wir die ganze im Körper enthaltene Materie als in einen einzigen Punkt concentrirt ansehen. Wir sprechen daher von einem materiellen Punkte, der von einem geometrischen Punkte wohl zu unterscheiden ist. Wenn aber der Körper rotirt, oder wenn seine Theile ihre gegenseitige Lage ändern, so ist es unmöglich, einen Punkt zu wäh-

len, durch dessen Bewegungen allein sich diejenigen der übrigen Punkte bestimmen liessen. In solchen Fällen sind die Bewegungsgrösse und die Aenderung der Bewegungsgrösse des ganzen Körpers in irgend einer Richtung die Summen der Bewegungsgrössen und der Aenderungen der Bewegungsgrössen seiner Theile in diesen Richtungen; dagegen ist die kinetische Energie des ganzen Körpers, als überhaupt von jeder Richtung unabhängig, einfach die Summe der kinetischen Energien seiner verschiedenen Theile oder materiellen Punkte.

216. **Trägheit.** — Der Materie wohnt das Bestreben inne, äusseren Einflüssen zu widerstehen; deshalb bleibt jeder Körper, so lange er es vermag, in Ruhe, oder er bewegt sich gleichförmig in gerader Richtung.

Dieses Streben, die Trägheit der Materie, ist der im Körper enthaltenen Stoffmenge proportional. Es ist also irgend eine Ursache erforderlich, um die Gleichförmigkeit der Bewegung eines Körpers zu stören, oder um denselben von seiner natürlichen geradlinigen Bahn abzulenken.

217. Jede Ursache, welche den natürlichen Zustand der Ruhe eines Körpers oder seine gleichförmige Bewegung in geradliniger Bahn zu ändern strebt, heisst einwirkende Kraft oder einfach Kraft.

Die Kraft wird vollständig verbraucht in der Wirkung, die sie ausübt, und wenn die Kraft zu wirken aufhört, so setzt der Körper seiner Trägheit zufolge in der ihm ertheilten Richtung und mit der ihm ertheilten Geschwindigkeit seine Bewegung fort. Die Kräfte können verschiedener Art sein, als Druck, Schwere, Reibung, irgend eine der anziehenden oder abstossenden Wirkungen der Elektricität, des Magnetismus, u. s. w.

218. **Elemente, welche eine Kraft bestimmen.** — Die drei eine Kraft bestimmenden Elemente, oder die drei Elemente, welche bekannt sein müssen, bevor man sich einen klaren Begriff von der in Rede stehenden Kraft bilden kann, sind der Angriffsort, die Richtung und die Grösse derselben.

(a.) Angriffsort einer Kraft. Der erste Fall, den wir zu betrachten haben, ist derjenige, in welchem der Angriffsort ein Punkt ist. Wir haben schon gezeigt, in welchem Sinne der Ausdruck „Punkt" zu nehmen ist, und in welcher Weise wir uns folglich vorzustellen haben, eine Kraft wirke an einem Punkte. In der Wirklichkeit aber ist der Angriffsort einer Kraft immer entweder eine Fläche oder ein mit Materie erfüllter Raum von drei Dimen-

sionen. Die Spitze der feinsten Nadel, oder die Schneide des schärfsten Messers ist immer noch eine Fläche und wirkt als solche auf die Körper, mit denen sie in Berührung kommt. Auch die starrsten Substanzen berühren einander, wenn man sie zusammenbringt, nicht in einem Punkte, sondern schliessen sich so an einander an, dass eine Berührungsfläche entsteht.

Andererseits ist die Schwere eine Kraft, deren Angriffsort die ganze Materie des Körpers ist, dessen Gewicht wir betrachten, und der kleinste Theil Materie, der ein Gewicht hat, nimmt einen endlichen Theil des Raumes ein. Wir sehen somit, dass es zwei Arten von Kräften giebt, die sich durch die Natur ihres Angriffsortes unterscheiden: Kräfte, deren Angriffsort eine Fläche, und Kräfte, deren Angriffsort ein Körper ist. Wenn ein schwerer Körper auf dem Boden oder auf dem Tische ruht, so wird einer nach unten wirkenden Kraft der zweiten Art durch eine nach oben gerichtete Kraft, die von der ersteren Art ist, das Gleichgewicht gehalten.

(b.) Das zweite eine Kraft bestimmende Element ist ihre Richtung. Die Richtung einer Kraft ist die Linie, in welcher sie wirkt. Wenn der Angriffsort einer Kraft als ein Punkt angesehen wird, so ist eine durch diesen Punkt in der Richtung, in welcher die Kraft den Körper zu bewegen strebt, gelegte Linie die Richtung der Kraft. Im Falle einer über eine Oberfläche vertheilten Kraft ist es oft möglich und zweckmässig, einen einzigen Punkt und eine einzige Linie in der Art anzunehmen, dass eine in diesem Punkte angreifende und in der Richtung dieser Linie wirkende Kraft von gewisser Grösse eben die Wirkung hervorbringt, die in Wirklichkeit erfolgt.

(c.) Das dritte eine Kraft bestimmende Element ist ihre Grösse. Dies erfordert eine Betrachtung der Methode, die in der Dynamik zum Messen der Kräfte angewandt wird. Um etwas messen zu können, muss man zuvor eine Maasseinheit oder ein Maass, auf welches man sich bezieht, und ausserdem ein Princip der numerischen Bestimmung oder ein Verfahren haben, nach welchem man sich auf dieses Maass bezieht. Beides werden wir uns alsbald verschaffen. Siehe auch unten § 258.

219. Der beschleunigende Effect einer Kraft ist der Geschwindigkeit proportional, welche die Kraft in einer gegebenen Zeit erzeugt, und wird gemessen durch die Geschwindigkeit, welche in der Zeiteinheit hervorgebracht wird, respective hervorgebracht werden würde. Mit anderen Worten, der beschleunigende Effect ist die verhältnissmässige Grösse der durch die Kraft bewirkten Geschwindig-

keitsänderung. Dies ist aber nichts anderes, als was wir (§ 28) schon als Beschleunigung definirt haben.

220. Maass einer Kraft. — Das Maass einer Kraft ist die Quantität der Bewegung, die sie in der Zeiteinheit hervorbringt.

Der Leser, der gewohnt ist, von einer Kraft von so und so viel Pfund oder Tonnen zu sprechen, wird einigermaassen überrascht sein, wenn er findet, dass Newton solchen Ausdrücken keinen Vorschub leistet. Diese Methode ist nicht correct, so lange nicht bestimmt angegeben ist, in welchem Theile der Erdoberfläche das Pfund oder eine andere bestimmte Stoffmenge gewogen werden soll; denn das Gewicht einer gegebenen Stoffmenge ist in verschiedenen Breiten verschieden. In auffallendem Gegensatz zur Plumpheit dieses Systems steht die klare und einfache Genauigkeit der absoluten Methode, wie wir sie oben darlegten. Diese Methode werden wir überall beibehalten, ausser wenn wir bei der Mittheilung von Resultaten Kräfte in den den Ingenieuren eines Landes geläufigen Ausdrücken anzugeben wünschen. Wenn also W die in Pfunden ausgedrückte Masse eines Körpers, g die Geschwindigkeit ist, welche derselbe beim Fall während einer Secunde unter dem Einfluss seines Gewichtes oder der Anziehung der Erde erlangen würde, und P die in kinetischen oder absoluten Einheiten gemessene Schwerkraft ist, die auf den Körper wirkt, so haben wir

$$P = Wg.$$

221. Nach dem System, welches in den neueren Lehrbüchern der Dynamik gewöhnlich befolgt wird, ist die Masseneinheit das $g$fache der Masse der Gewichtseinheit. Diese Definition, welche eine wechselnde und sehr unnatürliche Masseneinheit liefert, ist sehr unpassend. In der That sind Gewichte Massen, nicht Kräfte. Sie werden zunächst im Verkehr angewandt, um eine bestimmte Stoffmenge ihrer Quantität nach auszumessen, ohne Rücksicht auf die Kraft, mit der dieselbe von der Erde angezogen wird.

So würde ein Kaufmann bei Anwendung einer gewöhnlichen Wage und einer Reihe von Gewichtstücken seinen Kunden immer dieselbe Quantität derselben Stoffart geben, wie auch immer die Anziehungskraft der Erde sich ändern möchte, da seine Messung von Massen abhängig ist. Ein anderer dagegen, der sich einer Federwage bediente, würde in hohen Breiten seine Kunden und in niedrigen Breiten sich selbst betrügen, wenn sein Instrument (das auf Kräften und nicht auf Massen beruht) in London genau adjustirt wäre.

Es ist nur eine secundäre Anwendung unserer Gewichte, dieselben zur Messung von Kräften, wie der Spannung von Dämpfen, der Muskelkraft, u. s. w. zu benutzen. In allen Fällen, in denen grosse Genauigkeit erfordert wird, müssen die durch eine solche Methode erhaltenen Resultate auf das reducirt werden, was sich ergeben hätte, wenn die Kraftmessung mittels einer vollkommenen Federwage erfolgt wäre, deren Eintheilung die an einem festgesetzten Orte auf die Gewichte wirkenden Schwerkräfte anzuzeigen hat.

Es ist daher weit einfacher und besser, das englische Pfund, oder ein anderes nationales oder internationales Normalgewicht, z. B. das Gramm (s. das Capitel über Maasse und Instrumente) als Masseneinheit anzunehmen und daraus der oben gegebenen Newton'schen Definition gemäss die Krafteinheit herzuleiten. Dies ist die Methode, welche Gauss bei seiner Vervollkommnung des Systems der Kräftemessung eingeschlagen hat, und ihr verdanken wir eine absolute Krafteinheit, die auf einem anderen Wege nicht hätte erlangt werden können.

222. **Clairault's Formel für die Grösse der Schwerkraft.** — Aus Beobachtungen und mit Zugrundelegung einer gewissen auf die Gestalt und Dichtigkeit der Erde bezüglichen Theorie hat Clairault eine Formel hergeleitet, welche überall, wo keine Pendelbeobachtung von hinlänglicher Genauigkeit angestellt worden ist, benutzt werden kann zur Berechnung des wahrscheinlichsten Werthes der scheinbaren Schwerkraft, die die Resultante der wirklichen Schwerkraft und der Centrifugalkraft ist. Diese Formel enthält zwei Constanten, die nach den besten neueren Pendelbeobachtungen berichtigt sind (Airy, Encyclopaedia Metropolitana, Figure of the Earth). Sie ist folgende: —

Wenn G die am Aequator und g die in irgend einer Breite λ auf eine Masseneinheit wirkende scheinbare Schwerkraft bezeichnet, so ist

$$g = G(1 + 0{,}005133 \sin^2 \lambda).$$

Der Werth von G, ausgedrückt in absoluten Krafteinheiten, von denen gleich die Rede sein soll, ist

32,088 in britischen Einheiten,
9,780 in metrischen Einheiten.

Nach dieser Formel ist die Schwerkraft am Pole

$$g = 32{,}088 \times 1{,}005133 = 32{,}2527.$$

223. **Gauss' absolute Einheit.** — Da die Schwere nicht im Stande war, uns ein von jeder Oertlichkeit unabhängiges bestimmtes

Maass zu verschaffen, so müssen wir uns irgend einer anderen Methode bedienen. Das in der oben dargelegten Weise von Newton angegebene, praktisch aber zuerst von Gauss eingeführte Messungsprincip liefert uns, was wir suchen. Nach diesem Princip ist die Krafteinheit diejenige Kraft, welche der Masseneinheit während der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt.

Dieses Maass ist unter dem Namen: „Gauss' absolute Einheit" bekannt; absolut heisst dieselbe deshalb, weil sie ein Kräftemaass liefert, das von der in verschiedenen Gegenden verschiedenen Grösse der Schwerkraft unabhängig ist.

224. Die absolute Einheit hängt von der Masseneinheit, der Zeiteinheit und der Einheit der Geschwindigkeit ab. Da nun die Einheit der Geschwindigkeit von der Raumeinheit und der Zeiteinheit abhängt, so enthält unsere Definition eine einfache Beziehung auf Masse und Raum, aber eine doppelte Beziehung auf die Zeit, und dies ist ein Punkt, der besonders beachtet werden muss.

225. **Britische absolute Einheit.** — Die Masseneinheit sei das britische Pfund, die Raumeinheit der britische Fuss und die Zeiteinheit die mittlere Sonnensecunde. Dann haben wir die britische absolute Krafteinheit zu definiren als „die Kraft, unter deren Einwirkung ein Pfund Materie während einer Secunde eine Geschwindigkeit von einem Fuss per Secunde erlangt."

226. **Vergleich der absoluten Krafteinheit mit der Schwerkraft.** — Um dieses Maass verständlich zu machen, haben wir nur zu bestimmen, wie viele absolute Einheiten auf eine gegebene Masse an irgend einem gegebenen Orte dieselbe Wirkung ausüben werden, wie die Schwerkraft. Zu diesem Zwecke müssen wir die Beschleunigung messen, welche die Schwerkraft in einem Körper erzeugt, der auf seiner Bahn keinen Widerstand findet. Das zuverlässigste Verfahren, diese Messung auszuführen, ist ein indirectes und beruht auf der Anwendung des Pendels. Die Pendelversuche, welche der Kapitän Kater in Leith Fort angestellt hat, haben ergeben, dass ein Körper, der an jenem Orte eine Secunde, ohne Widerstand zu finden, fällt, die Geschwindigkeit von 32,207 Fuss per Secunde erlangt. Die vorstehende Formel giebt uns für die Breite 55° 33′, welche ungefähr die Breite von Edinburg ist, genau 32,2. Die Aenderung der Schwerkraft für einen Grad Breitendifferenz macht um die Breite von Edinburg herum nur 0,0000832 ihres eigenen Betrages aus. Nahezu von derselben Grösse, nur ein wenig grösser, ist sie für jeden Breitengrad nach Süden bis zur Südgrenze der

britischen Inseln. Andererseits würde nach Norden hin, in der Breite der Orkney- und Shetland-Inseln, die Aenderung für jeden Grad merklich geringer sein. Vom Norden bis zum Süden der britischen Inseln nimmt also die Schwerkraft für jeden Grad höchstens um $^1/_{12000}$ des ganzen Betrages zu, den sie an irgend einem Orte hat. Der Durchschnittswerth der Schwerkraft ist für Grossbritannien und Irland jedenfalls nur wenig von 32,2 verschieden. Wenden wir das erhaltene Resultat auf die vorliegende Frage an, so sehen wir, dass die Schwerkraft in Edinburg 32,2mal so gross als die Kraft ist, welche in einem Pfund während einer Secunde eine Geschwindigkeit von einem Fuss per Secunde erzeugen würde, oder mit anderen Worten: 32,2 ist die Anzahl der absoluten Einheiten, welche in dieser Breite dem Gewicht eines Pfundes gleichkommt. Die britische absolute Krafteinheit ist somit, roh ausgedrückt, etwa gleich dem Gewicht einer halben Unze.

227. Da Kräfte nur Richtung und Grösse besitzen, so können sie wie Geschwindigkeiten durch gerade Linien dargestellt werden, welche die Richtungen der Kräfte haben, und deren Längen den Grössen derselben beziehungsweise proportional sind.

Auch die Gesetze über die Zusammensetzung und Zerlegung beliebig vieler in demselben Punkte angreifenden Kräfte sind, wie wir später (§ 255) zeigen werden, die nämlichen wie die für Geschwindigkeiten bereits als gültig erwiesenen. Die §§ 26, 27 bleiben daher richtig, wenn statt Geschwindigkeit überall Kraft gesagt wird.

228. **Zerlegung der Kräfte, wirksame Componente einer Kraft.** — Die nach irgend einer Richtung genommene Componente einer Kraft, bisweilen die in dieser Richtung wirksame Componente genannt, wird daher erhalten, wenn man die Grösse der Kraft mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den die Richtungen der Kraft und der Componente einschliessen. Die zweite Componente ist in diesem Falle senkrecht gegen die erstere gerichtet.

Es ist in den meisten Fällen zweckmässig, Kräfte parallel zu drei auf einander senkrechten Geraden in Componenten zu zerlegen; jede dieser drei Componenten einer Kraft ergiebt sich durch Multiplication der Grösse der Kraft mit dem Cosinus des betreffenden Winkels.

229. **Satz aus der Geometrie.** — Wenn die Abstände eines Punktes von drei auf einander senkrechten Ebenen beziehungsweise gleich sind den mittleren Abständen einer Punktgruppe von den-

selben Ebenen, so ist der Abstand dieses Punktes von jeder beliebigen anderen Ebene gleich dem mittleren Abstande der Gruppe von eben dieser Ebene. Wenn also der Punkt in Bewegung ist, so ist seine senkrecht gegen diese Ebene genommene Geschwindigkeit natürlich gleich dem Mittelwerth der in derselben Richtung genommenen Geschwindigkeiten der Punkte der Gruppe.

Es seien (x_1, y_1, z_1), u. s. w. die Punkte der Gruppe, deren Anzahl i sein möge, und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Coordinaten eines Punktes, welcher den Bedingungen des Theorems genügt, so dass also

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \text{etc.}}{i},$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \text{etc.}}{i},$$

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \text{etc.}}{i}$$

ist. Ist nun

$$lx + my + nz - a = 0$$

die Normalgleichung einer Ebene, d. h. bezeichnet a die Länge des vom Coordinatenanfangspunkte auf die Ebene gefällten Lothes und l, m, n beziehungsweise die Cosinus der Winkel, welche dieses Loth mit den Coordinatenaxen bildet, so erhält man nach einem bekannten geometrischen Satze den Abstand eines Punktes von der Ebene einfach dadurch, dass man in das erste Glied der Gleichung der Ebene statt der laufenden Coordinaten die Coordinaten des Punktes einsetzt. Werden also die Abstände der gegebenen Punkte von der Ebene mit p_1, p_2, u. s. w. und p bezeichnet, so ist

$$p_1 = lx_1 + my_1 + nz_1 - a,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

und ebenso

$$p = l\bar{x} + m\bar{y} + n\bar{z} - a.$$

Substituirt man in die letzte Formel die oben angegebenen Werthe von $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so ergiebt sich

$$p = \frac{p_1 + p_2 + \text{etc.}}{i},$$

und damit ist unser Satz bewiesen. Weiter folgt sofort

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{i}\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} + \text{etc.}\right).$$

230. **Trägheitsmittelpunkt und Schwerpunkt.** — Der **Trägheitsmittelpunkt** eines Systems gleicher materieller Punkte (mögen dieselben mit einander verbunden sein oder nicht) ist der Punkt, dessen Abstand von jeder beliebigen Ebene gleich dem Mittel der Abstände jener materiellen Punkte von der nämlichen Ebene ist (§ 229).

Eine Gruppe materieller Punkte, deren Massen ungleich sind, können wir uns stets in eine grössere Anzahl gleicher materieller Punkte aufgelöst denken, da wir uns vorstellen können, die gegebenen Massen seien in sehr kleine unter einander gleiche Theile zerlegt. Jeder der ursprünglich gegebenen Punkte wird je nach der Grösse seiner Masse natürlich mehr oder weniger dieser Theile enthalten. Sollten die Grössen der gegebenen Massen incommensurabel sein, so können wir der strengen Befriedigung der vorhergehenden Forderung jedenfalls beliebig nahe kommen, dadurch dass wir die Theile, in welche wir die Massen zerlegen, hinlänglich klein annehmen.

Dies vorausgesetzt, lässt sich die vorstehende Definition dazu benutzen, den Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Systems materieller Punkte zu definiren, mögen dieselben gleiche oder ungleiche Massen enthalten. Das Resultat kann folgendermaassen ausgesprochen werden: —

Der Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Systems irgendwelcher materiellen Punkte (gleichgiltig ob dieselben in starrer oder in sonst einer Weise, oder auch gar nicht mit einander verbunden sind) ist ein Punkt, dessen Abstand von jeder beliebigen Ebene gleich ist der durch die Summe der Massen dividirten Summe aller aus je einer Masse und ihrem Abstande von der Ebene gebildeten Producte.

Wir ersehen auch aus dem oben bewiesenen Satze, dass ein Punkt, dessen Abstände von drei auf einander senkrechten Ebenen dieser Bedingung entsprechen, derselben auch für jede andere Ebene genügen muss.

Befinden sich in den Punkten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), u. s. w. beziehungsweise die Massen w_1, w_2, u. s. w., so bestimmen sich die Coordinaten des Trägheitsmittelpunktes des Systems durch die folgenden Formeln: —

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \text{etc.}}{w_1 + w_2 + \text{etc.}} = \frac{\Sigma w x}{\Sigma w}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma w y}{\Sigma w}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma w z}{\Sigma w}.$$

Diese Formeln sind völlig allgemein und können leicht auf die besondere Form gebracht werden, die in irgend einem gegebenen Falle erfordert wird. Hätten wir nicht eine Reihe abgesonderter materieller Punkte, sondern eine durch gewisse bestimmte Raumtheile continuirlich vertheilte Materie, so würden, wenn ϱ die Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) bezeichnet, die Grundprincipien der Integralrechnung uns sofort

$$\bar{x} = \frac{\iiint \varrho\, x\, dx\, dy\, dz}{\iiint \varrho\, dx\, dy\, dz}, \text{ etc.}$$

liefern, und in diesen Formeln hätten sich die Integrationen über den ganzen von der in Rede stehenden Materie erfüllten Raum zu erstrecken, in welchem ϱ einen von Null verschiedenen Werth hat.

Der Trägheits- oder Massenmittelpunkt ist danach in jedem Körper oder in jeder Gruppe von Körpern ein völlig bestimmter Punkt. Er wird oft sehr unpassend auch Schwerpunkt genannt. Die Theorie der resultirenden Wirkung der Schwere, die in der abstracten Dynamik gegeben werden wird, zeigt, dass es nur bei einer bestimmten Art der Stoffvertheilung einen bestimmten Punkt giebt, der in aller Strenge der Schwerpunkt eines starren Körpers genannt werden kann. In gewöhnlichen Fällen terrestrischer Gravitation ist jedoch eine annähernde Lösung gültig, nach welcher im gemeinen Leben der Ausdruck Schwerpunkt als gleichbedeutend mit Trägheitsmittelpunkt gebraucht werden kann; man darf aber nie vergessen, dass die in beiden Definitionen enthaltenen Grundideen wesentlich verschieden sind.

Der zweite Satz des § 229 kann jetzt offenbar in folgender Weise ausgesprochen werden: — Die Summe der Bewegungsgrössen der Theile des Systems in irgend einer Richtung ist gleich der in derselben Richtung genommenen Bewegungsgrösse einer Masse, die gleich der Summe der gegebenen Massen ist und sich mit der Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes bewegt.

231. **Moment.** — Das Moment eines physischen Agens ist das numerische Maass der Wirksamkeit desselben. So bezeichnet das Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt oder eine Linie das Maass ihrer Wirksamkeit in Betreff der Rotation, die sie um diesen Punkt oder um diese Linie erzeugt oder aufhebt.

232. **Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt.** — Das Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt definiren wir als das Product der Kraft in ihren senkrechten Abstand von dem Punkte. Dasselbe ist numerisch doppelt so gross als die Fläche des Dreiecks, dessen Spitze der Punkt und dessen Grundlinie eine die Kraft in Grösse und Richtung darstellende gerade Linie ist. Es ist oft gut, das Moment durch eine Gerade darzustellen, die ihm numerisch gleich ist, und die senkrecht auf die Ebene des Dreiecks durch dessen Spitze gezogen wird. Die Ebene des Dreiecks theilt den Raum in zwei Theile, und es ist noch anzugeben, in welchem dieser Theile die Linie liegen soll. Um in dieser Beziehung eine Bestimmung zu treffen, denken wir uns eine Uhr so in die Dreiecksebene gelegt, dass ihr Mittelpunkt in der Spitze liegt, und dass die

Kraft eine dem Lauf der Zeiger entgegengesetzt gerichtete Drehung um diesen Punkt herum zu erzeugen strebt. Die das Moment darstellende Linie soll in dem Raumtheile angenommen werden, dem das Zifferblatt der Uhr zugewandt ist.

Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Axe. — Unter dem Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Axe versteht man das Moment der in irgend einer zur Axe senkrechten Ebene genommenen Componente der Kraft, und zwar ist das Moment dieser Componente in Beziehung auf den Punkt zu nehmen, in welchem die Ebene von der Axe geschnitten wird. Wir denken uns hier die Kraft in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine, die der Axe parallel gerichtet ist, keine Wirkung hervorbringt, insofern es sich um eine Drehung um die Axe handelt; die zweite Componente ist senkrecht zur Axe, d. h. ihre Richtung liegt in einer zur Axe senkrechten Ebene. Die letztere Componente kann die hinsichtlich der Rotation um die Axe wirksame genannt werden, und wir definiren ihr Moment in Beziehung auf die Axe als ihr Moment in Beziehung auf den ihr zunächst gelegenen Punkt der Axe, was mit der oben gegebenen Definition übereinstimmt. Wenn man die Figur, welche das Moment der Kraft in Beziehung auf einen beliebigen Punkt der Axe darstellt, auf irgend eine zur Axe senkrechte Ebene projicirt, so ist die Fläche der Projection offenbar gleich dem Moment der Kraft in Beziehung auf die Axe.

233. Excurs über die Projection von Flächen. — Unter der Projection eines ebenen oder gekrümmten Flächenstücks auf eine Ebene versteht man den Theil dieser Ebene, welcher von der Projection des Umfangs der projicirten Figur eingeschlossen wird.

Denken wir uns ein Flächenstück in eine beliebige Anzahl Theile zerlegt, so machen die für irgend eine Ebene genommenen Projectionen der Theile die Projection der ganzen Figur für dieselbe Ebene aus. Dieser Ausspruch ist aber dahin zu verstehen, dass die Projectionsflächen der Theile als positiv oder negativ angesehen werden müssen, jenachdem diejenige ihrer Seiten, die wir kurz die Aussenseite der projicirten Fläche nennen wollen, der Vorderseite der Projectionsebene ab- oder zugewandt ist.

Wenn die projicirte Fläche oder ein Theil derselben eine zur Projectionsebene senkrechte Ebene ist, so verschwindet die Projection natürlich. Zwei beliebige Schalen mit gemeinschaftlichem Rande haben für jede Ebene gleiche Projectionen. Die Projection einer geschlossenen Oberfläche (oder einer Schale mit verschwindendem Rande) ist für jede Projectionsebene gleich Null.

Gleiche Flächenstücke, die in ein und derselben oder in parallelen Ebenen liegen, haben, auf jede beliebige Ebene projicirt, gleiche Projectionen, von welcher Form sie auch sein mögen.

Die Projection einer beliebigen ebenen Figur oder einer Muschelschale, deren Rand eine ebene Figur ist, auf irgend eine Ebene ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalt dieser Figur in den Cosinus des Winkels, den letztere mit der Projectionsebene bildet. Dieser Winkel ist spitz oder stumpf, jenachdem die Aussenseite der projicirten Fläche und die Vorderseite der Projectionsebene im Ganzen nach derselben Seite hin gerichtet sind oder nicht. Linien, welche in der oben dargelegten Weise Momente in Beziehung auf einen Punkt darstellen, die in verschiedenen Ebenen liegen, können danach wie Kräfte zusammengesetzt werden. (Einen analogen Satz enthält § 96.)

234. Kräftepaare. — Zwei in entgegengesetztem Sinne wirkende parallele Kräfte von gleicher Grösse bilden ein Kräftepaar. Das Moment eines Kräftepaars ist die Summe der Momente der beiden Kräfte in Beziehung auf irgend einen Punkt ihrer Ebene und daher gleich dem Producte einer der Kräfte in den kürzesten Abstand ihrer Richtungen. Dieser Abstand wird der Arm des Kräftepaars genannt.

Unter der Axe eines Kräftepaars versteht man eine von einem beliebig gewählten Punkte zur Ebene des Paars gezogene Senkrechte von solcher Grösse und solcher Richtung, dass sie die Grösse des Moments darstellt und die Richtung anzeigt, in welcher das Paar zu drehen strebt. Um die letztere Bedingung zu erfüllen, verfährt man am besten auf folgende Weise: Man halte eine Uhr so, dass ihr Mittelpunkt in den gewählten Punkt fällt, und dass ihre Ebene der Ebene des Kräftepaars parallel ist. Jenachdem dann die Bewegung der Zeiger der Richtung, in welcher das Kräftepaar zu drehen sucht, entgegengesetzt ist oder nicht, ziehe man die Axe durch die Vorderseite oder durch die Hinterseite der Uhr. Es wird sich zeigen, dass ein Kräftepaar durch seine Axe vollständig dargestellt wird, und dass Kräftepaare durch dieselben geometrischen Constructionen zerlegt und zusammengesetzt werden, wie Kräfte und Geschwindigkeiten. Diese Constructionen sind bei Kräftepaaren mit den Axen, wie sie bei Kräften und Geschwindigkeiten mit den Linien vorzunehmen sind, welche die letzteren direct darstellen.

235. Moment einer Geschwindigkeit, einer Bewegungsgrösse und einer geradlinigen Verschiebung. Zusammensetzung von Momenten. — Wenn wir im § 232 statt „Kraft“ über-

all „Geschwindigkeit“ sagen, so erhalten wir das Moment einer Geschwindigkeit in Beziehung auf einen Punkt, und wird noch die Masse des in Bewegung befindlichen Körpers als Factor eingeführt, so gelangen wir zu einem in der Dynamik höchst wichtigen Begriff, zu dem **Moment der Bewegungsgrösse.** Die Gesetze der Zusammensetzung und Zerlegung sind von den schon dargestellten nicht verschieden. Wir wollen sie jedoch einiger einfachen Anwendungen wegen zum Gegenstand einer elementaren Untersuchung machen. Das Moment einer geradlinigen Verschiebung ist das Product ihrer Länge in den Abstand ihrer Richtung von dem Punkte.

Das Moment der resultirenden Geschwindigkeit eines materiellen Punktes in Beziehung auf einen beliebigen Punkt der Ebene der Componenten ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten, wenn das Vorzeichen jedes Moments, wie oben (§ 233) angegeben ist, bestimmt wird. Dasselbe gilt natürlich für Momente von Verschiebungen, von Kräften und von Bewegungsgrössen.

Wir betrachten zunächst zwei Bewegungscomponenten AB und AC, deren Resultante (§ 27) AD sein wird. Ihre halben Momente in Beziehung auf den Punkt O sind beziehungsweise die Flächen OAB, OCA. Nun haben die beiden Dreiecke OCA und OBD gleiche Grundlinien AC und BD. Ihre Höhen sind um die Höhe des Parallelogramms $ABDC$ (BD als Grundlinie angesehen) verschieden. Es ist folglich

$$OCA + \tfrac{1}{2}.ABDC = OBD,$$

$$OCA + OAB + \tfrac{1}{2}.ABDC = OBD + OAB,$$

d. h.

$$OCA + OAB + \tfrac{1}{2}.ABDC = OABD,$$

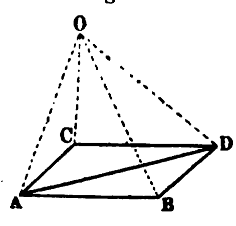
oder weil

$$\tfrac{1}{2}.ABDC = ABD,$$

$$OCA + OAB = OAD.$$

OAD ist aber gleich dem halben Moment der Resultante, und somit enthält die letzte Formel den Satz: das Moment der Resultante ist gleich der Summe der Momente der beiden Componenten.

Fig. 46.



Sind in einer Ebene beliebig viele Bewegungscomponenten gegeben, so können wir dieselben der Reihe nach zusammensetzen, indem wir mit zweien (gleichgiltig welchen) beginnen, darauf eine dritte hinzunehmen, u. s. w. Wir sehen sofort, dass die

Summe ihrer Momente gleich dem Moment ihrer Resultante ist. Daraus folgt natürlich, dass, wenn wir die Geschwindigkeit eines Punktes in beliebig viele in derselben Ebene liegende Componenten zerlegen, die Summe der Momente dieser Geschwindigkeitscomponenten in Beziehung auf jeden Punkt ihrer Ebene gleich dem Moment ihrer Resultante ist. Ferner ergiebt sich Folgendes: Ertheilt man einem in Bewegung befindlichen Punkte der Reihe nach mehrere Geschwindigkeiten von verschiedenen, aber ein und derselben Ebene angehörenden Richtungen, so dass die Geschwindigkeit des Punktes jederzeit die Resultante der ihm bis dahin ertheilten Geschwindigkeiten ist, so ist das Moment seiner Geschwindigkeit jederzeit die Summe der Momente aller dieser Geschwindigkeiten.

Zusatz. — Wenn eine der Componenten beständig durch den Punkt hindurchgeht, so verschwindet ihr Moment. Dies ist der Fall einer Bewegung, in welcher die Beschleunigung gegen einen festen Punkt gerichtet ist, und wir gelangen so wieder zu dem Satze des § 36, a, nach welchem in diesem Falle die vom Radiusvector beschriebenen Flächenräume den Zeiten proportional sind; denn das Moment der Geschwindigkeit ist, wie wir gesehen haben, doppelt so gross als die vom Radiusvector in der Zeiteinheit beschriebene Fläche.

236. Um das Moment der Geschwindigkeit eines Punktes in Beziehung auf eine Axe zu erhalten, hat man diese Geschwindigkeit auf eine zur Axe senkrechte Ebene zu projiciren und das Moment dieser Projection in Beziehung auf den Punkt zu nehmen, in welchem die Ebene von der Axe geschnitten wird.

Das Moment der während irgend einer Zeit von einem Punkte um eine Axe ausgeführten Gesammtbewegung ist doppelt so gross als die Fläche, welche während dieser Zeit der Radiusvector seiner Projection auf eine zur Axe senkrechte Ebene beschreibt.

Betrachten wir jetzt einen in Bewegung befindlichen Punkt, dessen Bewegung nicht auf eine Ebene beschränkt ist, und denken uns denselben mit irgend einem festen Punkte verbunden. Die Verbindungslinie beschreibt eine Kegelfläche und wir sehen, dass die Projection dieser Fläche auf irgend eine durch den festen Punkt gelegte Ebene die Hälfte von dem ist, was wir soeben als das Moment der Gesammtbewegung um eine durch den festen Punkt senkrecht zur Ebene gezogene Axe definirt haben. Unter allen diesen Ebenen ist eine vorhanden, für welche die Projection der Kegelfläche grösser als für jede andere ist, und für jede zur letzteren senkrechte Ebene ist die Projection der Kegelfläche gleich Null, wenn die De-

finition der positiven und negativen Projectionen gehörig beachtet wird.

Wenn eine beliebige Anzahl in Bewegung befindlicher Punkte gegeben ist, so können wir in ähnlicher Weise die Kegelfläche betrachten, welche der von einem festen Punkte nach jedem derselben gezogene Radiusvector beschreibt. Auf die Projection der so erhaltenen vielschichtigen Kegelfläche lässt sich dieselbe Darstellung anwenden. Die resultirende Axe der Gesammtbewegung um den festen Punkt, zu welcher sich die Bewegungen aller gegebenen Punkte in irgend einer endlichen Zeit zusammensetzen, ist eine durch den festen Punkt gehende Gerade, die senkrecht zur Ebene steht, für welche die Fläche der ganzen Projection grösser als für jede andere Ebene ist, und das Moment der Gesammtbewegung um die resultirende Axe ist das Doppelte der Fläche dieser Projection.

Die resultirende Axe und das Geschwindigkeitsmoment einer beliebigen Anzahl in Bewegung befindlicher Punkte in Beziehung auf irgend einen festen Punkt sind beziehungsweise die resultirende Axe der einer unendlich kleinen Zeit entsprechenden Gesammtbewegung und deren Moment, dividirt durch diese Zeit.

Bewegen sich beliebig viele Punkte während einer beliebigen Zeit, so wird das Moment der Gesammtbewegung um irgend eine Axe dadurch erhalten, dass man das Moment der Gesammtbewegung um die durch einen beliebigen Punkt der erstgenannten Axe gehende resultirende Axe mit dem Cosinus des von beiden Axen eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

Die einem beliebigen festen Punkte entsprechende resultirende Axe der Gesammtbewegung einer beliebigen Anzahl in Bewegung befindlicher Punkte, sowie das ihr zugehörende Moment der Gesammtbewegung lassen sich durch dieselben elementaren Constructionen aus den resultirenden Axen und Momenten der einzelnen Punkte oder Punktegruppen des Systems herleiten, durch welche die Richtung und Grösse einer resultirenden Verschiebung hergeleitet wird aus irgend welchen gegebenen Richtungen und Grössen von Verschiebungscomponenten.

Analoge Sätze gelten natürlich für die Momente von Geschwindigkeiten und Bewegungsgrössen.

237. Virtuelle Geschwindigkeit. Virtuelles Moment. — Wenn der Angriffspunkt einer Kraft um ein kleines Stück verschoben und die Verschiebung auf die Richtung der Kraft projicirt wird, so ist die Projection die in der Richtung der Kraft genommene Componente der Verschiebung. Man nennt diese Componente die

virtuelle Geschwindigkeit des Punktes. Die virtuelle Geschwindigkeit ist positiv oder negativ, jenachdem sie dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie die Kraft hat.

Das Product der Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes heisst das virtuelle Moment der Kraft. Wir haben diese Ausdrücke eingeführt, weil die Geschichte und die Entwicklungen der Wissenschaft ihre Kenntniss fordern; sie sind aber, wie wir später zeigen werden, nur untergeordnete Stellvertreter einer weit nützlicheren Reihe von Begriffen, die Newton klar aufgestellt hat.

238. Arbeit. — Man sagt, eine Kraft leiste eine Arbeit, wenn ihr Angriffsort eine positive Bewegungscomponente in ihrer Richtung hat, und die Arbeit einer Kraft wird gemessen durch das Product dieser Bewegungscomponente in die Grösse der Kraft.

Werden etwa Kohlen aus einer Grube emporgeschafft, so ist die Grösse der geleisteten Arbeit dem Gewicht der gehobenen Kohlen, d. i. der beim Heben überwundenen Kraft, und ausserdem der Höhe, bis zu welcher die Kohlen gehoben sind, proportional. Die zum Messen der Arbeit von den britischen Ingenieuren in der Praxis angenommene Einheit ist die Arbeit, die erfordert wird, um eine dem Gewicht eines Pfundes gleiche Kraft während eines Weges von einem Fuss zu überwinden. Diese Einheit heisst ein Fusspfund.

Bei rein wissenschaftlichen Messungen ist die Arbeitseinheit nicht das Fusspfund, sondern die durch die Raumeinheit hindurch wirkende kinetische Krafteinheit (§ 225). Diese Einheit wird z. B., wie wir weiterhin zeigen werden, beim Messen der Arbeit eines elektrischen Stromes angewandt, wie überhaupt die Einheiten für elektrische und magnetische Messungen auf der kinetischen Krafteinheit beruhen.

Wenn das Gewicht in schräger Richtung gehoben wird, z. B. längs einer geneigten glatten Ebene, so ist der Raum, durch welchen hindurch die Kraft überwunden werden muss, im Verhältniss der Länge zur Höhe der Ebene grösser, als bei verticaler Hebung; die zu überwindende Kraft ist aber jetzt nicht mehr das ganze Gewicht, sondern die parallel zur Ebene genommene Componente desselben, und letztere ist im Verhältniss der Höhe zur Länge der Ebene kleiner als das Gewicht. Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke, so ergiebt sich, wie wir erwarten durften, dass die Grösse der Arbeit sich nicht ändert, wenn man statt der senkrechten eine geneigte Bahn nimmt.

239. Allgemein ist die Arbeit, welche irgend eine Kraft während einer unendlich kleinen Verschiebung ihres Angriffspunktes leistet, nichts anderes als ihr virtuelles Moment (§ 237). Sie ist also das Product der Verschiebung in die längs der Richtung der Verschiebung genommene Componente der Kraft.

Daraus geht hervor, dass eine Kraft keine Arbeit leistet, wenn die Bewegung ihres Angriffspunktes beständig senkrecht gegen die Richtung erfolgt, in welcher die Kraft wirkt. Ein solcher Fall, in welchem eine Kraft nicht arbeitet, ist der gegenseitige normale Druck zwischen einem unbeweglichen und einem beweglichen Körper, wie die Spannung einer Schnur, an welche eine Pendellinse befestigt ist, oder die Anziehung der Sonne gegen einen Planeten, wenn letzterer einen Kreis beschreibt, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht.

240. Arbeit eines Kräftepaars. — Die von einer Kraft oder von einem Kräftepaar in Beziehung auf einen um eine Axe sich drehenden Körper ausgeübte Arbeit ist das Product aus dem Moment der Kraft oder des Paars in den Winkel (durch den entsprechenden Bogen vom Radius Eins gemessen), um welchen der angegriffene Körper sich dreht. Hierbei ist vorausgesetzt, dass das Moment für alle Lagen des Körpers dasselbe bleibe. Ist das Moment veränderlich, so gilt die obige Behauptung nur für unendlich kleine Verschiebungen; man gelangt jedoch zu einem ganz exacten Resultat durch Anwendung des genauen Durchschnittsmoments der Kraft oder des Paars. Der Beweis liegt auf der Hand.

Wenn Q das Moment der Kraft oder des Kräftepaars für eine durch den Winkel ϑ gegebene Lage des Körpers ist, so erhält man im Falle eines constanten Q für die während der Drehung von ϑ_0 bis ϑ_1 geleistete Arbeit den Ausdruck $Q(\vartheta_1 - \vartheta_0)$; für dieselbe Grösse ergiebt sich aber im Falle eines veränderlichen Q der Werth $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} Q\,d\vartheta = q(\vartheta_1 - \vartheta_0)$, worin q den genauen Mittelwerth von Q bezeichnet.

241. Verwandlung der Arbeit. Potentielle Energie. — Die Arbeit, welche eine Kraft an einem Körper leistet, offenbart sich immer durch eine entsprechende Zunahme an lebendiger Kraft oder kinetischer Energie, wenn keine anderen Kräfte auf den Körper wirken, welche Arbeit leisten können, oder gegen welche Arbeit geleistet wird. Wenn gegen irgend welche Kräfte Arbeit geleistet wird, so ist die Zunahme an kinetischer Energie um den Betrag der so gethanen Arbeit kleiner als im früheren Falle. In Folge davon erlangt aber der Körper ein Aequivalent in der Form von potentieller

Energie (§ 273), wenn er unter solchen physikalischen Bedingungen steht, dass diese Kräfte mit gleicher Stärke und in den nämlichen Richtungen wirken, wenn die Bewegung des Systems umgekehrt wird. So kann es auch kommen, dass die kinetische Energie unverändert bleibt, und dass die ganze ausgeführte Arbeit als potentielle Energie aufgesammelt wird.

Es ist z. B. Arbeit erforderlich, um ein Gewicht auf eine Höhe zu heben, eine Feder zu spannen, Luft zu comprimiren, u. s. w.; aber das gehobene Gewicht, die gespannte Feder, die comprimirte Luft, u. s. w. sind Vorräthe von Kraft, die man nach Belieben verwenden kann.

242. Newton's Bewegungsgesetze. — Im Vorhergehenden haben wir einige von Newton's Definitiones fast wörtlich, andere in einer für die neueren Methoden geeigneteren Form mitgetheilt, und einige Ausdrücke eingeführt, die erst nach dem Erscheinen der Principia erfunden wurden. Dagegen werden wir die Axiomata, sive Leges Motus, zu denen wir jetzt übergehen, in Newton's eigenen Worten wiedergeben. Die beiden Jahrhunderte, die fast verflossen sind, seit Newton sie zuerst veröffentlichte, haben nicht die Nothwendigkeit irgend eines Zusatzes oder einer Modification gezeigt. Die beiden ersten dieser Gesetze wurden von Galilei entdeckt, und das dritte war in einigen seiner vielen Formen schon vor dem Erscheinen der Principia Hooke, Huyghens, Wallis, Wren und Anderen bekannt. In neuerer Zeit herrschte das Streben, das zweite Gesetz in zwei Gesetze zu zertheilen, die man dann das zweite und dritte nannte, und das dritte vollständig zu ignoriren, obgleich man dasselbe in jedem Problem der Dynamik direct anwandte; aber alle, die so verfuhren, waren indirect gezwungen, die Vollständigkeit von Newton's System anzuerkennen, indem sie das sogenannte D'Alembert'sche Princip, welches in Wirklichkeit eben das verworfene Newton'sche dritte Gesetz in einer anderen Form ist, als Axiom einführten. Newton's eigene Erläuterung seines dritten Gesetzes weist nicht nur auf D'Alembert's Princip, sondern auch auf die neueren die Arbeit oder Energie betreffenden Principien direct hin.

243. Ein Axiom ist ein Satz, dessen Wahrheit zugegeben werden muss, sobald die Ausdrücke, in denen er gegeben ist, klar verstanden sind. Wie wir aber in unserem Capitel über „Erfahrung“ zeigen werden, haben physikalische Axiome nur für diejenigen die Natur von Axiomen, welche eine hinreichende Kenntniss der Wirkung physischer Ursachen besitzen, um im Stande zu sein,

die nothwendige Wahrheit jener Sätze auf der Stelle einzusehen. Wir geben jetzt ohne weitere Vorausbemerkungen Newton's drei Gesetze und erinnern nur an Folgendes: Die Eigenschaften der Materie hätten solche sein können, dass eine ganz andere Reihe von Gesetzen hätten als Axiome aufgestellt werden müssen. Daher hat man die Newton'schen Gesetze als auf Ueberzeugungen beruhend anzusehen, die aus Beobachtungen und Versuchen geschöpft sind; sie sind keineswegs Gegenstand intuitiver Erkenntniss.

244. LEX I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Jeder Körper verharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in geradliniger Bahn, so lange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

245. Ruhe. — Die Bedeutung des Ausdrucks Ruhe in der Physik kann nicht absolut definirt werden, insofern eine absolute Ruhe in der Natur nirgend existirt. Wenn die Gesammtheit der Materie endlich wäre, so liesse sich ihr Trägheitsmittelpunkt als absolut ruhend ansehen, oder man könnte sich vorstellen, derselbe bewege sich mit irgend einer gleichförmigen Geschwindigkeit in einer beliebigen Richtung durch den unendlichen Raum. Es ist aber bemerkenswerth, dass das erste Bewegungsgesetz uns in den Stand setzt (unten § 249), das zu erklären, was man eine directionelle Ruhe nennen kann. Auch werden wir später sehen, dass ein vollkommen glatter sphärischer Körper, welcher aus concentrischen Schalen besteht, deren jede von gleichförmigem Material und überall von derselben Dichtigkeit ist, sich, wenn man ihn in eine Drehung um eine Axe versetzt hat, trotz hinzutretender einwirkender Kräfte mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht und seine Rotationsaxe in einer absolut festen Richtung erhält. Ferner wird sich bald (§ 267) zeigen, dass die Ebene, in welcher das in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt genommene Moment der Bewegungsgrösse des (als endlich vorausgesetzten) Weltalls am grössten ist, eine im Raume feste Richtung hat; es lässt sich diese Ebene offenbar aus den in irgend einem Augenblick wirklich eintretenden Bewegungen bestimmen.

246. Wir können die Behauptung des ersten Gesetzes, sofern sie die Geschwindigkeit betrifft, logisch umkehren, und gelangen dadurch zu folgenden Aussprüchen: —

Die Zeiten, während welcher irgend ein besonderer Körper, der

durch keine Kraft angetrieben wird, die Geschwindigkeit seiner Bewegung zu ändern, gleiche Wege durchläuft, sind einander gleich. Ferner: — Jeder andere Körper im Weltall, der durch keine Kraft angetrieben wird, die Geschwindigkeit seiner Bewegung zu ändern, bewegt sich durch gleiche Wege hindurch während einer Reihe von Zeiträumen, in denen der gewählte besondere Körper gleiche Wege beschreibt.

247. Zeit. — Der erste Satz des vorigen Paragraphen drückt bloss die für die Messung der Zeit allgemein getroffene Uebereinkunft aus. Die Rotation der Erde um ihre Axe bietet uns einen Bewegungsfall dar, in welchem die Bedingung, dass keine Kraft eine Aenderung der Geschwindigkeit herbeiführen solle, mit grösserer Genauigkeit annähernd erfüllt ist, als in irgend einer anderen Bewegung, die wir leicht und genau beobachten könnten, und die numerische Messung der Zeit beruht praktisch darauf, dass man gleiche Zeiträume als die Zeiten definirt, während welcher die Erde durch gleiche Winkel rotirt. Natürlich ist dies kein Naturgesetz, sondern eine blosse Uebereinkunft und, wie wir jetzt erkennen, ein Theil von Newton's erstem Gesetze.

248. Der andere Theil des § 246 ist nicht eine Uebereinkunft, sondern eine grosse Naturwahrheit, die sich durch Hinweisung sowohl auf kleine und alltägliche Fälle, wie auch auf die grossartigsten Erscheinungen, die wir uns vorstellen können, erläutern lässt.

Ein Ball, der eine horizontale Eisfläche entlang geschleudert wird, legt (wenn man von der Verzögerung absieht, die er durch die Reibung und durch den Widerstand der Luft erleidet) in aufeinander folgenden Zeiträumen, während welcher die Erde durch gleiche Winkel rotirt, gleiche Wege zurück. Die Sonne bewegt sich, während die Erde durch gleiche Winkel rotirt, durch gleiche Theile des Weltraums hindurch; eine Abweichung würde nur insofern eintreten, als der Widerstand der zwischen den Sternen befindlichen Materie und die Attraction der übrigen Weltkörper die Geschwindigkeit der Sonne und die Geschwindigkeit der Rotation der Erde verändern sollte.

249. Feste Richtungen. — Wenn zwei materielle Punkte aus der nämlichen Lage A in demselben Augenblick mit irgend welchen Geschwindigkeiten in irgend welche Richtungen geschleudert werden, so wird, wenn jeder derselben sich fortbewegt, ohne von einer Kraft beeinflusst zu werden, ihre Verbindungslinie beständig einer festen Richtung parallel sein. Denn wenn P, Q und später P', Q' gleichzeitige Lagen der beiden Punkte sind, so sagt das erste Bewegungsgesetz aus, dass

$AP : AP' = AQ : AQ'$ ist; folglich ist PQ parallel $P'Q'$. Wenn also vier materielle Punkte O, P, Q, R in demselben Augenblick aus einer Lage geschleudert werden, so sind OP, OQ, OR fortwährend feste Richtungen. Praktisch macht man aber die Bestimmung fester Richtungen im Raum (§ 267) von der Rotation von Gruppen materieller Punkte abhängig, die Kräfte auf einander ausüben; diese Bestimmung involvirt daher das dritte Bewegungsgesetz.

250. Das ganze Gesetz steht in einem eigenthümlichen Widerspruch mit der Lehre der alten Philosophen, welche die kreisförmige Bewegung für die vollkommenste erklärten.

Die Schlussclausel „nisi quatenus" u. s. w. bildet eine gute Vorbereitung für die Einführung des zweiten Gesetzes, indem sie uns auf den Gedanken bringt, dass nur eine Kraft es ist, welche eine Aenderung der Bewegung hervorrufen kann. In welcher Weise, fragen wir naturgemäss weiter, hängt die hervorgebrachte Aenderung der Bewegung von der Grösse und Richtung der Kraft ab, die sie hervorbringt? Und die Antwort lautet: —

251. LEX II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Die Aenderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und findet in der Richtung der Geraden statt, in welcher die Kraft einwirkt.

252. Wenn eine Kraft eine Bewegung erzeugt, so wird eine doppelte Kraft die doppelte Bewegung erzeugen, u. s. w.; dabei ist es gleichgültig, ob man die Theile der Kraft gleichzeitig oder nach einander, d. h. ob man die Kraft momentan oder allmälig wirken lässt. Diese neu erzeugte Bewegung wird, wenn der Körper schon vorher in Bewegung begriffen war, zur früheren Bewegung addirt, wenn sie mit derselben direct übereinstimmt; sie wird von derselben subtrahirt, wenn sie ihr direct entgegengesetzt ist; beide werden endlich nach den schon dargelegten kinematischen Principien geometrisch zusammengesetzt, wenn die Richtung der früheren Bewegung und die Richtung der Kraft irgend einen Winkel mit einander bilden. (Dies ist eine Umschreibung von Newton's eigenem Commentar zum zweiten Gesetz.)

253. Im ersten Capitel haben wir die Aenderung der Geschwindigkeit oder die Beschleunigung als ein rein geometrisches Element betrachtet und gesehen, wie man dieselbe aus der gegebenen anfänglichen und der Endgeschwindigkeit sofort entnehmen kann. Aus der Definition der Bewegungsgrösse (§ 210) sehen wir,

dass, wenn die auf diese Weise geometrisch bestimmte Aenderung der Geschwindigkeit mit der Masse des Körpers multiplicirt wird, wir die Aenderung der Bewegung erhalten, welche in Newton's Gesetz als das Maass der die Aenderung erzeugenden Kraft angesehen wird.

Es verdient besonders beachtet zu werden, dass in diesem Ausspruch nichts über die Bewegung gesagt ist, welche der Körper thatsächlich hatte, bevor die Kraft auf ihn einwirkte: das Gesetz spricht nur von der Aenderung der Bewegung. Dieselbe Kraft wird dieselbe Aenderung der Bewegung in einem Körper erzeugen, derselbe mag in Ruhe sein, oder sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit bewegen.

254. Weiter ist zu beachten, dass durchaus nicht gesagt ist, der Körper stehe unter der Einwirkung von nur einer Kraft. Wir können deshalb einen Theil des zweiten Gesetzes logisch auf die folgende (offenbar) erweiterte Form bringen: —

Wenn irgend welche Kräfte auf einen Körper wirken, so erzeugt jede Kraft, gleichgültig ob der Körper anfänglich in Ruhe war oder sich mit beliebiger Geschwindigkeit in einer beliebigen Richtung bewegte, genau diejenige Aenderung der Bewegung im Körper, welche sie erzeugt haben würde, wenn der Körper beim Beginn ihrer Einwirkung in Ruhe gewesen wäre und sie allein auf ihn eingewirkt hätte.

255. Zusammensetzung von Kräften. — Aus dieser Auffassung des zweiten Gesetzes ergiebt sich unmittelbar eine wichtige Folgerung. Da nämlich Kräfte durch die Aenderungen der Bewegung gemessen werden, die sie erzeugen, und da ihre Richtungen sich durch die Richtungen bestimmen, in denen diese Aenderungen vor sich gehen; da ferner die Aenderungen der Bewegung eines und desselben Körpers in den Richtungen der Aenderungen der Geschwindigkeit erfolgen und diesen Aenderungen proportional sind, so wird eine einzelne Kraft, welche die Richtung der resultirenden Aenderung der Geschwindigkeit hat und dieser Aenderung proportional ist, das Aequivalent einer beliebigen Anzahl gleichzeitig wirkender Kräfte sein. Daraus folgt: —

Die Resultante einer beliebigen Anzahl (in einem Punkte angreifender) Kräfte wird durch dasselbe geometrische Verfahren ermittelt, durch welches man die Resultante einer beliebigen Anzahl gleichzeitiger Geschwindigkeiten bestimmt.

256. Hieraus ergiebt sich sofort (§ 27) die Construction des Parallelogramms der Kräfte zur Bestimmung der Resultante zweier und des Polygons der Kräfte zur Bestimmung der Resultante beliebig vieler Kräfte, deren Richtungen durch einen und denselben Punkt gehen.

Offenbar lässt sich hieraus auch unmittelbar der Fall des Gleichgewichts einer Anzahl von Kräften herleiten, die in einem Punkte angreifen. Denn wenn wir eine weitere Kraft einführen, die der Resultante der gegebenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, so wird dieselbe eine Aenderung der Bewegung erzeugen, welche der durch die gegebenen Kräfte hervorgebrachten resultirenden Bewegungsänderung gleich und entgegengesetzt ist, d. h. sie wird einen Zustand herbeiführen, in welchem der Punkt keine Aenderung seiner Bewegung erfährt, und das ist, wie wir schon gesehen haben, die einzige Art von Ruhe, von der wir je eine Kenntniss erlangen können.

257. Newton sah, dass der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, welcher das Fundamentalprincip der Statik ist, im Grunde in dem zweiten Bewegungsgesetz enthalten ist und gab einen Beweis dafür, der im Wesentlichen mit dem vorhergehenden übereinstimmt. Diese Thatsache wurde aber in späteren Behandlungen der Statik ganz allgemein ignorirt. Die Folge davon war, dass verschiedene unnöthige, mehr oder weniger einleuchtende dynamische Axiome eingeführt wurden, die thatsächlich in Newton's Bewegungsgesetzen enthalten sind oder sich darauf zurückführen lassen. Wir haben Newton's Methode beibehalten, nicht nur ihrer bewundernswerthen Einfachheit wegen, sondern auch weil sie unseres Erachtens sowohl für den statischen, wie für den kinetischen Theil der Wissenschaft der Dynamik die am meisten philosophische Grundlage enthält.

258. Messung der Kraft und Masse. — Das zweite Gesetz liefert uns auch die Mittel, eine Kraft und ferner die Masse eines Körpers zu messen.

Wenn wir nämlich die Wirkungen betrachten, welche verschiedene Kräfte während gleicher Zeiträume auf einen und denselben Körper ausüben, so sind die erzeugten Geschwindigkeitsänderungen offenbar den Kräften proportional. Daher liefern uns die Aenderungen der Geschwindigkeit in diesem Falle die Mittel, die Grössen verschiedener Kräfte zu vergleichen. So erhalten wir aus den von derselben (frei fallenden) Masse während einer Secunde an verschie-

denen Theilen der Erdoberfläche erlangten Geschwindigkeiten die Grösse der Anziehungskraft der Erde an diesen Stellen.

Wenn ferner gleiche Kräfte auf verschiedene Körper wirken, so müssen die in gleichen Zeiten hervorgebrachten Geschwindigkeitsänderungen sich umgekehrt wie die Massen dieser Körper verhalten. Das ist z. B. näherungsweise der Fall bei Eisenbahnzügen verschiedener Längen, welche durch dieselbe Locomotive in Bewegung gesetzt werden. Es ist genau realisirt im Falle der Wirkung eines elektrisirten Körpers auf eine Anzahl fester oder hohler Kugeln, die denselben äusseren Durchmesser haben und aus verschiedenen Metallen bestehen.

Wenn wir weiter einen Fall finden, in welchem verschiedene Körper, auf deren jeden eine Kraft wirkt, in derselben Zeit dieselben Aenderungen der Geschwindigkeit erfahren, so müssen die Kräfte den Massen der Körper proportional sein. So verhält es sich nach Beseitigung des Widerstandes der Luft mit frei fallenden Körpern. Wir schliessen daraus, dass das Gewicht eines Körpers an einem beliebig gegebenen Orte, oder die Kraft, mit welcher die Erde ihn anzieht, seiner Masse proportional ist, eine äusserst wichtige physikalische Wahrheit, die wir in dem Capitel über „die Eigenschaften der Materie“ noch eingehender behandeln werden.

259. Endlich geht noch aus diesem Gesetze hervor, dass es zu jedem kinematischen Satze, der in Zusammenhang mit dem Begriff Beschleunigung steht, einen entsprechenden kinetischen Satz giebt.

Nehmen wir z. B. an, X, Y, Z seien beziehungsweise die den festen Axen der Coordinaten x, y, z parallelen Componenten der ganzen auf einen Punkt von der Masse M wirkenden Kraft. Aus § 212 ersehen wir, dass

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = X,\ M\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\ M\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

oder

$$M\ddot{x} = X,\ M\ddot{y} = Y,\ M\ddot{z} = Z$$

ist. Daraus folgt leicht

$$M\ddot{s} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = X\frac{\dot{x}}{\dot{s}} + Y\frac{\dot{y}}{\dot{s}} + Z\frac{\dot{z}}{\dot{s}},$$

$$0 = X\frac{\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}}{\rho^{-1}\dot{s}^3} + Y\frac{\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}}{\rho^{-1}\dot{s}^3} + Z\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\rho^{-1}\dot{s}^3},$$

$$\frac{M\dot{s}^2}{\rho} = X\frac{\dot{s}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{s}}{\rho^{-1}\dot{s}^3} + Y\frac{\dot{s}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{s}}{\rho^{-1}\dot{s}^3} + Z\frac{\dot{s}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{s}}{\rho^{-1}\dot{s}^3}.$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen sind beziehungsweise die längs der Tangente (§ 9), die senkrecht zur osculatorischen Ebene (§ 9) und die

nach dem Krümmungsmittelpunkt der beschriebenen Bahn hin genommenen Componenten der einwirkenden Kraft.

260. Mittels der beiden ersten Gesetze sind wir zu einer Definition und einem Maass der Kraft gelangt. Wir haben auch gefunden, wie man Kräfte zusammensetzt, und wie folglich eine Kraft zerlegt wird. Wir haben endlich gesehen, wie man die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes untersucht, der gegebenen Kräften unterworfen ist. Die beiden Gesetze reichen aber nicht hin, die verwickelteren Bewegungsfälle vollständig zu verstehen, namentlich diejenigen, in welchen es sich um die gegenseitigen Wirkungen — z. B. Attraction, Druck, Uebertragung von Energie in irgend einer Form — zwischen zwei oder mehr Körpern handelt. Diese Lücke wird vollständig ausgefüllt durch das dritte Newton'sche Gesetz.

261. LEX III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Bei jeder Wirkung ist immer eine gleiche und entgegengesetzte Gegenwirkung vorhanden: oder die Wirkungen, welche irgend zwei Körper auf einander ausüben, sind immer gleich und entgegengesetzt gerichtet.

262. Wenn ein Körper einen anderen drückt oder zieht, so wird er selbst von diesem anderen mit einer gleichen Kraft in die entgegengesetzte Richtung gedrückt oder gezogen. Wenn Jemand einen Stein mit seinem Finger drückt, so übt der Stein auf den Finger einen entgegengesetzt gerichteten gleichen Druck aus. Ein Pferd, welches ein Boot durch einen Canal schleppt, wird durch eine Kraft rückwärts gezogen, die derjenigen gleich ist, mit welcher es am Schleppseil vorwärts zieht. Wie gross und von welcher Richtung auch die Aenderung der Bewegung eines Körpers sein mag, die durch einen Zusammenstoss desselben mit einem anderen erzeugt ist, dieser letztere hat seine Bewegung stets um denselben Betrag und in entgegengesetzter Richtung geändert; denn in jedem Augenblick während des Stosses war die Kraft für beide Körper gleich und entgegengesetzt. Wenn keiner der beiden Körper weder vor, noch nach dem Stosse eine Rotation ausführt, so verhalten sich die Geschwindigkeitsänderungen, die sie erfahren, umgekehrt wie ihre Massen.

Wenn ein Körper einen zweiten aus einer Entfernung anzieht, so zieht der zweite den ersteren mit einer gleichen und entgegengesetzten Kraft an. Dies Gesetz gilt nicht bloss für die Attraction

ponderabeler Massen, sondern auch, wie Newton selbst bemerkt und experimentell bestätigt hat, für magnetische Attractionen, und ebenso, wie Otto Guericke fand, für elektrische Kräfte.

263. Die vorstehenden Bemerkungen stützen sich auf Newton's eigenen Commentar zu seinem dritten Gesetz; die darin betrachteten Wirkungen und Gegenwirkungen sind einfache Kräfte. In dem zugefügten Scholium, dessen volles Verständniss der Aufmerksamkeit der Erklärer entgangen zu sein scheint, macht Newton die folgende wichtige Bemerkung, durch welche eine neue Bestimmung der diesem dritten Gesetz unterworfenen Wirkungen und Gegenwirkungen eingeführt wird: —

Si aestimetur agentis actio ex ejus vi et velocitate conjunctim; et similiter resistentis reactio aestimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus et viribus resistendi ab earum attritione, cohaesione, pondere, et acceleratione oriundis; erunt actio et reactio, in ommi instrumentorum usu, sibi invicem semper aequales.

In einer vorhergehenden Betrachtung hat Newton gezeigt, was man unter der Geschwindigkeit einer Kraft oder eines Widerstandes zu verstehen hat, nämlich die in der Richtung der Kraft genommene Componente der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, also das, was wir als die virtuelle Geschwindigkeit definirt haben. Mit Rücksicht auf diese Erklärung können wir den vorhergehenden Ausspruch in folgender Weise lesen: —

Wenn die Wirkung eines Agens durch seine Grösse und zugleich durch seine Geschwindigkeit gemessen wird, und wenn man ebenso die Gegenwirkung des Widerstandes durch die Geschwindigkeiten seiner verschiedenen Theile und zugleich durch die Grössen dieser Theile misst, so sind — die Widerstände mögen in der Reibung, in der Cohäsion, im Gewicht oder in der Beschleunigung ihren Grund haben — bei allen Combinationen von Maschinen die Wirkung und die Gegenwirkung einander gleich.

Weiter unten werden wir eine vollständige Entwicklung der Consequenzen dieser wichtigen Bemerkung geben.

264. D'Alembert's Princip. — In der eben angeführten Stelle weist Newton darauf hin, dass Widerstandskräfte gegen eine Beschleunigung als Gegenwirkungen angesehen werden müssen, die den Wirkungen, durch welche die Beschleunigung erzeugt wird, gleich und entgegengesetzt sind. Wenn wir also irgend einen materiellen Punkt eines Systems betrachten, so muss seine Gegenwirkung gegen eine Beschleunigung gleich und entgegengesetzt der Resultante der auf ihn

wirkenden Kräfte sein, seien diese Kräfte nun die Wirkungen anderer Theile des Systems auf den Punkt, oder der Einfluss von Materie, welche nicht zu dem System gehört. Mit anderen Worten, seine Gegenwirkung muss mit diesen Kräften im Gleichgewicht sein. Newton's Ansicht läuft also darauf hinaus, dass alle Kräfte des Systems in Verbindung mit den Gegenwirkungen seiner materiellen Punkte gegen eine Beschleunigung für jeden einzelnen Punkt ein System bilden, das sich im Gleichgewicht befindet. Folglich bilden, nach dem Princip der Vereinigung von Kräften, die sich das Gleichgewicht halten, die sämmtlichen an Punkten des Systems wirkenden Kräfte im Verein mit den Gegenwirkungen gegen eine Beschleunigung eine für das ganze System im Gleichgewicht befindliche Reihe von Kräften. Dies ist das berühmte Princip, welches zuerst (im Jahre 1742) D'Alembert bestimmt aussprach und mit Erfolg anwandte, und das noch jetzt nach ihm benannt wird. Wir haben aber gesehen, dass es in ganz unverkennbarer Weise in Newton's eigener Interpretation seines dritten Bewegungsgesetzes enthalten ist. Da man in den Lehrbüchern der Dynamik die allgemeinen Gleichungen oder Bedingungen des Gleichgewichts zu erforschen pflegt, bevor man näher in den kinetischen Theil des Gegenstandes eingeht, so hat sich dies Princip in praktischer Beziehung als sehr nützlich erwiesen, indem es zeigt, wie man für jedes System, für welches die Gleichungen des Gleichgewichts ermittelt sind, ohne Weiteres die Gleichungen der Bewegung niederschreiben kann.

265. Man kann sich jeden starren Körper als in unbegrenzt kleine Theile getheilt vorstellen. In welcher Form wir nun auch eventuell eine physische Erklärung des Ursprungs der Kräfte finden, die zwischen diesen Theilen wirken, jedenfalls können wir von jedem solchen kleinen Theile annehmen, dass er seine Lage in Beziehung auf die übrigen in Folge von wechselseitigen Kräften beibehält, deren Richtungen die Linien sind, die ihn mit den übrigen Theilen verbinden.

266. Mit Rücksicht hierauf ergeben sich als unmittelbare Consequenzen des zweiten und dritten Gesetzes und der vorhergehenden Sätze über den Trägheitsmittelpunkt und das Moment der Bewegungsgrösse eine Reihe wichtiger Sätze, von denen wir einige folgen lassen: —

(a.) Der Trägheitsmittelpunkt eines sich irgendwie bewegenden starren Körpers, der keinen äusseren Kräften unterworfen ist, bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie.

(b.) Wenn irgend welche Kräfte auf den Körper einwirken, so

ist die Bewegung seines Trägheitsmittelpunktes die nämliche, wie wenn diese Kräfte mit unveränderter Grösse und Richtung in diesem Punkte selbst angriffen.

(c.) Da das Moment einer auf einen materiellen Punkt wirkenden Kraft nichts anderes ist, als das Moment der Bewegungsgrösse, welche die Kraft in der Zeiteinheit erzeugt, so sind die Aenderungen des Moments der Bewegungsgrösse in irgend zwei Theilen eines starren Körpers, die in der Wechselwirkung dieser Theile ihren Ursprung haben, gleich und entgegengesetzt. Folglich erleidet das Moment der Bewegungsgrösse eines starren Körpers in Beziehung auf irgend eine Axe, die eine feste Richtung hat und durch einen Punkt geht, der entweder im Raume fest liegt oder sich gleichförmig in einer Geraden bewegt, durch die Wechselwirkungen der Theile des Körpers keine Aenderung.

(d.) Wenn äussere Kräfte auf den Körper wirken, so ist die Zunahme des Moments der Bewegungsgrösse die Summe der Momente dieser Kräfte in Beziehung auf die Axe.

267. Erhaltung der Bewegungsgrösse und des Moments der Bewegungsgrösse. — Wir nehmen für jetzt als bewiesen an, dass man sich die Wechselwirkung zwischen zwei starren Körpern in jedem Falle als aus Paaren gleicher und entgegengesetzter Kräfte bestehend vorstellen kann, die in geraden Linien wirken. Daraus geht hervor, dass für zwei starre Körper, die in irgend einer mit ihren Zuständen verträglichen Weise auf einander einwirken, die Summe der einer beliebigen festen Richtung parallel genommenen Bewegungsgrössen durch die Wechselwirkung der Körper keine Aenderung erleidet; sowie dass die Summe der Momente der Bewegungsgrösse aller materiellen Punkte beider Körper, in Beziehung auf irgend eine Linie, die eine im Raum festliegende Richtung hat und durch einen beliebigen Punkt geht, der sich gleichförmig in einer Geraden nach irgend einer Richtung zu bewegt, constant bleibt. Aus dem ersteren dieser Sätze folgern wir, dass der Trägheitsmittelpunkt einer beliebigen Anzahl auf einander wirkender Körper sich, wenn er in Bewegung begriffen ist, gleichförmig in gerader Richtung weiter bewegt, ausser insofern die Richtung oder Geschwindigkeit seiner Bewegung durch Kräfte geändert wird, welche zwischen den Körpern des Systems und irgend einer anderen nicht zum System gehörenden Masse wirken. Aus demselben Satze ergiebt sich weiter, dass der Trägheitsmittelpunkt eines beliebigen Körpers oder Systems von Körpern gerade so sich bewegt, wie ihre gesammte Materie sich bewegen würde, wenn sie in einem

Punkte concentrirt wäre und unter dem Einfluss von Kräften stände, die den auf die verschiedenen Theile in Wirklichkeit wirkenden Kräften gleich und parallel sind. Aus dem zweiten Satze schliessen wir, dass die durch den Trägheitsmittelpunkt irgend eines Systems von Körpern oder durch irgend einen anderen ruhenden oder sich gleichförmig in einer geraden Richtung bewegenden Punkt gehende Axe der resultirenden Rotation ihre Richtung unverändert beibehält, und dass die Summe der Momente der Bewegungsgrössen in Beziehung auf diese Axe constant bleibt, wofern das System keine Einwirkung von aussen erfährt. Dies Princip wird manchmal die Erhaltung der Flächen genannt, eine nicht sehr passende Bezeichnung.

268. Grösse der Arbeitsleistung. Pferdekraft. — Die Grundlage der abstracten Theorie der Energie ist von Newton wunderbar klar und kurz in seiner schon (§ 263) angeführten Anmerkung gegeben worden, in welcher er auf ihre Anwendungen auf die Mechanik hinweist*). Die actio agentis, welche, wie er sie definirt, offenbar dem Product aus der wirksamen Componente der Kraft in die Geschwindigkeit des Punktes, auf den dieselbe wirkt, äquivalent ist, ist einfach dasjenige, was man jetzt die Intensität nennt, mit der die Kraft arbeitet. Die hier zu messende Grösse ist genau dieselbe wie die, für welche Watt hundert Jahre später die praktische Einheit einer „Pferdekraft" einführte; es ist dies die Stärke, mit der ein Agens arbeitet, wenn es während einer Minute 33000mal das Gewicht eines Pfundes einen Weg von einem Fuss hindurch überwindet, d. h. wenn es 550 Fusspfund Arbeit in der Secunde leistet. Meist ist aber die in Newton's Definition enthaltene Einheit vorzuziehen, nämlich die Grösse der Arbeitsleistung, bei welcher in der Einheit der Zeit die Einheit der Energie erzeugt wird.

269. Energie in der abstracten Dynamik. — Wenn wir Newton's Worte (§ 263) in diesem Lichte betrachten, so erkennen wir, dass sie sich logisch in folgende Form umkehren lassen: —

Die Arbeit, die auf irgend ein System von Körpern (in Newton's Ausspruch die Theile einer Maschine) ausgeübt wird, hat, wenn keine Beschleunigung stattfindet, ihr Aequivalent in der Arbeit, welche gegen die Reibung, die Molekularkräfte oder die

*) Der Leser wird sich erinnern, dass wir das Wort „Mechanik" in seinem wahren klassischen Sinne gebrauchen, indem wir darunter die Wissenschaft der Maschinen verstehen; in diesem Sinne gebraucht es auch Newton selbst, wenn er eine weitere Betrachtung des Gegenstandes mit den Worten (in dem erwähnten Scholium) zurückweist: Caeterum mechanicam tractare non est hujus instituti.

Schwere geleistet wird. Ist aber eine Beschleunigung vorhanden, so wird ein Theil der Arbeit zur Ueberwindung des Widerstandes gegen die Beschleunigung verbraucht, und die neu entwickelte kinetische Energie ist der auf diese Weise verwandten Arbeit äquivalent. Dies erhellt aus § 214.

Wenn ein Theil der Arbeit gegen Molekularkräfte geleistet wird, wie beim Biegen einer Feder, oder gegen die Schwerkraft, wie beim Heben eines Gewichtes, so sind der Rückschlag der Feder und der Fall des Gewichtes fähig, die anfangs verausgabte Arbeit zu irgend einer späteren Zeit wieder zu erzeugen (§ 241). Was aber die Arbeit betrifft, die zur Ueberwindung der Reibung dient, so glaubte man zu Newton's Zeit und noch lange nachher, diese Arbeit gehe durch die Reibung absolut verloren, und diese Ansicht findet sich sogar noch in neueren Werken anerkannter Gelehrten. Wir müssen jedoch die Untersuchung dieses Punktes verschieben, bis wir das Princip der Erhaltung der Energie in seiner modernen Form betrachten werden.

270. Wenn ein in Ruhe oder in Bewegung begriffenes gegebenes System von Körpern durch keine äusseren Kräfte beeinflusst wird, so wird die Summe der kinetischen Energien aller seiner Theile in irgend einer Zeit um einen Betrag vermehrt, der gleich der ganzen während dieser Zeit von den inneren Kräften des Systems geleisteten Arbeit ist; diese Kräfte können wir uns als zwischen den Punkten des Systems wirkend vorstellen. Wenn die Linien, in denen sie wirken, ihre Längen nicht ändern, so leisten die Kräfte keine Arbeit, und die Summe der kinetischen Energien des ganzen Systems bleibt constant. Wenn andererseits eine dieser Linien während der Bewegung ihre Länge ändert, so leisten oder verbrauchen die in ihr wirkenden Kräfte Arbeit, je nachdem die Länge im Sinne dieser Kräfte oder in entgegengesetztem Sinne sich ändert.

271. **Conservatives System.** — Man nennt ein begrenztes System von Körpern dynamisch conservativ (oder einfach conservativ, wenn es unnöthig ist, hinzuzusetzen, dass von Kräften die Rede ist), wenn während jeder beliebigen Bewegung, durch welche es aus einer besonderen Configuration in eine andere übergehen kann, die zwischen seinen Theilen wechselseitig wirkenden Kräfte stets denselben Betrag von Arbeit verrichten oder verbrauchen.

272. **Grundlage der Theorie der Energie.** — Die ganze Theorie der Energie in der Physik beruht auf dem folgenden Satze: —

Wenn die zwischen den Theilen eines materiellen Systems wechselseitig wirkenden Kräfte von den Geschwindigkeiten unabhängig sind, welche diese Theile entweder in Beziehung auf einander oder in Beziehung auf irgend eine äussere Masse haben, so muss das System dynamisch conservativ sein.

Denn wenn beim Uebergange aus einer besonderen Configuration in eine andere die wechselseitigen Kräfte auf einer Reihe von Wegen an den verschiedenen Theilen des Systems mehr Arbeit verrichteten, als auf einer anderen Reihe von Wegen, so könnte man das System ohne Reibung eintreten zu lassen, auf einer Reihe von Wegen aus der ersten Configuration in die zweite überführen, es sodann auf der anderen Reihe von Wegen in die erste Configuration zurückbringen und es in dieser Weise unaufhörlich hin und her gehen lassen. Das System wäre somit eine ununterbrochene Quelle von Energie, ohne dass Materialien verbraucht würden, was unmöglich ist.

273. **Potenzielle Energie eines conservativen Systems.** — Die potenzielle Energie eines conservativen Systems in der Configuration, die es in irgend einem Augenblick besitzt, ist die Grösse der Arbeit, welche seine wechselseitigen Kräfte verrichten, während es aus einer beliebig gewählten Configuration in diejenige übergeht, die es zu der in Rede stehenden Zeit besitzt. Zwar nicht überall, aber im Allgemeinen ist es zweckmässig, die besondere Configuration, in welcher man die potenzielle Energie gleich Null rechnet, so zu wählen, dass die potenzielle Energie in jeder anderen betrachteten Configuration positiv sei.

274. Die potenzielle Energie eines conservativen Systems in irgend einem Augenblick hängt lediglich von der Configuration ab, die es in diesem Augenblick hat, da sie der Definition zufolge stets dieselbe ist, so oft das System auf diese Configuration gebracht wird. Sie ist daher, mathematisch ausgedrückt, eine Function der Coordinaten, durch welche die Lagen der verschiedenen Theile des Systems angegeben werden. Wenn wir z. B. ein conservatives System haben, das aus zwei materiellen Punkten besteht, oder auch, wenn das System durch zwei starre Körper gebildet wird, die auf einander mit einer Kraft wirken, welche nur von der relativen Lage eines Punktes des einen und eines Punktes des anderen Körpers abhängt, so hängt die potenzielle Energie des Systems von den Coordinaten eines dieser Punkte in Beziehung auf Coordinatenaxen ab, die in festen Richtungen durch den anderen Punkt hindurchgehen. Sie wird daher im Allgemeinen von drei unabhängigen Coordinaten ab-

hängen, für welche wir passend die Entfernung der beiden Punkte und zwei Winkel nehmen, welche die absolute Richtung ihrer Verbindungslinie bestimmen. So z. B. seien die Körper zwei gleichförmige Metallkugeln, die mit irgend welchen gegebenen Elektricitätsmengen elektrisirt sind und sich in einem isolirenden Medium, etwa der Luft, in einem Raume befinden, wo sie unter dem Einfluss eines grossen weit entfernten elektrisirten Körpers stehen. Die Wechselwirkung zwischen diesen beiden Kugeln wird nur von der relativen Lage ihrer Mittelpunkte abhängen. Sie wird aus zwei Theilen bestehen, nämlich aus der Gravitation, die nur von der Entfernung der Mittelpunkte abhängt, und der elektrischen Kraft, welche zunächst auch von ihrer Entfernung, ausserdem aber, der inducirenden Wirkung des entfernten Körpers wegen, von der absoluten Richtung der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte abhängt. In den Capiteln, in denen wir beziehungsweise die Gravitation und die Elektricität behandeln werden, werden wir die Theile der wechselseitigen potenziellen Energie der beiden Körper bestimmen, welche jede dieser beiden Ursachen einzeln hervorbringt. Wir werden finden, dass der erstere Theil das Product ihrer Massen, dividirt durch den Abstand ihrer Mittelpunkte, und dass der zweite Theil eine etwas verwickeltere Function des Abstandes der Mittelpunkte und des Winkels ist, welchen die Verbindungslinie der Mittelpunkte mit der Richtung der resultirenden elektrischen Kraft des entfernten elektrischen Körpers bildet.

Wenn, um ein anderes Beispiel zu geben, das System aus zwei Kugeln von weichem Eisen besteht, die sich in irgend einem Theile der Erdoberfläche befinden, so wird die Wechselwirkung zwischen beiden zum Theil die Gravitation sein, zum Theil aber in dem Magnetismus seinen Grund haben, der in ihnen durch die magnetische Kraft der Erde inducirt wird. Der von der letzteren Ursache abhängende Theil der wechselseitigen potenziellen Energie wird eine Function des Abstandes ihrer Mittelpunkte und der Neigung der Verbindungslinie der Mittelpunkte gegen die Richtung der magnetischen Kraft der Erde sein. Sein mathematischer Ausdruck wird mit demjenigen der potenziellen Energie der elektrischen Wirkung, die wir im vorhergehenden Falle betrachteten, soweit es sich um die Neigung handelt, übereinstimmen; aber das Gesetz, nach welchem er sich mit der Entfernung der Mittelpunkte ändert, wird sich weniger leicht bestimmen lassen.

275. Unvermeidlicher Verlust von Energie in allen Bewegungen, die in der Natur vor sich gehen. — In der Natur

wird die hypothetische Bedingung des § 271 in allen Bewegungsumständen augenscheinlich verletzt. Ein materielles System kann nie durch eine in sich zurücklaufende Bewegungsreihe hindurch gebracht werden, ohne dass mehr Arbeit gegen die wechselseitigen Kräfte seiner Theile verausgabt, als durch diese Kräfte gewonnen wird, da keine relative Bewegung stattfinden kann, ohne dass Reibung oder Widerstand von anderen Formen aufträte; dahin gehören: (1.) die gegenseitige Reibung zwischen zwei auf einander gleitenden festen Körpern; (2.) Widerstände, die aus der Zähigkeit der Flüssigkeiten oder der unvollkommenen Elasticität fester Körper herrühren; (3.) Widerstände, welche durch die Induction elektrischer Ströme hervorgerufen werden; (4.) Widerstände, welche die Magnetisirung zur Folge hat, die eine veränderliche ist, da das Eisen den ihm mitgetheilten Magnetismus nicht vollkommen festhält. . In der Natur kann keine Bewegung vor sich gehen, ohne einem Widerstande zu begegnen, der aus einigen dieser Einflüsse, wenn nicht aus allen, entspringt. Es ist ein Gegenstand täglicher Erfahrung, dass Reibung und unvollkommene Elasticität fester Körper die Wirkung aller künstlichen Mechanismen beeinträchtigen, und dass selbst Körper, die von anderen Körpern getrennt sich frei in der Luft bewegen können, wie fallende Körper oder wie Projectile, einen Widerstand erfahren, der in der Zähigkeit der Luft seinen Grund hat.

Die grösseren Massen, Planeten und Kometen, die sich in einem weniger widerstehenden Mittel bewegen, zeigen weniger Spuren von Widerstand *). In der That kann man nicht behaupten, dass die Beobachtung bei irgend einem dieser Körper, ausgenommen bei Encke's Komet, einen Widerstand nachgewiesen hätte: Aber die Analogien der Natur und Thatsachen, die in der Wissenschaft der Physik unumstösslich fest stehen, machen es unzweifelhaft, dass bei jedem jener Weltkörper, bei jedem Stern und überhaupt jedem Körper irgend welcher Art, der sich irgendwo im Raume bewegt, die Luft, das Gas, der Dampf, das Mittel, oder wie wir sonst die Substanz nennen mögen, welche den unmittelbar um den Körper herum befindlichen Raum erfüllt, der (relativen) Bewegung einen Widerstand leistet, gerade so wie die Luft der Bewegung einer Flintenkugel hindernd entgegentritt.

276. Wirkung der Fluthreibung. — Bei allen Körpern, deren freie Oberflächen zum Theil aus einer Flüssigkeit bestehen,

*) Newton, Principia (Bemerkungen zum ersten Bewegungsgesetz) „Majora autem Planetarum et Cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares, in spatiis minus resistentibus factos, conservant diutius."

wie es bei der Erde der Fall ist, giebt es auch indirecte Widerstände, die aus der Reibung herrühren, welche den Bewegungen der Ebbe und Fluth hindernd entgegentritt. Diese Widerstände müssen, so lange solche Körper sich in Beziehung auf benachbarte Körper bewegen, ihren relativen Bewegungen beständig Energie entziehen.

Wenn wir zunächst die Wirkung betrachten, welche der Mond allein auf die Erde mit ihren Meeren, Seen und Flüssen ausübt, so erkennen wir, dass diese Wirkung die Perioden der Rotation der Erde um ihre Axe und der Umdrehung beider Körper um ihren Trägheitsmittelpunkt gleich zu machen streben muss, da, so lange diese Perioden von einander verschieden sind, die Wirkung der Ebbe und Fluth der Erdoberfläche den Bewegungen beider beständig Energie entziehen muss. Um den Gegenstand etwas eingehender zu betrachten, und um zugleich unnöthige Verwicklungen zu vermeiden, wollen wir annehmen, der Mond sei eine gleichförmige Kugel. Die wechselseitige Wirkung und Gegenwirkung zwischen seiner Masse und derjenigen der Erde wird einer einzelnen Kraft äquivalent sein, die in irgend einer durch seinen Mittelpunkt gehenden Linie wirkt und so beschaffen ist, dass sie die Erdrotation zu hindern strebt, so lange diese in einer kürzeren Periode erfolgt, als die Bewegung des Mondes um die Erde. Sie muss daher in einer Linie wie MQ wirken, also vom Mittelpunkt der Erde um OQ abweichen; diese Abweichung hat in der Figur bedeutend vergrössert werden müssen. Man kann sich nun die auf den Mond in der Richtung MQ wirklich wirkende Kraft als aus zwei Theilen bestehend vorstellen; die Grösse des ersteren Theils, der in der nach dem Mittelpunkt der Erde zu gehenden Linie MO wirkt, weicht nicht merklich von der Grösse der ganzen Kraft ab; die Richtung MT der vergleichsweise sehr kleinen zweiten Componente ist senkrecht zu MO. Dieser letztere Theil ist für die Mondbahn ganz nahezu tangential und wirkt im Sinne der Bewegung des Mondes. Wenn eine solche Kraft plötzlich zu wirken anfinge, so würde sie zunächst die Geschwindigkeit des Mondes vergrössern; nach einer gewissen Zeit würde sich derselbe aber in Folge dieser Beschleunigung um eine solche Strecke von der Erde weiter entfernt haben, dass er, da seine Bewegung gegen die Anziehung der Erde erfolgt, so viel Geschwindigkeit verloren hätte, als durch die tangentiale Beschleunigung gewonnen war. Die Wirkung einer

Fig. 47.

ununterbrochen fortdauernden tangentialen Kraft, die im Sinne der Bewegung wirkt, aber von so kleinem Betrage ist, dass sie in jedem Augenblick nur eine kleine Abweichung von der kreisförmigen Form der Bahn zur Folge hat, besteht darin, dass sie allmälig den Abstand vom Centralkörper vergrössert und bewirkt, dass von der kinetischen Energie der Bewegung wieder so viel verloren wird, als ihre eigene gegen die Anziehung des Centralkörpers zu leistende Arbeit ausmacht. Man wird die Umstände leicht verstehen, wenn man diese Bewegung um den Centralkörper in einer sich sehr langsam erweiternden spiralförmigen Bahn betrachtet. Vorausgesetzt, dass die Kraft dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, wird die tangentiale Componente der Schwere gegen die Bewegung doppelt so gross wie die störende tangentiale Kraft sein, die im Sinne der Bewegung wirkt, und daher wird eine Hälfte der gegen die erstere geleisteten Arbeit durch die letztere und die andere Hälfte durch die der Bewegung entzogene kinetische Energie verrichtet. Die Gesammtwirkung, welche die jetzt betrachtete besondere störende Ursache auf die Bewegung des Mondes hat, erhält man sehr leicht, wenn man das Princip der Momente der Bewegungsgrössen in Anwendung bringt. So sehen wir, dass das Moment der Bewegungsgrösse, welches in irgend einer Zeit durch die Bewegungen der Trägheitsmittelpunkte des Mondes und der Erde in Beziehung auf ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt gewonnen wird, demjenigen gleich ist, welches durch die Rotation der Erde um ihre Axe verloren wird. Die Summe der Momente der Bewegungsgrösse der Trägheitsmittelpunkte des Mondes und der Erde, wie sie sich jetzt bewegen, ist ungefähr 4,45 mal so gross als das gegenwärtige Moment der Bewegungsgrösse der Erdrotation. Die mittlere Ebene der ersteren ist die Ekliptik, und daher ist die mittlere Neigung der Axen der beiden Momente gegen einander gleich 23° 27½′, welchen Winkel wir, da wir den Einfluss der Sonne auf die Ebene der Mondbewegung hier vernachlässigen, als die wirkliche gegenwärtige Neigung der beiden Axen annehmen können. Die Resultante oder das ganze Moment der Bewegungsgrösse ist daher 5,38 mal so gross als das der jetzigen Erdrotation, und ihre Axe hat gegen die Erdaxe eine Neigung von 19° 13′. Das letzte Streben der Ebben und Fluthen ist also, zu bewirken, dass die Erde und der Mond mit diesem resultirenden Moment um diese resultirende Axe gleichförmig rotiren, wie wenn sie zwei Theile eines starren Körpers wären: In diesem Zustande würde der Abstand des Mondes von der Erde (näherungsweise) in dem Verhältniss

1 : 1,46 vergrössert sein, d. i. in dem Verhältniss des Quadrats des gegenwärtigen Moments der Bewegungsgrösse der Trägheitsmittelpunkte zum Quadrat des ganzen Moments der Bewegungsgrösse; die Periode der Umdrehung würde im Verhältniss der Kuben derselben Grössen, also im Verhältniss 1 : 1,77 vergrössert sein. Der Abstand würde also auf 347 100 engl. Meilen und die Periode auf 48,36 Tage gestiegen sein. Gäbe es ausser der Erde und dem Monde keine anderen Körper im Weltall, so könnten diese beiden Körper sich in dieser Weise ewig in kreisförmigen Bahnen um ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt weiter bewegen, und während eines Umlaufs würde die Erde eine Rotation um ihre Axe vollenden, so dass sie stets dieselbe Seite dem Monde zukehrte, dass also alle flüssigen Theile ihrer Oberfläche in Beziehung auf die festen Theile in Ruhe blieben. Aber die Existenz der Sonne würde verhindern, dass ein solcher Zustand der Dinge von Dauer wäre. Es würde nämlich Sonnenfluthen geben, zweimal hohen und zweimal niedrigen Wasserstand in der Periode der Rotation der Erde in Beziehung auf die Sonne (d. h. zweimal im Sonnentage oder, was dasselbe sein würde, im Monat). Dies könnte nicht vor sich gehen, ohne dass durch die Reibung der Flüssigkeit Energie verloren würde. Es ist nicht leicht, den ganzen Verlauf der Störung in den Bewegungen der Erde und des Mondes zu skizziren, welche diese Ursache erzeugen würde; aber schliesslich würde sie zur Folge haben, dass Erde, Mond und Sonne um ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt wie Theile eines starren Körpers rotirten. Es würde uns zu weit von unserm Gegenstande entfernen, wenn wir jetzt untersuchen wollten, welche von allen diese Bedingung erfüllenden Configurationen die eine ist, die schliesslich näherungsweise erreicht werden würde. Wir hoffen jedoch später hierauf zurückzukommen und das allgemeine Problem der Bewegung einer beliebigen Anzahl starrer Körper oder materieller Punkte zu betrachten, die mit wechselseitigen irgend einem wirklichen physikalischen Gesetze unterworfenen Kräften auf einander wirken, und daher, wie wir sehen werden, jedenfalls einen Verlust an Energie erleiden werden, so lange irgend welche ihrer gegenseitigen Abstände sich ändern, d. h. so lange sie nicht in einen Zustand gerathen sind, in dem sie sich sämmtlich in Kreisen um eine durch ihren Trägheitsmittelpunkt gehende Axe bewegen. Es ist wahrscheinlich, dass der Mond, der früher in seinen äusseren Schichten, wenn nicht ganz und gar, flüssig oder zähe war, auf diese Weise dazu gebracht wurde, beständig dieselbe Seite der Erde zuzukehren.

277. Wir haben im gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft keine Data, die relative Bedeutung der Fluthreibung und des Widerstandes des Mittels zu schätzen, durch welches die Erde und der Mond sich bewegen. Welches aber auch die Grösse dieser Widerstände sein mag, es kann nur ein Endresultat für ein System geben, wie es die Sonne mit ihren Planeten ist, wenn dasselbe hinlänglich lange unter den vorhandenen Gesetzen beharrt und nicht durch ein Zusammentreffen mit anderen sich im Raum bewegenden Massen gestört wird. Dies Resultat besteht darin, dass alle Körper des Systems in eine Masse zusammenfallen werden, die zwar eine Zeit lang rotiren kann, aber zuletzt in Beziehung auf das sie umgebende Mittel zur Ruhe kommen muss.

278. Erhaltung der Energie. — Wir können die Theorie der Energie nicht vollenden, so lange wir nicht im Stande sind, die physikalischen Einflüsse zu untersuchen, welche den Verlust von Energie in jedem der oben (§ 275) erwähnten Fälle von Widerstand begleiten. Es wird sich später zeigen, dass in jedem Falle, in welchem Energie durch einen Widerstand verloren wird, Wärme erzeugt wird, und wir werden aus Joule's Untersuchungen lernen, dass die Menge der so erzeugten Wärme ein völlig bestimmtes Aequivalent für die verlorene Energie ist. Ferner werden wir sehen, dass bei keiner Wirkung in der Natur jemals eine Entwicklung von Energie stattfindet, ohne dass nachweislich anderswo ein gleicher Betrag durch irgend eine bekannte physische Ursache verschwindet. Wir werden daraus also schliessen, dass, wenn man irgend einen begrenzten Theil der materiellen Welt vollkommen isoliren könnte, so dass man ihn hinderte, einer nicht zu ihm gehörenden Masse Energie mitzutheilen, oder zu entziehen, die Summe seiner potenziellen und seiner kinetischen Energie zu allen Zeiten dieselbe sein würde: mit anderen Worten, dass jedes materielle System, welches keinen anderen Kräften, als den Wirkungen und Gegenwirkungen zwischen seinen Theilen unterworfen ist, ein dynamisch conservatives System sein muss, wie wir es in § 271 definirt haben. Aber nur, wenn ausser den wahrnehmbaren Bewegungen und den messbaren Kräften, mit denen wir durch directe Beobachtung bekannt werden, auch die das Licht, die Wärme und den Magnetismus ausmachenden unmessbar kleinen Bewegungen von Theilen, die vielleicht die letzten Moleküle der Materie sind, sowie die zwischen den Molekülen thätigen chemischen Affinitätskräfte in Rechnung gezogen werden, können wir den allgemeinen conservativen Charakter aller dynamischen Wirkung in der Natur erkennen und einsehen, dass das Prin-

cip der Constanz der Energie auch für die ganze Classe der von einem Widerstand begleiteten Naturwirkungen gilt, die es anscheinend verletzen. Vorläufig wird es uns in unserem Studium der abstracten Dynamik genügen, denjenigen Theil der Energie gesondert zu berechnen, der durch Arbeit gegen Kräfte verloren wird, deren conservativer Charakter zweifelhaft ist, oder der durch Arbeit gewonnen wird, welche solche Kräfte verrichten.

279. Wir schicken den Beweis einiger wenigen auf die Grösse der Energie bezüglichen Sätze voraus, die für unsere weiteren Entwicklungen von grosser Bedeutung sind.

280. **Kinetische Energie eines Systems.** — Die kinetische Energie jedes Systems ist gleich der kinetischen Energie einer Masse, welche gleich der Summe der Massen des Systems ist und sich mit der Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes desselben bewegt, vermehrt um die Summe der kinetischen Energien, welche den auf den Trägheitsmittelpunkt bezogenen relativen Bewegungen der einzelnen Theile des Systems entsprechen.

Es seien nämlich x, y, z die Coordinaten irgend eines Massentheilchens m des Systems, ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Theilchens in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Coordinaten des Trägheitsmittelpunktes selbst; dann haben wir für die ganze kinetische Energie

$$\frac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{d(\bar{x}+\xi)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d(\bar{y}+\eta)}{dt}\right)^2+\left(\frac{d(\bar{z}+\zeta)}{dt}\right)^2\right\}.$$

Nach den Eigenschaften des Trägheitsmittelpunktes ist aber

$$\Sigma m\frac{d\bar{x}}{dt}\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\bar{x}}{dt}\Sigma m\frac{d\xi}{dt}=0, \text{ u. s. w.,}$$

der vorhergehende Ausdruck also gleich

$$\frac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\},$$

und damit ist der Satz bewiesen.

281. **Trägheitsmoment und Gyrationsradius.** — Die kinetische Energie der Rotation eines starren Systems um irgend eine Axe wird (§ 95) durch $\frac{1}{2}\Sigma mr^2\omega^2$ ausgedrückt, wo m die Masse irgend eines Theils, r der Abstand desselben von der Axe und ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist. Dieser Ausdruck kann offenbar in der Form $\frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2$ geschrieben werden. Der Factor Σmr^2, der in kinetischen Untersuchungen von grosser Bedeutung ist, wird das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf die

in Rede stehende Axe genannt. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf irgend eine Axe wird also dadurch gefunden, dass man die Masse jedes materiellen Punktes mit dem Quadrat seines Abstandes von der Axe multiplicirt und alle so erhaltenen Producte summirt.

Es ist nützlich, zu beachten, dass das Moment der Bewegungsgrösse irgend eines starren Systems in Beziehung auf eine Axe das Product der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment ist; man hat nämlich $\Sigma mvr = \Sigma mr^2 \omega$.

Nehmen wir eine Grösse k von der Beschaffenheit, dass

$$k^2 \Sigma m = \Sigma mr^2$$

ist, so wird k der Gyrationsradius in Beziehung auf die Axe genannt, von welcher aus r gemessen wird. Der Gyrationsradius in Beziehung auf irgend eine Axe ist danach derjenige Abstand von dieser Axe, in welchen man die ganze Masse versetzen könnte, ohne dass ihr Trägheitsmoment eine Aenderung erlitte. In einem Schwungrade, bei dem es wünschenswerth ist, bei einer möglichst kleinen Masse ein möglichst grosses Trägheitsmoment zu haben, ohne dass die Dimensionen gewisse Grenzen überschritten, giebt man dem grösseren Theil der Masse die Form eines Ringes von dem grössten zulässigen Durchmesser. Der Radius dieses Ringes ist dann näherungsweise der Gyrationsradius des ganzen Rades.

Trägheitsmoment für verschiedene Axen. — Ein starres System ist auf rechtwinklige Axen bezogen, die durch irgend einen Punkt gehen. Man soll sein Trägheitsmoment in Beziehung auf irgend eine durch den Anfangspunkt gehende Axe ermitteln, die mit den Coordinatenaxen gegebene Winkel bildet.

Es seien λ, μ, ν die Richtungscosinus der Axe. Dann hat der Punkt x, y, z von ihr einen Abstand r, für den man nach § 95

$$r^2 = (\mu z - \nu y)^2 + (\nu x - \lambda z)^2 + (\lambda y - \mu x)^2$$

erhält. Es ist also

$$Mk^2 = \Sigma mr^2 = \Sigma m [\lambda^2 (y^2 + z^2) + \mu^2 (z^2 + x^2) + \nu^2 (x^2 + y^2) \\ - 2 \mu\nu yz - 2 \nu\lambda zx - 2 \lambda\mu xy],$$

und hierfür kann

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 - 2\alpha\mu\nu - 2\beta\nu\lambda - 2\gamma\lambda\mu$$

geschrieben werden, wo A, B, C die Trägheitsmomente in Beziehung auf die Coordinatenaxen sind und $\alpha = \Sigma myz$, $\beta = \Sigma mzx$, $\gamma = \Sigma mxy$ ist. Die Grösse Mk^2 ist, wie man aus ihrem Ursprunge ersieht, ihrer Natur nach positiv. Werden also durch eine geeignete lineare Transformation aus dem erhaltenen Ausdrucke die Glieder beseitigt, welche die Producte von λ, μ, ν enthalten, so wird derselbe auf die Form

$$Mk^2 = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 = Q$$

gebracht werden, wo die ihrer Natur nach positiven Grössen A, B, C offenbar die Trägheitsmomente in Beziehung auf die neuen rechtwinkligen

Coordinatenaxen und λ, μ, ν die zugehörigen Richtungscosinus der Axe sind, in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment gefunden werden soll.

Wenn A, B, C ungleich sind, so sei $A > B > C$. Dann zeigt

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 = Q(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

dass Q nicht grösser als A und nicht kleiner als C sein kann. Wenn A, B, C einander gleich sind, so ist Q gleich jeder dieser Grössen.

Sind a, b, c die Gyrationsradien für die neuen Coordinatenaxen, so hat man

$$A = Ma^2,\ B = Mb^2,\ C = Mc^2,$$

und die obige Gleichung liefert

$$k^2 = a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2.$$

Ist aber x, y, z irgend ein Punkt in der Geraden, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind, und hat dieser Punkt vom Anfangspunkt den Abstand r, so ist

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu} = r,$$

folglich

$$k^2 r^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

Betrachten wir daher das Ellipsoid, welches die Gleichung

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \varepsilon^4$$

hat, so sehen wir, dass es von der Linie, welche die Richtungscosinus λ, μ, ν hat, und in Beziehung auf welche der Gyrationsradius von der Grösse k ist, ein Stück abschneidet, dessen Länge r durch die Gleichung

$$k^2 r^2 = \varepsilon^4$$

gegeben wird, d. h. das Rechteck aus irgend einem Radiusvector dieses Ellipsoides und dem entsprechenden Gyrationsradius ist constant. Die Halbaxen des Ellipsoides sind offenbar $\frac{\varepsilon^2}{a}, \frac{\varepsilon^2}{b}, \frac{\varepsilon^2}{c}$, und können wir ε einen beliebigen Werth beilegen. Daraus erhellt folgender Satz: —

282. Für jeden starren Körper kann man um jeden beliebigen Punkt als Mittelpunkt ein Ellipsoid (Poinsot's Momentellipsoid genannt) von der Beschaffenheit construiren, dass die Länge jedes Radiusvector dem Gyrationsradius des Körpers in Beziehung auf diesen Radiusvector als Axe umgekehrt proportional ist.

Die Axen dieses Ellipsoides sind die Hauptaxen der Trägheit des Körpers in dem in Rede stehenden Punkte.

283. Der Satz des § 280 zeigt, dass das Trägheitsmoment eines starren Körpers in Beziehung auf irgend eine Axe gleich demjenigen ist, welches die ganze Masse, wenn sie im Trägheitsmittelpunkte concentrirt wäre, in Beziehung auf diese Axe haben würde, vermehrt um das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende parallele Axe.

Richtung der Hauptaxen in verschiedenen Punkten. — Es seien der Anfangspunkt O der Trägheitsmittelpunkt und die Coordinatenaxen die Hauptträgheitsaxen dieses Punktes. Dann haben wir nach §§ 280, 281 für das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ gehende Linie, deren Richtungscosinus λ, μ, ν sind,

$$\begin{aligned} Q &= A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + M(\overline{\mu\zeta - \nu\eta}^2 + \overline{\nu\xi - \lambda\zeta}^2 + \overline{\lambda\eta - \mu\xi}^2) \\ &= \{A + M(\eta^2 + \zeta^2)\}\lambda^2 + \{B + M(\zeta^2 + \xi^2)\}\mu^2 + \{C + M(\xi^2 + \eta^2)\}\nu^2 \\ &\quad - 2M(\mu\nu\eta\zeta + \nu\lambda\zeta\xi + \lambda\mu\xi\eta). \end{aligned}$$

Setzen wir für Q, A, B, C die in § 281 gegebenen Werthe ein, so folgt nach Division durch M

$$\begin{aligned} k^2 = (a^2 + \eta^2 + \zeta^2)\lambda^2 + (b^2 + \zeta^2 + \xi^2)\mu^2 + (c^2 + \xi^2 + \eta^2)\nu^2 \\ - 2(\eta\zeta\mu\nu + \zeta\xi\nu\lambda + \xi\eta\lambda\mu). \end{aligned}$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, λ, μ, ν so zu bestimmen, dass die Gerade, deren Richtungscosinus diese Grössen sind, eine Hauptaxe sei. Es sei

$$s = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta,$$

d. h. s stelle die Projection von OP auf die gesuchte Axe dar.

Die Axen des Ellipsoides

$$(a^2 + \eta^2 + \zeta^2)x^2 + \cdots - 2(\eta\zeta yz + \cdots) = H \tag{a}$$

werden mittels der Gleichungen

$$\begin{cases} (a^2 + \eta^2 + \zeta^2 - p)\lambda - \xi\eta\mu - \zeta\xi\nu = 0 \\ -\xi\eta\lambda + (b^2 + \zeta^2 + \xi^2 - p)\mu - \eta\zeta\nu = 0 \\ -\zeta\xi\lambda - \eta\zeta\mu + (c^2 + \xi^2 + \eta^2 - p)\nu = 0 \end{cases} \tag{b}$$

gefunden. Bezeichnen wir nun OP oder $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$ mit f, so können diese Gleichungen, in denen p offenbar das Quadrat des Gyrationsradius für die zu ermittelnde Axe ist, folgendermaassen geschrieben werden: —

$$(a^2 + f^2 - p)\lambda - \xi(\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu) = 0, \text{ u. s. w.},$$

oder

$$(a^2 + f^2 - p)\lambda - \xi s = 0, \text{ u. s. w.},$$

oder

$$\begin{cases} (a^2 - K)\lambda - \xi s = 0 \\ (b^2 - K)\mu - \eta s = 0 \\ (c^2 - K)\nu - \zeta s = 0, \end{cases} \tag{c}$$

wo $K = p - f^2$ ist. Daraus folgt

$$\lambda = \frac{\xi s}{a^2 - K}, \text{ u. s. w.}$$

Werden diese Gleichungen addirt, nachdem man sie beziehungsweise mit ξ, η, ζ multiplicirt hat, und wird die so erhaltene Gleichung beiderseits durch s dividirt, so erhält man

$$\frac{\xi^2}{a^2 - K} + \frac{\eta^2}{b^2 - K} + \frac{\zeta^2}{c^2 - K} = 1. \tag{d}$$

Aus (c) sehen wir, dass (λ, μ, ν) die Richtung der durch den Punkt P (ξ, η, ζ) gehenden Normale der Oberfläche ist, welche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - K} + \frac{y^2}{b^2 - K} + \frac{z^2}{c^2 - K} = 1 \tag{e}$$

dargestellt wird. Es ist dies offenbar eine mit dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{f}$$

confocale Oberfläche zweiten Grades, die wegen (d) durch den Punkt P geht, so dass die Gleichung (d) K bestimmt. Die drei Wurzeln K dieser kubischen Gleichung sind offenbar sämmtlich reell; eine von ihnen ist kleiner, als die kleinste der Grössen a^2, b^2, c^2 und positiv oder negativ, je nachdem P innerhalb oder ausserhalb des Ellipsoides (f) liegt, und wenn $a > b > c$ ist, so liegen die beiden anderen Wurzeln beziehungsweise zwischen c^2 und b^2 und zwischen b^2 und a^2. Wird zu jeder Wurzel f^2 addirt, so erhält man das Quadrat des Gyrationsradius für die entsprechende Hauptaxe. Wir erhalten also den folgenden Satz: —

284. Die Hauptaxen in irgend einem Punkte eines starren Körpers sind Normalen an die drei Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch diesen Punkt gehen und mit einem Ellipsoid confocal sind, dessen Mittelpunkt der Trägheitsmittelpunkt des Körpers ist, und dessen drei Hauptdurchmesser der Richtung nach mit den durch diesen Punkt gehenden drei Hauptaxen zusammenfallen, während ihre Längen beziehungsweise doppelt so gross sind, als die Gyrationsradien für ihre Richtungen. Dies Ellipsoid wird das Central-ellipsoid genannt.

285. Kinetische Symmetrie in Beziehung auf einen Punkt und eine Axe. — Man schreibt einem starren Körper kinetische Symmetrie in Beziehung auf seinen Trägheitsmittelpunkt zu, wenn seine Trägheitsmomente in Beziehung auf die drei durch diesen Punkt gehenden Hauptaxen einander gleich sind; es müssen dann nach § 281 die Trägheitsmomente in Beziehung auf alle durch diesen Punkt gehenden Axen gleich und alle diese Axen Hauptaxen sein. Gleichförmige Kugeln, Würfel und im Allgemeinen alle vollständigen krystallinischen festen Körper des ersten Systems (siehe das Capitel über die Eigenschaften der Materie) haben in Beziehung auf ihren Trägheitsmittelpunkt kinetische Symmetrie.

Ein starrer Körper ist in Beziehung auf eine Axe symmetrisch, wenn diese Axe eine von den durch den Trägheitsmittelpunkt gehenden Hauptaxen ist, und wenn die Trägheitsmomente in Beziehung auf die beiden anderen Hauptaxen, folglich die Trägheitsmomente in Beziehung auf alle Linien der Ebene dieser beiden Axen einander

gleich sind. Ein Sphäroid, ein Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck ist, eine Platte einer dieser Formen, ein kreisförmiger Ring, eine Kreisscheibe, ein Cylinder, endlich jeder vollständige Krystall des zweiten oder vierten Systems haben in Beziehung auf ihre Axe kinetische Symmetrie.

286. **Energie in der abstracten Dynamik.** — Von den Wirkungen und Gegenwirkungen zwischen den Theilen eines Systems, das nicht augenscheinlich zur conservativen Classe gehört, werden wir in der abstracten Dynamik nur diejenigen der Reibung zwischen festen Körpern betrachten, die auf einander gleiten. Nur in einigen wenigen Beispielen werden wir auch den allgemeinen Charakter und die letzten Ergebnisse der Wirkungen ins Auge fassen, welche aus der Zähigkeit der Flüssigkeiten, der unvollkommenen Elasticität fester Körper, der unvollkommenen Leitung der Elektricität oder der unvollkommenen Festhaltung des Magnetismus herrühren. Wir werden in der abstracten Dynamik auch Kräfte zu betrachten haben, welche auf die Theile eines begrenzten Systems beliebig von aussen her einwirken. Diese Kräfte werden wir der Kürze wegen äussere Kräfte nennen.

287. Das Gesetz der Energie kann dann in der abstracten Dynamik folgendermaassen ausgedrückt werden: —

Die in irgend einer Zeit von den äusseren Kräften auf ein begrenztes materielles System ausgeübte Gesammtarbeit ist gleich der Summe der im System erzeugten potenziellen und kinetischen Energie, vermehrt um die durch die Reibung verlorene Arbeit.

288. Von diesem Princip lässt sich behaupten, dass es die ganze abstracte Dynamik in sich fasst, da, wie wir jetzt zeigen werden, die Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung sich in jedem möglichen Falle unmittelbar daraus herleiten lassen.

289. **Gleichgewicht.** — Ein materielles System, dessen relative Bewegungen keinen Widerstand durch Reibung erfahren, ist in irgend einer besonderen Configuration im Gleichgewicht, wenn bei jeder möglichen Bewegung durch diese Configuration hindurch die von den äusseren Kräften in dem Augenblick, wo die Bewegung durch die Configuration erfolgt, geleistete Arbeit gleich dem Gewinn an potenzieller Energie ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann das System nicht im Gleichgewicht sein. Dies ist das berühmte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches Lagrange zur Grundlage seiner Mécanique Analytique machte.

290. **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** — Um es zu beweisen, bemerken wir erstens, dass sich das System aus

irgend einer besonderen Configuration unmöglich fortbewegen kann, wenn nicht die Kräfte, deren Wirkung es ausgesetzt ist, Arbeit auf dasselbe ausüben: Ist also die ausgesprochene Bedingung erfüllt, so muss das System im Gleichgewicht sein. Wir haben zweitens noch darzuthun, dass diese Bedingung nicht bloss genügend ist, sondern in ihrem ganzen Umfange erfüllt sein muss, um das Gleichgewicht zu bewahren. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst ein System betrachten, welches nur einen Grad von Bewegungsfreiheit besitzt. Welche Kräfte auch auf das ganze System wirken, wir können es immer durch eine einzige Kraft im Gleichgewicht erhalten, die auf irgend einen seiner Punkte in einer Richtung wirkt, welche der Richtung, in der er sich zu bewegen strebt, gerade entgegengesetzt ist, während gleichzeitig diese Kraft von einer solchen Grösse ist, dass sie bei jeder nach einer der beiden Seiten hin erfolgenden unendlich kleinen Bewegung so viel Arbeit erträgt oder verrichtet, als die übrigen Kräfte, sowohl die äusseren wie die inneren, zusammen verrichten oder ertragen. Nun können wir, nach dem Princip der Vereinigung von Kräften im Gleichgewicht, in irgend einem Punkte des Systems eine solche Kraft, die, wie wir eben gesehen haben, das System im Gleichgewicht erhalten würde, und ausserdem noch eine zweite ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft anbringen; dadurch wird der Zustand des Systems, was die Wirkung der Kräfte betrifft, nicht geändert. Da alle anfänglichen Kräfte durch die eine dieser beiden Kräfte aufgehoben werden, so kann man jene und die letztere nach demselben Princip fortlassen. Die ganze Reihe der gegebenen Kräfte wird folglich, sowohl für das Gleichgewicht, wie für die Bewegung, dieselbe Wirkung hervorbringen, wie die eine noch allein zurückgebliebene Kraft. Diese eine Kraft muss das System in Bewegung setzen, da sie in einer Richtung wirkt, in welcher es ihrem Angriffspunkte gestattet ist, sich zu bewegen. Wir schliessen daraus, dass die gegebenen Kräfte, denen, wie wir gezeigt haben, die eine Kraft äquivalent ist, unmöglich im Gleichgewicht sein können, wofern nicht ihre ganze Arbeit für eine unendlich kleine Bewegung Null ist, in welchem Falle sich die eine ihnen äquivalente Kraft auf Null reducirt. Wie viel Grade von Bewegungsfreiheit nun aber das ganze System besitzen mag, wir können dasselbe stets, ohne Reibung eintreten zu lassen, so einschränken, dass ihm nur ein Grad von Freiheit übrig bleibt, die Freiheit, irgend eine unter den gegebenen Bedingungen mögliche besondere Bewegung auszuführen. Wenn daher in irgend einer solchen unendlich kleinen Bewegung eine Aenderung der potentiellen Energie eintritt, die nicht durch

eine Arbeit der äusseren Kräfte aufgewogen wird, so können wir dadurch, dass wir die Freiheit des Systems auf diese eine Bewegung beschränken, den Fall herstellen, in welchem, wie eben bewiesen wurde, kein Gleichgewicht bestehen kann. Die Einführung einer die Bewegungsfreiheit beschränkenden Gebundenheit kann aber das Gleichgewicht auf keine Weise stören. Folglich kann das gegebene System unter den vorhandenen Bedingungen in irgend einer besonderen Configuration nicht im Gleichgewicht sein, wenn bei irgend einer möglichen unendlich kleinen Bewegung aus dieser Configuration heraus die auf das System wirkenden Kräfte im Ganzen mehr Arbeit verrichten als ertragen.

291. **Neutrales Gleichgewicht.** — Es mögen auf ein materielles System innere und äussere Kräfte wirken, die sich nach irgend einem bestimmten Gesetze ändern. Wenn dann das System in jeder Lage, in die man es bringen kann, von diesen Kräften im Gleichgewicht erhalten wird, so sagt man, sein Gleichgewicht sei neutral. Dies ist der Fall mit jeder auf einer horizontalen Ebene ruhenden Kugel von gleichförmigem Material. Auch ein gerader Cylinder oder ein Kegel, dessen ebene Grenzflächen zur Axe senkrecht stehen, ist auf einer horizontalen Ebene in neutralem Gleichgewicht. Praktisch befindet sich jede Masse von nicht allzu grossen Dimensionen im neutralen Gleichgewicht, wenn nur ihr Trägheitsmittelpunkt fest ist, da, wie wir sehen werden, die Schwere näherungsweise einer einzigen durch diesen Punkt gehenden Kraft äquivalent ist, wenn die grösste Dimension der Masse sehr klein ist im Vergleich zum Erdradius.

Stabiles Gleichgewicht. — Wenn das System aber, nachdem man es nach irgend einer Richtung hin unendlich wenig aus einer besonderen Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst überlassen hat, hin und her vibrirt, ohne jemals mehr als eine unendlich kleine Abweichung aus der Gleichgewichtslage in irgend welchen seiner Theile zu erfahren, so sagt man, das Gleichgewicht in dieser Lage sei stabil. Ein an einer Schnur aufgehängtes Gewicht, eine gleichförmige Kugel in der Höhlung eines Beckens, eine auf einer horizontalen Ebene liegende Kugel, welche um ihren Berührungspunkt herum aus einem schwereren Material als in den übrigen Theilen besteht, ein abgeplatteter Körper, der mit dem einen Endpunkt seines kürzesten Durchmessers auf einer horizontalen Ebene ruht, ein auf dem Wasser schwimmendes Brett, dessen Dicke klein ist im Vergleich mit seiner Länge und Breite, u. s. w. sind Fälle stabilen Gleichgewichts. Im zweiten, dritten und vierten

Falle werden hier die Rotationsbewegungen um eine verticale Axe und im fünften Falle allgemein jede horizontale Bewegung vernachlässigt, weil das Gleichgewicht in allen diesen Fällen neutral ist.

Instabiles Gleichgewicht. — Wenn das System andererseits aus einer Gleichgewichtslage auf irgend einem Wege so verschoben werden kann, dass es, sich selbst überlassen, nicht innerhalb unendlich kleiner Grenzen um die Gleichgewichtslage herum vibrirt, sondern sich von derselben immer weiter entfernt, so sagt man, das Gleichgewicht in dieser Lage sei instabil oder labil. So würden eine auf einer horizontalen Ebene ruhende Kugel, deren höchster Theil aus einem schwereren Material als die übrigen Theile bestände, ein auf einer Spitze stehender eiförmiger Körper, ein im Wasser auf der Seite schwimmendes Brett, u. s. w. Fälle instabilen Gleichgewichts sein, wenn sie sich praktisch realisiren liessen.

In vielen Fällen wechselt die Natur des Gleichgewichts mit der Richtung der Verschiebung. Wenn ein Gleichgewicht für irgend eine mögliche Verschiebung instabil ist, so ist es praktisch überhaupt instabil. Das ist z. B. bei einer auf ihrem Rande stehenden Münze der Fall. Für Verschiebungen in ihrer Ebene ist sie zwar in neutralem, für jede zu ihrer Ebene senkrechte Verschiebung aber in instabilem Gleichgewicht; praktisch ist daher ihr Gleichgewicht überhaupt instabil. Eine auf einem Sattel ruhende Kugel bietet einen Fall dar, in welchem stabiles, neutrales oder instabiles Gleichgewicht besteht, je nach der Richtung, in der man sie fortrollt; praktisch ist ihr Gleichgewicht aber instabil.

292. Bestimmung der Natur des Gleichgewichts. — Die Theorie der Energie liefert uns einen klaren und einfachen Prüfstein, durch den wir diese Arten des Gleichgewichts von einander unterscheiden und bestimmen können, ob dasselbe in einem gegebenen Falle neutral, stabil oder instabil sei. Wenn die von den äusseren und inneren Kräften bei jeder möglichen Verschiebung verrichtete Arbeit genau gleich der gegen sie aufgewendeten Arbeit ist, so ist das Gleichgewicht neutral, sonst nicht. Wenn bei jeder möglichen unendlich kleinen Verschiebung aus einer Gleichgewichtslage mehr potentielle Energie aufgehäuft als ausgegeben wird, so ist das Gleichgewicht durchaus stabil, sonst nicht. Wenn endlich in irgend einer oder in jeder unendlich kleinen Verschiebung aus einer Gleichgewichtslage mehr potentielle Energie ausgegeben als aufgehäuft wird, so ist das Gleichgewicht instabil. Daraus geht hervor, dass, wenn das System nur der Wirkung innerer Kräfte ausgesetzt ist, oder wenn

die vorhandenen äusseren Kräfte dem Gesetze folgen, dass sie beim Uebergange des Systems aus einer Configuration in eine andere stets dieselbe Quantität Arbeit aufwenden, gleichgültig auf welchem von den möglichen Wegen dieser Uebergang erfolgt, so muss die gesammte potentielle Energie für ein neutrales Gleichgewicht in allen Lagen constant und in Lagen von vollkommen stabilem Gleichgewichte ein Minimum sein; endlich muss sie, wenn das Gleichgewicht instabil sein soll, entweder ein absolutes Maximum oder für einige Verschiebungen ein Maximum, für andere ein Minimum sein.

293. Herleitung der Bewegungsgleichungen eines beliebigen Systems aus den Gleichungen des Gleichgewichts. — Wir haben gesehen, dass nach D'Alembert's Princip, wie es oben (§ 264) dargelegt wurde, die auf die verschiedenen Punkte eines materiellen Systems wirkenden Kräfte und die Gegenwirkungen dieser Punkte gegen die Beschleunigungen, welche sie in irgend einem Bewegungsfalle wirklich erfahren, einander das Gleichgewicht halten. Daher ist in jedem wirklichen Bewegungsfalle die in irgend einer unendlich kleinen Zeit in Folge der wirklichen Beschleunigungen erzeugte kinetische Energie nicht nur gleich der von den Kräften wirklich geleisteten Arbeit, sondern auch gleich der Arbeit, welche diese Kräfte in irgend einer unendlich kleinen Zeit leisten würden, wenn die Geschwindigkeiten der das System bildenden Punkte in einem beliebigen Augenblick in irgend welche mögliche unendlich kleine Geschwindigkeiten verwandelt würden und die Beschleunigungen unverändert blieben. Bringt man diesen Satz auf eine mathematische Form, so erhält man Lagrange's Anwendung des „Princips der virtuellen Geschwindigkeiten“ zur Ausdrückung der in D'Alembert's Princip gegebenen Bedingungen zwischen den wirkenden Kräften und den Widerständen der Massen gegen Beschleunigungen. Wie wir gesehen, ist darin jede mögliche Bedingung jedes Bewegungsfalles enthalten. Die „Gleichungen der Bewegung“ lassen sich daraus, wie Lagrange gezeigt hat, in jedem besonderen Falle mit Leichtigkeit herleiten.

Unbestimmte Bewegungsgleichung eines beliebigen Systems. — Es sei m die Masse irgend eines der materiellen Punkte des Systems; derselbe habe zur Zeit t in Beziehung auf rechtwinklige Axen von festen (§ 249) Richtungen, die durch einen als festliegend (§ 245) angesehenen Punkt gehen, die Coordinaten x, y, z. Ferner seien X, Y, Z die denselben Axen parallelen Componenten der ganzen auf ihn wirkenden Kraft. Es sind dann

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

die Componenten seiner Gegenwirkung gegen eine Beschleunigung, und diese müssen im Verein mit X, Y, Z den Gleichgewichtsbedingungen für das ganze System genügen. Bezeichnen also δx, δy, δz beliebige mit den Bedingungen des Systems verträgliche Variationen von x, y, z, so haben wir

$$(1)\quad \Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

wo die durch Σ angedeutete Summation sich über alle materiellen Punkte des Systems zu erstrecken hat. Man kann (1) die unbestimmte oder die Variationsgleichung der Bewegung nennen. Lagrange nahm dieselbe zur Grundlage seines ganzen Systems der Kinetik und leitete aus ihr alle gewöhnlichen Bewegungsgleichungen, sowie auch seine eigenen bemerkenswerthen Gleichungen in allgemeinen Coordinaten her (die wir alsbald geben werden). Wir können die Gleichung (1) noch in folgender Weise schreiben:

$$(2)\quad \Sigma m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

darin bezeichnet das erste Glied die Arbeit von Kräften, welche denjenigen gleich sind, die erfordert werden, um die wirklichen Beschleunigungen hervorzubringen, wenn sie durch die Wege der willkürlichen Verschiebungen hindurch wirken; das zweite Glied bezeichnet die von den wirklich vorhandenen Kräften diese gedachten Wege hindurch geleistete Arbeit.

Bewegungsgleichung eines conservativen Systems. — Wenn die in Bewegung begriffenen Körper ein conservatives System ausmachen, und wenn die potentielle Energie desselben in der durch (x, y, z, u. s. w.) ausgedrückten Configuration mit V bezeichnet wird, so haben wir natürlich (§§ 241, 273)

$$(3)\quad \delta V = -\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

und daher geht die unbestimmte Bewegungsgleichung über in

$$(4)\quad \Sigma m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = -\delta V,$$

wo δV den Ueberschuss der potentiellen Energie in der Configuration ($x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, u. s. w.) über diejenige der Configuration (x, y, z, u. s. w.) bezeichnet.

Ein sich hieraus unmittelbar ergebendes besonderes Resultat muss natürlich die gewöhnliche Gleichung der Energie sein, und zwar muss dieselbe durch die Voraussetzung erhalten werden, dass δx, δy, δz, u. s. w. die in der unendlich kleinen Zeit δt wirklich erfolgenden Aenderungen der Coordinaten seien. Nehmen wir daher $\delta x = \dot{x}\delta t$, u. s. w. und dividiren beide Glieder durch δt, so erhalten wir

$$(5)\quad \Sigma(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) = \Sigma m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}).$$

Hier besteht das erste Glied aus Newton's Actiones Agentium, vermindert um die Reactiones Resistentium, soweit diese die Reibung, die Schwere und die Molekularkräfte betreffen; das zweite Glied besteht aus dem Theile der Reactiones, welcher aus der Beschleunigung herrührt. Wie wir oben (§ 214) gesehen haben, ist das zweite Glied die für die Zeiteinheit genommene Grösse der Zunahme von $\Sigma \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Bezeichnet also v die Geschwindigkeit eines der materiellen Punkte und

W das Integral des mit dt multiplicirten ersten Gliedes, d. h. die von den arbeitenden und den widerstehenden Kräften in irgend einer Zeit geleistete Gesammtarbeit, so haben wir

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = W + E_0, \tag{6}$$

wo E_0 die anfängliche kinetische Energie ist. Dies ist die **Gleichung der Energie** in integrirter Form. In dem besonderen Falle eines conservativen Systems ist W eine Function der Coordinaten, und von der Zeit, wie von den eingeschlagenen Wegen unabhängig. Wenden wir die frühere Bezeichnung an und benutzen noch V_0, um die potentielle Energie des Systems in seiner anfänglichen Configuration zu bezeichnen, so haben wir $W = V_0 - V$, und die Integralgleichung der Energie verwandelt sich in

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = V_0 - V + E_0,$$

oder, wenn die constante Summe der potentiellen und der kinetischen Energie mit E bezeichnet wird, in

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = E - V. \tag{7}$$

Die allgemeine unbestimmte Gleichung liefert für die Bewegung eines Systems freier materieller Punkte unmittelbar

$$m_1 \ddot{x}_1 = X_1, \; m_1 \ddot{y}_1 = Y_1, \; m_1 \ddot{z}_1 = Z_1, \; m_2 \ddot{x}_2 = X_2, \text{ u. s. w.}$$

Wenn zwischen den Punkten keine Wechselwirkung stattfindet, so können die für jeden Punkt geltenden drei dieser Gleichungen natürlich einzeln behandelt werden; wenn die Punkte aber Kräfte aufeinander ausüben, so ist jede der Grössen X_1, Y_1, u. s. w. im Allgemeinen eine Function aller Coordinaten.

Einführung der Gebundenheit in die unbestimmte Gleichung. — Aus der unbestimmten Gleichung (1) leitet Lagrange mittels seiner Methode der Multiplicatoren auf folgende Weise die Gleichungen her, die erforderlich sind zur Bestimmung der Bewegung eines starren Körpers oder eines beliebigen Systems mit einander verbundener materieller Punkte oder starrer Körper: —

Das System bestehe aus i materiellen Punkten, deren Verbindungen durch n Gleichungen

$$\begin{cases} F_{\prime}(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots) = 0 \\ F_{\prime\prime}(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots) = 0 \\ \text{u. s. w.,} \end{cases} \tag{8}$$

die **kinematischen Gleichungen** des Systems, ausgedrückt sind. Wenn wir die Variationen derselben nehmen, so finden wir, dass jede mögliche unendlich kleine Verschiebung $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \cdots$ den n linearen Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{dF_{\prime}}{dx_1}\delta x_1 + \dfrac{dF_{\prime}}{dy_1}\delta y_1 + \text{u. s. w.} = 0, \\ \dfrac{dF_{\prime\prime}}{dx_1}\delta x_1 + \dfrac{dF_{\prime\prime}}{dy_1}\delta y_1 + \text{u. s. w.} = 0, \text{ u. s. w.} \end{cases} \tag{9}$$

genügen muss. Wir multipliciren die erste dieser Gleichungen (9) mit $\lambda_{\prime}$, die zweite mit $\lambda_{\prime\prime}$, u. s. w., addiren die Resultate sämmtlich zur unbestimmten Gleichung und setzen den Coefficienten jeder der Grössen $\delta x_1, \delta y_1$, u. s. w. gleich Null. Es ergiebt sich

$$(10)\quad \begin{cases} \lambda_{,}\dfrac{dF_{,}}{dx_1} + \lambda_{,,}\dfrac{dF_{,,}}{dx_1} + \cdots + X_1 - m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 0 \\ \lambda_{,}\dfrac{dF_{,}}{dy_1} + \lambda_{,,}\dfrac{dF_{,,}}{dy_1} + \cdots + Y_1 - m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Dies sind im Ganzen $3i$ Gleichungen, aus denen die n unbekannten Grössen $\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$, u. s. w. und die $3i - n$ unabhängig Veränderlichen bestimmt werden müssen, auf welche x_1, y_1, u. s. w. durch die kinematischen Gleichungen (8) reducirt werden.

Die Aufgabe, die Bewegung eines unter dem Einflusse von beliebig gegebenen Kräften stehenden und irgendwelchen unveränderlichen kinematischen Bedingungen unterworfenen Systems zu bestimmen, ist auf diese Weise auf eine Frage der reinen Analysis zurückgeführt. In dem noch allgemeineren Problem, die Bewegung zu bestimmen, wenn gewisse Theile des Systems gezwungen sind, sich in einer vorgeschriebenen Weise zu bewegen, enthalten die Bedingungsgleichungen (8) nicht nur die Coordinaten, sondern auch die Zeit t. Man erkennt aber leicht, dass die Gleichungen (10) auch dann noch gültig sind.

Gauss' Princip des kleinsten Zwanges. — Wenn irgendwelche Theile des Systems mit einander verbunden sind, so ist die Bewegung im Allgemeinen nicht dieselbe, als wenn alle Theile frei wären. Wir betrachten einen materiellen Punkt während einer unendlich kleinen Zeit der Bewegung. Das Product aus seiner Masse in das Quadrat des Abstandes der Lage, die er am Ende der in Rede stehenden Zeit wirklich einnimmt, von der Lage, die er bei gänzlicher Freiheit der Bewegung in demselben Augenblicke einnehmen würde, nennt man den Zwang, den der Punkt erfährt. Aus (1) folgt dann leicht, dass, wenn man den Zwang ausdrückt, dem jeder Punkt des Systems ausgesetzt ist, und alle diese Ausdrücke addirt, die erhaltene Summe ein Minimum sein wird. Dieser von Gauss gefundene Satz heisst das Princip des kleinsten Zwanges.

294. Stoss. — Wenn zwei relativ zu einander in Bewegung begriffene Körper zur Berührung kommen, so beginnt ein Druck zwischen ihnen zu wirken, um zu verhindern, dass Theile beider Körper vereint denselben Raum einnehmen. Diese Kraft ist anfänglich, im ersten Punkte des Zusammenstosses, Null, und nimmt allmälig für die Einheit der Fläche zu, während zugleich die Berührungsfläche allmälig grösser wird. Wenn jeder der beiden Körper, wie es in der Natur immer der Fall ist, einen gewissen Grad von Elasticität besitzt, und wenn dieselben nach dem Zusammentreffen nicht durch Cohäsion oder durch irgend ein künstliches Mittel zusammengehalten werden, so wird der gegenseitige Druck zwischen ihnen zu einem Maximum anwachsen und darauf wieder bis zu Null abnehmen, und zwar nimmt seine Grösse für die Einheit der Fläche allmälig ab, während zugleich die Berührungsfläche, auf die er wirkt, allmälig

kleiner wird. Der ganze Process würde nicht viel mehr oder weniger als eine Stunde dauern, wenn die Körper die Dimensionen der Erde hätten und hinsichtlich der Härte mit Kupfer, Stahl oder Glas übereinstimmten. Bei Kugeln, die aus einer dieser Substanzen bestehen, und deren Durchmesser nicht mehr als eine Elle betragen, wird er wahrscheinlich innerhalb eines Tausendstels einer Secunde beendigt sein.

295. Die Gesammtgrösse und die Richtung des „Stosses", welchen jeder der beiden Körper in jedem solchen Falle erfährt, werden nach der erfolgenden „Aenderung der Bewegungsgrösse" geschätzt. Die Grösse des Stosses wird durch die Grösse der hervorgebrachten Aenderung der Bewegungsgrösse, und seine Richtung durch die Richtung dieser Aenderung gemessen. Die Componente eines Stosses in einer einer beliebigen festen Geraden parallelen Richtung wird in ähnlicher Weise nach der für diese Richtung genommenen Componente der Aenderung der Bewegungsgrösse geschätzt.

296. Denken wir uns die ganze Zeitdauer eines Stosses in eine sehr grosse Anzahl gleicher Zeiträume getheilt, von denen jeder so kurz ist, dass sich die Kraft während desselben nicht merklich ändert, so ist die für irgend eine Richtung genommene Componente der Aenderung der Bewegungsgrösse während jedes Zeitraumes nach § 220 gleich dem Producte aus der Kraft in die Länge dieses Zeitraumes. Die Componente des Stosses ist daher gleich der Summe der in allen Zeiträumen wirkenden Kräfte, multiplicirt mit der Länge jedes Zeitraumes.

Wenn P die in irgend einem Augenblick τ des Zeitraums nach irgend einer Richtung genommene Componente der Kraft ist, und I die entsprechende Componente des ganzen Stosses bezeichnet, so ist

$$I = \int P\, d\tau.$$

297. Zeitintegral. — Eine unter irgendwelchen Umständen eine beliebige grosse oder kleine Zeit hindurch in constanter Richtung wirkende Kraft kann nach demselben Princip geschätzt werden. Was wir ihren ganzen Betrag während irgend einer Zeit nennen können, oder ihr „Zeitintegral", wird daher die ganze von ihr in der in Rede stehenden Zeit erzeugte Bewegungsgrösse messen, oder von derselben gemessen werden. Diese Schätzungsart ist jedoch nur selten passend oder von Nutzen, nämlich nur dann, wenn die ganze betrachtete Operation beendet ist, bevor die Lage des Körpers oder die Configuration des Körpersystems sich bis zu

einem solchen Grade geändert hat, dass irgendwelche neue Kräfte ins Spiel gebracht werden, oder dass schon vorher wirkende Kräfte so sehr geändert werden, dass dadurch ein merklicher Einfluss auf die gemessene Bewegungsgrösse ausgeübt wird. Wenn z. B. Jemand mit der Hand einige Secunden hindurch leicht auf eine an einer Schnur oder Kette aufgehängte Masse drückt, so bringt er eine Wirkung hervor, welche, wenn man den Grad der Kraft in jedem Augenblick kennt, nach elementaren Principien vollständig berechnet werden kann. Eine vollständige Bestimmung der Bewegung und die Beantwortung einer partiellen Frage, wie: „Von welcher Grösse wird die hervorgebrachte Ablenkung sein?“ kann aber auf die Kenntniss des „Zeitintegrals“ allein nicht einmal näherungsweise basirt werden. Wenn z. B. die Kraft anfangs sehr gross ist und allmälig abnimmt, so ist die Wirkung eine ganz andere, als sie sein würde, wenn die Kraft allmälig grösser würde und plötzlich zu wirken aufhörte, obgleich das Zeitintegral in beiden Fällen dasselbe ist. Wenn man dagegen demselben Körper mit der Hand, oder mit einem Hammer, oder mit sonst einer harten Masse in horizontaler Richtung einen Schlag versetzt, so ist die Wirkung der Kraft beendet, bevor die den Körper tragende Schnur eine merkliche Ablenkung aus der verticalen Richtung erfahren hat. Die Wirkung des Schlages wird dann weder durch die Schwere, noch durch sonst eine Kraft merklich geändert; daher ist die ganze Bewegungsgrösse, nachdem der Schlag beendet ist, nicht merklich von der „Grösse des Stosses“ verschieden, und das ist in diesem Falle einfach das Zeitintegral.

298. Ballistisches Pendel. — So verhält es sich mit Robin's ballistischem Pendel, einem massiven Holzblock, der um eine in beträchtlicher Höhe über ihm befindliche horizontale Axe beweglich ist und zur Messung der Geschwindigkeit einer Kanonen- oder Flintenkugel benutzt wird. Die Kugel wird in horizontaler, zur Axe senkrechter Richtung in den Block geschossen. Ihr Eindringen in denselben ist in so unmessbar kurzer Zeit beendet, und die Trägheit des Blockes ist so gross im Vergleich zur Bewegungsgrösse der Kugel, dass sich Kugel und Pendel wie eine Masse weiter bewegen, bevor das Pendel aus der verticalen Lage merklich abgelenkt worden ist. Dies ist die wesentliche Eigenthümlichkeit des Apparats. Eine hinlänglich grosse Kraft könnte ihn während eines kleinen Theils seiner Vibrationszeit weit aus der Verticalen entfernen. Damit aber eine einfache Anwendung des Zeitintegrals auf einen solchen Fall genüge, müsste sich die Richtung der Kraft

continuirlich ändern, um beständig mit derjenigen der Bewegung des Blocks zusammenzufallen.

299. Es liessen sich noch unzählige andere Fälle zur Erläuterung anführen, in denen das Zeitintegral uns die vollständige Lösung der Aufgabe liefert. Sie umfassen zunächst alle diejenigen Fälle, in denen die Richtung der Kraft beständig mit der Bewegungsrichtung des beweglichen Körpers zusammenfällt, und ferner jene besonderen Fälle, in denen die Wirkungsdauer der Kraft so kurz ist, dass die Bewegung des Körpers während dieser Zeit ihre Beziehung zur Richtung der Kraft oder der Wirkung irgendwelcher ihn vielleicht sonst noch beeinflussenden Kräfte nicht merklich ändert. So liefert uns das Zeitintegral beim verticalen Fall eines Körpers unmittelbar die Aenderung der Bewegungsgrösse, und dieselbe Regel gilt in den meisten Fällen von Kräften kurzer Dauer, wie bei einem Schlage von einem Cricket- oder Golfkolben.

300. Directer Stoss zweier Kugeln. — Der einfachste Fall, den wir betrachten können, und der gewöhnlich als Einleitung in den Gegenstand behandelt wird, ist derjenige des Zusammenstosses zweier glatten kugelförmigen Körper, deren Mittelpunkte sich vor dem Zusammentreffen in der nämlichen Geraden bewegten. Die zwischen beiden Körpern wirkende Kraft muss in jedem Augenblick die Richtung dieser Geraden haben, da in Beziehung auf dieselbe vollständige Symmetrie stattfindet; die Kraft muss ferner nach dem dritten Gesetze für beide Körper von derselben Grösse sein. Die Körper müssen also in jedem Zeittheilchen (Gesetz II) Bewegungsänderungen von gleichem Betrage und entgegengesetzten Richtungen erfahren, und in jedem Augenblick des Stosses müssen die gesammten Beträge der bis dahin erfolgten Bewegungsänderungen gleich sein. Um einen speciellen Fall zu betrachten, wollen wir voraussetzen, die beiden Körper bewegten sich vor und nach dem Stosse in einer Geraden nach derselben Richtung hin, so dass, je nach der Beschaffenheit des Falles, der Körper, welcher den anderen überholt, ihm nach Beendigung des Stosses entweder mit geringerer Geschwindigkeit folgt, oder sich mit ihm vereint weiter bewegt. Fälle, in denen der erstere Körper durch die Kraft des Zusammenstosses rückwärts getrieben wird, oder in welchem zwei sich nach entgegengesetzten Richtungen hin in derselben Geraden bewegende Körper zusammenstossen, lassen sich leicht durch die gewöhnliche algebraische Uebereinkunft hinsichtlich der positiven und negativen Zeichen von der unter der ersten Voraussetzung erhaltenen Formel abhängig machen.

In dem Falle, den wir behandeln wollen, ist die Bewegungsgrösse, welche einer der beiden Körper bis zu irgend einem Augenblick des Stosses verloren hat, gleich der vom anderen Körper während derselben Zeit gewonnenen Bewegungsgrösse. In dem Augenblick also, wo ihre Geschwindigkeiten sich ausgeglichen haben, bewegen sich beide wie eine Masse mit einer Bewegungsgrösse, welche gleich der Summe der Bewegungsgrössen ist, die sie vor dem Stosse hatten. Das heisst, wenn v die gemeinschaftliche Geschwindigkeit in diesem Augenblicke, M, M' die Massen der Körper und V, V' ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse bezeichnen, so ist

$$(M + M')v = MV + M'V',$$

oder

$$v = \frac{MV + M'V'}{M + M'}.$$

Während dieser ersten Periode des Stosses sind die beiden Körper im Ganzen in immer nähere Berührung mit einander gekommen, dadurch dass jeder eine Zusammendrückung oder eine Formänderung erfuhr, und sie sind zuletzt, wie oben bemerkt wurde, mit einem Theil ihrer Oberflächen aufeinander gepasst, der eine endliche Grösse hat. Nun giebt es in der Natur keinen völlig unelastischen Körper, und daher wird die zwischen den beiden Körpern ins Leben gerufene Wechselwirkung im Augenblick der engsten Annäherung beider fortfahren thätig zu sein und die Körper zu trennen suchen. Wenn sie nicht durch die natürliche Oberflächencohäsion oder durch Zusammenschweissung (und wir werden später in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie sehen, dass eine solche immer existirt, wie hart und gut polirt die Oberflächen auch sein mögen) oder durch künstliche Mittel (wie ein Wachsüberzug, den man in einem der zur Erläuterung gewöhnlich angestellten Experimente anwendet; oder die zwischen zwei Eisenbahnwagen angebrachte Kuppelung, durch die man nach der auf den Eisenbahnstationen gewöhnlichen Praxis die Wagen verbindet, indem man sie zusammenlaufen lässt, bis die Federn eingesprungen sind) überwunden wird, so werden die Körper durch diese Kraft wirklich getrennt und bewegen sich von einander weg. Unter der Voraussetzung, dass der Stoss nicht so heftig ist, um einen merklichen bleibenden Eindruck in einem der beiden Körper hervorzubringen, fand Newton, dass die relative Geschwindigkeit, mit der sich die Körper nach dem Stosse trennen, zur relativen Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher einander näherten, in einem für die nämlichen beiden Körper constanten Verhältnisse steht. Dies

Verhältniss ist immer kleiner als Eins, nähert sich aber der Einheit immer mehr, je härter die Körper sind. Für Kugeln von zusammengepresster Wolle erhielt Newton für dasselbe den Werth $^5/_9$, für eiserne Kugeln ungefähr denselben Werth, für gläserne Kugeln $^{15}/_{16}$. Die Ergebnisse neuerer experimentellen Untersuchungen über denselben Gegenstand, die wir später beschreiben werden, haben Newton's Gesetz bestätigt. Wir wollen jenes Verhältniss den Restitutionscoefficienten *) nennen. Wird derselbe mit e bezeichnet und sind, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung, U, U' die Geschwindigkeiten der beiden Körper nach Beendigung des Stosses (in dem der Betrachtung zu Grunde liegenden Falle ist jede dieser Grössen positiv, aber $U' > U$), so hat man in jedem Falle des Zusammenstosses zweier Kugeln

$$U' - U = e(V - V'),$$

und es ist wieder, da der eine Körper so viel an Bewegungsgrösse verloren, wie der andere gewonnen hat,

$$MU + M'U' = MV + M'V'.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$(M + M')U = MV + M'V' - eM'(V - V')$$

und ein ähnlicher Ausdruck für U'. Auch ist, wie oben,

$$(M + M')v = MV + M'V',$$

und durch Subtraction beider Formeln erhält man

$$(M + M')(v - U) = eM'(V - V') = e\{M'V - (M + M')v + MV\},$$

folglich

$$v - U = e(V - v).$$

Natürlich ist auch

$$U' - v = e(v - V').$$

Diese Resultate lassen sich folgendermaassen in Worte fassen: — Nach Beendigung des Stosses hat die relative Geschwindigkeit jedes der beiden Körper in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt beider die umgekehrte Richtung und ist im Verhältniss $e : 1$ verringert.

---

*) In Lehrbüchern aus der neuesten Zeit wird dasselbe ein „Elasticitätscoefficient" genannt, was offenbar ein Missgriff ist, der zwar durch Newton's Worte veranlasst sein kann, sich aber mit den von Newton angegebenen Thatsachen nicht verträgt und zudem mit der neueren Ausdrucksweise und Kenntniss in Betreff der Elasticität im schroffsten Widerspruch steht.

301. Nach §§ 267, 280 rührt der Verlust an kinetischer Energie nur von der Aenderung der kinetischen Energie in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt her. Dieser Verlust verhält sich daher zu diesem Theil der ganzen Energie wie $1 - e^2 : 1$.

Es ist also die anfängliche kinetische Energie

$$= \tfrac{1}{2}(M + M')v^2 + \tfrac{1}{2}M(V - v)^2 + \tfrac{1}{2}M'(v - V')^2,$$

die kinetische Energie nach Beendigung des Stosses

$$= \tfrac{1}{2}(M + M')v^2 + \tfrac{1}{2}M(v - U)^2 + \tfrac{1}{2}M'(U' - v)^2,$$

der Verlust an kinetischer Energie

$$= \tfrac{1}{2}(1 - e^2)\{M(V - v)^2 + M'(v - V')^2\}.$$

302. Vertheilung der Energie nach dem Stosse. — Wenn zwei elastische Körper, z. B. die oben vorausgesetzten Kugeln, gegen einander stossen, so wird ein Theil ihrer früheren kinetischen Energie stets in der Form von Vibrationen in ihnen zurückbleiben. Ein Theil des Verlustes an Energie (den man unpassend die Wirkung der unvollkommenen Elasticität nennt) wird in jedem wirklichen Falle nothwendig aus dieser Ursache herrühren.

Später, in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie, wird es sich als Resultat experimenteller Forschung ergeben, dass in festen elastischen Körpern, welche, wie Metalle, Glas, u. s. w. nur geringe Formänderungen ohne bleibende Aenderung ertragen, die Elasticitätskräfte innerhalb der Grenzen der Elasticität bis zu einem grossen Grade der Genauigkeit einfach den Deformationen (§ 154) proportional sind. Wenn also zwei solche Körper manchmal mit grösserer und manchmal mit geringerer wechselseitiger Geschwindigkeit zusammenstossen, während alle übrigen Umstände unverändert gelassen sind, so werden die Geschwindigkeiten aller materiellen Punkte jedes Körpers zu entsprechenden Zeiten der Stösse immer in demselben Verhältniss stehen. Folglich steht die Geschwindigkeit, mit der sich die Trägheitsmittelpunkte nach dem Stosse trennen, zu der Geschwindigkeit, mit der sie sich vorher einander näherten, in einem constanten Verhältniss, was mit Newton's Gesetz übereinstimmt. Es ist daher wahrscheinlich, dass, wenn nicht die ganze, so doch ein sehr beträchtlicher Theil der von Newton experimentell bestimmten Energie, welche in den sichtbaren Bewegungen zweier elastischen Körper nach dem Stosse verloren ist, den Vibrationen zugeschrieben werden muss. Aber wenn nicht noch eine andere Ursache in hohem Grade thätig war, so ist es schwer einzusehen, warum der Verlust bei eisernen Kugeln so bedeutend grösser als bei gläsernen ist.

303. In gewissen ganz bestimmten äussersten Fällen, die man sich zwar vorstellen, aber nicht realisiren kann, wird keine Energie in Vibrationen verausgabt, sondern, nachdem sich die beiden Körper getrennt haben, wird sich ein jeder einfach als ein starrer Körper bewegen und in dieser einfachen Bewegung die ganze Energie der Arbeit besitzen, welche die Elasticitätskräfte während des Zusammenstosses auf ihn ausgeübt haben. So z. B. seien die Körper cylindrische oder prismatische Stäbe mit ebenen Endflächen und von congruenten Querschnitten; auch mögen sie aus derselben Substanz bestehen, und diese Substanz habe in der Richtung der Länge des Stabes die Eigenschaft der Zusammendrückbarkeit bei vollkommener Elasticität, während sie eine Aenderung in jeder anderen Richtung durch ihren Widerstand absolut unmöglich macht. Vor dem Stosse seien die Körper mit ihren Längen in eine Gerade und ihre Querschnitte (wenn sie nicht gerade kreisförmig sind) ähnlich gelegt. In dieser Linie werden dann beide Körper, oder auch nur einer derselben, in Bewegung gesetzt. Wenn die Längen beider Stäbe einander gleich sind, so werden sie sich nach dem Stosse mit derselben relativen Geschwindigkeit trennen, mit der sie zusammenkamen, und keiner von beiden wird nach ihrer Trennung noch eine vibrirende Bewegung behalten. Das Resultat, soweit es die Bewegungen der beiden Körper nach dem Zusammenstoss betrifft, wird nicht merklich verschieden sein, aus welcher der gewöhnlich gebrauchten elastisch-festen Substanzen der Körper auch bestehen möge, wenn nur der grösste Querdurchmesser eines jeden im Vergleich zur Länge sehr klein ist.

304. Wenn die beiden Stäbe ungleiche Längen haben, so wird sich der kürzere nach dem Stosse in genau demselben Zustande befinden, als wäre er auf einen anderen Körper von seiner eigenen Länge gestossen; er wird sich daher nach dem Stosse als ein starrer Körper bewegen. Der andere dagegen wird ausser einer Bewegung seines Trägheitsmittelpunktes, die sich aus dem Princip berechnen lässt, dass seine ganze Bewegungsgrösse sich um einen Betrag ändern muss (§ 267), der genau gleich der vom ersteren Körper gewonnenen oder verlorenen Bewegungsgrösse ist, auch noch eine vibrirende Bewegung haben, deren ganze kinetische und potenzielle Energie dem alsbald zu berechnenden Ausfall an Energie in den Bewegungen der Trägheitsmittelpunkte gleichkommt. Der Einfachheit wegen wollen wir voraussetzen, der längere Körper befinde sich vor dem Zusammenstoss in Ruhe. Dann wird der kürzere Körper, nachdem er mit ihm zusammengestossen, in Ruhe zurück-

bleiben; dies ist offenbar das Resultat, das man im Falle $e = 1$ aus den vorhergehenden Formeln (§ 300) erhält, wenn man sie auf den Zusammenstoss eines Körpers mit einem vorher in Ruhe befindlichen Körper von gleicher Masse anwendet. Der längere Körper wird sich mit derselben Bewegungsgrösse fortbewegen, die der andere vor dem Stosse hatte; die Geschwindigkeit seines Trägheitsmittelpunktes und die kinetische Energie dieser Bewegung werden daher im Verhältniss der kleineren Masse zur grösseren Masse kleiner sein, als die Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes und die kinetische Energie des anderen Körpers waren. Er wird auch eine sehr ansehnliche vibrirende Bewegung haben, welche, wenn seine Länge mehr als das Doppelte der Länge des anderen Körpers ist, aus einer Welle besteht, die durch seine Länge hin und her läuft und zur Folge hat, dass die Bewegung seiner Endpunkte und thatsächlich auch aller übrigen Punkte ruckweise, nicht continuirlich erfolgt. Die vollständige Untersuchung dieser Umstände ist zwar sehr einfach; wir müssen sie aber verschieben, bis wir uns mit den Wellen und der Kinetik fester elastischer Körper speciell beschäftigen werden. Für jetzt genügt es zu bemerken, dass die Bewegungen der Trägheitsmittelpunkte beider Körper nach dem Stosse, von welcher Beschaffenheit sie auch vorher gewesen sein mögen, durch die vorhergehenden Formeln gegeben werden, wenn man darin für e den Werth $\frac{M'}{M}$ setzt, wo M' und M beziehungsweise die kleinere und die grössere Masse bezeichnen.

305. Die mathematische Theorie der Vibrationen fester elastischer Kugeln ist noch nicht ausgearbeitet worden, und ihre Anwendung auf den Fall der durch einen Stoss erzeugten Vibrationen bietet beträchtliche Schwierigkeiten dar. Die angestellten Experimente machen es aber gewiss, dass nach dem Zusammenstoss zweier gleichen Kugeln von Glas oder Elfenbein nur ein kleiner Theil der ganzen kinetischen Energie der früheren Bewegungen in Form von Vibrationen zurückbleiben kann. Dies beweist z. B. die tägliche Erfahrung, dass eine derselben nahezu bewegungslos liegen bleibt, nachdem sie auf die vorher ruhende andere Kugel gestossen ist; denn da die Geschwindigkeit ihres gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunktes durch den Stoss nothwendig keine Aenderung erleidet, so muss die zweite Kugel eine Geschwindigkeit annehmen, welche annähernd gleich derjenigen ist, die die erstere Kugel vor ihrem Zusammentreffen mit der zweiten besass. Wir müssen aber erwarten, dass, wenn aus derselben Substanz bestehende ungleiche Kugeln zu-

sammenstossen, ein verhältnissmässig sehr beträchtlicher Theil der kinetischen Energie ihrer vorherigen Bewegungen sich in Folge des Stosses in Vibrationen umsetzen wird. Dasselbe wird der Regel nach der Fall sein, wenn gleiche oder ungleiche Massen, die aus verschiedenen Substanzen bestehen, auf einander stossen, obschon diese Wirkung für ein besonderes Verhältniss ihrer Durchmesser, das von ihren Dichtigkeiten und elastischen Eigenschaften abhängt, ein Minimum und möglicherweise nicht viel grösser sein wird, als sie ist, wenn die Substanzen beider Kugeln die nämlichen und die Durchmesser gleich sind.

306. Wir brauchen wohl kaum zu bemerken, dass in vielen Fällen ein sehr grosser Theil der kinetischen Energie des Stosses zur Erzeugung von Vibrationen verwandt wird. Das ist z. B. der Fall, wenn die Zunge einer Glocke auf die Glocke, oder wenn der Hammer einer Wanduhr auf die Glocke (in den amerikanischen Uhren auf eine Spiralfeder) schlägt, wenn Pianofortehämmer gegen die Saiten stossen, wenn eine Trommel mit einem passenden Werkzeug geschlagen wird, u. s. w.

307. Moment eines Stosses in Beziehung auf eine Axe. — Das Moment eines Stosses in Beziehung auf eine beliebige Axe wird aus der Richtungslinie und der Grösse des Stosses in derselben Weise hergeleitet, wie man das Moment einer Geschwindigkeit oder einer Kraft aus der Richtungslinie und Grösse der Geschwindigkeit oder der Kraft bestimmt, §§ 235, 236. Wenn ein Körper gestossen wird, so ist die Aenderung des Moments seiner Bewegungsgrösse in Beziehung auf irgend eine Axe gleich dem Moment des Stosses in Beziehung auf diese Axe. Aber, ohne das Maass des Stosses zu betrachten, sehen wir (§ 267), dass, wie in jedem Falle einer Wechselwirkung, so auch hier das Moment in Beziehung auf irgend eine Axe von derjenigen Bewegungsgrösse, welche ein Körper beim Zusammentreffen mit einem zweiten verloren hat, gleich dem Moment der von diesem zweiten Körper gewonnenen Bewegungsgrösse ist.

Wir wollen diese Betrachtung auf das ballistische Pendel (§ 298) anwenden: — Die Bewegungslinie der Kugel beim Anprall kann eine ganz beliebige sein; wirksam ist aber nur die in einer zur Axe senkrechten Ebene genommene Componente. Wir setzen daher der Einfachheit wegen voraus, die Bewegung finde in einer zur Axe senkrechten Richtung statt, die jedoch nicht horizontal zu sein braucht. Es sei m die Masse der Kugel, v ihre Geschwindigkeit und p der Abstand ihrer Bewegungslinie von der Axe. Ferner sei M die Masse des Pendels und der eingedrungenen Kugel und k der Gyrationsradius dieser Masse. Ist

dann ω die Winkelgeschwindigkeit des Pendels zur Zeit, wo der Stoss beendet ist, so hat man

$$m v p = M k^2 \omega,$$

woraus sich die Lösung der Frage leicht entnehmen lässt.

Denn die kinetische Energie hat sich (§ 241) nach dem Stosse in ihr Aequivalent, potentielle Energie, verwandelt, wenn das Pendel die Lage seiner grössten Abweichung erreicht. Diese sei durch den Winkel ϑ gegeben; dann ist der Trägheitsmittelpunkt zur Höhe $h(1 - \cos\vartheta)$ erhoben, wenn h sein Abstand von der Axe ist. Es ist also

$$M g h (1 - \cos\vartheta) = \tfrac{1}{2} M k^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} \frac{m^2 v^2 p^2}{M k^2},$$

oder

$$2 \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{m v p}{M k \sqrt{g h}},$$

ein Ausdruck für die Sehne des Ausschlagswinkels. In der Praxis wird die Sehne des Winkels ϑ vermittels eines leichten Bandes oder einer Schnur gemessen, die man an einen Punkt des Pendels befestigt und mit geringer Reibung durch eine Klemme gleiten lässt, welche der Ruhelage dieses Punktes möglichst nahe angebracht ist.

308. Die von einem Stosse geleistete Arbeit. — Die von einem Stosse geleistete Arbeit ist im Allgemeinen das Product des Stosses in die halbe Summe der nach der Richtung des Stosses genommenen Componenten der anfänglichen und der Endgeschwindigkeit des Angriffspunktes. In dem Falle eines directen Stosses, wie wir ihn in § 300 behandelten, ist die anfängliche kinetische Energie des Körpers $\tfrac{1}{2} M V^2$, die kinetische Energie nach Beendigung des Stosses $\tfrac{1}{2} M U^2$, folglich der durch den Stoss erzielte Gewinn

$$\tfrac{1}{2} M (U^2 - V^2),$$

oder, was dasselbe ist,

$$M (U - V) \,.\, \tfrac{1}{2} (U + V).$$

Es ist aber (§ 295) $M(U - V)$ gleich der Grösse des Stosses, der Satz für diesen speciellen Fall also bewiesen. Man ersieht leicht, dass dieser Satz auf die allgemeinsten Fälle ausgedehnt werden kann.

Es bezeichne ι die Grösse des bis zur Zeit τ, und I die Grösse des bis zur Beendigung des Stosses, die zur Zeit T erfolgt, gegebenen Impulses, d. h. es sei

$$\iota = \int_0^\tau P\, d\tau, \; I = \int_0^T P\, d\tau, \text{ und } P = \frac{d\iota}{d\tau}.$$

Welches nun auch die Bedingungen sind, denen der gestossene Körper unterworfen ist, die Aenderung der Geschwindigkeit in dem gestossenen Punkte ist in jedem Augenblick der Grösse des bis dahin gegebenen Impulses proportional, so dass wir, wenn $\mathfrak{M}$ eine von den Massen und den die Freiheit der Bewegung beschränkenden Bedingungen abhängige Constante ist, und wenn U, v, V beziehungsweise die in der Richtung des Stosses genommenen Componenten der anfänglichen, der zur Zeit τ stattfindenden und der Endgeschwindigkeit des gestossenen Punktes bezeichnen,

$$v = U + \frac{\iota}{\mathfrak{M}}, \quad V = U + \frac{I}{\mathfrak{M}}$$

haben. Man erhält also für die Grösse der Arbeit, welche die Kraft P während der Zeiteinheit in dem Augenblick τ leisten würde,

$$Pv = PU + \frac{\iota P}{\mathfrak{M}},$$

und für die von P verrichtete Gesammtarbeit, die wir mit W bezeichnen wollen,

$$W = \int_0^T \left(PU + \frac{\iota P}{\mathfrak{M}}\right) d\tau$$

$$= UI + \frac{1}{\mathfrak{M}} \int_0^I \iota \, d\iota = UI + \tfrac{1}{2} \frac{I^2}{\mathfrak{M}}$$

$$= UI + \tfrac{1}{2} I(V - U) = I \,.\, \tfrac{1}{2}(U + V).$$

309. Es verdient bemerkt zu werden, dass, wenn man einen Körper mehreren Stössen unterwirft, die Gesammtwirkung nicht davon abhängt, ob man die Stösse nach einander oder gleichzeitig erfolgen lässt (vorausgesetzt dass die ganze Zeit, welche die Stösse ausfüllen, unendlich kurz ist), wenngleich die von jedem einzelnen Stosse geleistete Arbeit im Allgemeinen von der Reihenfolge abhängig ist, in der man die Stösse ausführt. Die Gesammtarbeit ist die Summe der Producte, die man erhält, wenn man jeden Stoss mit der halben Summe der nach der Richtung desselben genommenen Componenten der anfänglichen und der Endgeschwindigkeit des gestossenen Punktes multiplicirt.

310. Gleichungen der impulsiven Bewegung. — Die Wirkung irgendwelcher gegebenen Impulse, die ein starrer Körper oder ein System irgendwie mit einander verbundener materieller Punkte oder starrer Körper erhält, lässt sich sehr leicht mit Hülfe des D'Alembert'schen Princips ermitteln, nach welchem die gegebenen Impulse und die gegen die Erzeugung einer Bewegung ins Leben gerufenen Gegenwirkungen, deren Beträge durch die erzeugten Bewegungsgrössen gemessen werden, im Gleichgewicht stehen, so dass man mit ihnen mathematisch operiren und die Gleichungen des Gleichgewichts eines Systems auf sie anwenden kann.

Es seien P_1, Q_1, R_1 die Componenten des dem ersten materiellen Punkte m_1 gegebenen Impulses und $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ die Componenten der von diesem Punkte augenblicklich angenommenen Geschwindigkeit. Dann müssen Kräftecomponenten, die gleich $(P_1 - m_1 \dot{x}_1)$, $(Q_1 - m_1 \dot{y}_1)$, ... sind, das System ins Gleichgewicht bringen, und wir erhalten daher (§ 290)

$$\text{(a)} \qquad \Sigma\{(P - m\dot{x})\delta x + (Q - m\dot{y})\delta y + (R - m\dot{z})\delta z\} = 0,$$

wo $\delta x_1, \delta y_1, \ldots$ die Componenten irgend einer unter den Bedingungen des Systems möglichen unendlich kleinen Verschiebung der materiellen Punkte bezeichnen. Da aber unendlich kleine mögliche Verschiebungen einfach den in denselben Richtungen möglichen Geschwindigkeiten proportional sind, so können wir statt (a) auch die folgende, auf dasselbe hinauslaufende Gleichung nehmen: —

$$\text{(b)} \qquad \Sigma\{(P - m\dot{x})u + (Q - m\dot{y})v + (R - m\dot{z})w\} = 0,$$

in welcher u_1, v_1, w_1 irgendwelche mögliche Geschwindigkeitscomponenten des ersten materiellen Punktes bezeichnen, u. s. w.

Einen besonderen Fall dieser Gleichung erhält man natürlich, wenn man $u_1, v_1, \ldots$ gleich den wirklich erlangten Geschwindigkeiten $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \ldots$ voraussetzt. Wird dann jedes Glied der Gleichung halbirt, u. s. w., so folgt

$$\text{(c)} \qquad \Sigma(P \cdot \tfrac{1}{2}\dot{x} + Q \cdot \tfrac{1}{2}\dot{y} + R \cdot \tfrac{1}{2}\dot{z}) = T,$$

wo T die Energie der erzeugten Bewegung bezeichnet. Dies stimmt mit § 308 überein.

311. Euler entdeckte, dass, wenn ein ruhender starrer Körper einen Impuls erhält, die demselben ertheilte kinetische Energie eine Maximum- oder Minimum-Bedingung erfüllt. Lagrange*) dehnte diesen Satz auf ein System von Körpern aus, die durch beliebige unveränderliche kinematische Beziehungen verbunden sind und irgendwelche Impulse erhalten. Delaunay fand, dass sie wirklich immer ein Maximum ist, **wenn die Impulse gegeben sind, und wenn verschiedene unter den Bedingungen des Systems mögliche und das Gesetz der Energie** [§ 308, oder § 310 (c.)] **erfüllende Bewegungen betrachtet werden.** Weiter zeigte Bertrand, dass die wirklich erhaltene Energie nicht bloss ein Maximum ist, sondern die Energie jeder anderen diesen Bedingungen genügenden Bewegung übertrifft, und dass die Grösse des Ueberschusses gleich der Energie der Bewegung ist, welche mit einer von beiden Bewegungen verbunden werden muss, um die andere zu erzeugen.

Es seien $\dot{x}_1', \dot{y}_1', \ldots$ die Geschwindigkeitscomponenten irgend einer der Gleichung (c) genügenden Bewegung; diese Gleichung geht dann über in

$$\text{(d)} \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma(P\dot{x}' + Q\dot{y}' + R\dot{z}') = T' = \tfrac{1}{2}\Sigma m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2).$$

*) Mécanique Analytique, 2de partie, 3me section, § 37.

Wird nun $\dot{x}_1 - \dot{x}_1' = u_1$, $\dot{y}_1 - \dot{y}_1' = v_1$, u. s. w. angenommen, so haben wir

$$(e) \qquad T - T' = \tfrac{1}{2}\Sigma m\{(2\dot{x} - u)u + \cdots\}$$
$$= \Sigma m(\dot{x}u + \dot{y}v + \dot{z}w) - \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2).$$

Nach (b) ist aber

$$\Sigma m(\dot{x}u + \dot{y}v + \dot{z}w) = \Sigma(Pu + Qv + Rw),$$

und nach (c) und (d)

$$\Sigma(Pu + Qv + Rw) = 2T - 2T';$$

folglich liefert (e)

$$(f) \qquad T - T' = \tfrac{1}{2}\Sigma m(u^2 + v^2 + w^2),$$

und das ist Bertrand's Resultat.

312. Wenn ein Gefäss von irgend einer Gestalt, das mit einer in Ruhe befindlichen unzusammendrückbaren Flüssigkeit ganz gefüllt ist, plötzlich in Bewegung gesetzt wird oder plötzlich in irgend einer Weise eine Formänderung erfährt, wobei nur die Bedingung erfüllt sein muss, dass sein Volumen unverändert bleibe, so ist die Energie der dadurch in der Flüssigkeitsmasse erzeugten Bewegung kleiner, als die Energie jeder anderen Bewegung, die sie bei derselben Bewegung ihrer Umgrenzungsflächen haben kann. Die Betrachtung dieses Satzes, der, so viel uns bekannt ist, zum ersten Male im Cambridge and Dublin Mathematical Journal [Febr. 1849] veröffentlicht wurde, hat uns zu der unten bewiesenen allgemeinen Minimum-Eigenschaft der Bewegung geführt, die in irgend einem Systeme dadurch erzeugt wird, dass irgendwelchen seiner Theile plötzlich beliebig gegebene Geschwindigkeiten ertheilt werden.

313. Impulsive Bewegung, bezogen auf allgemeine Coordinaten. — Die oben (§ 204) erläuterte Methode der allgemeinen Coordinaten ist in ihrer Anwendung auf die Dynamik eines Systems vom grössten Nutzen, sowohl wenn es sich darum handelt, irgend einen besonderen Fall, in welchem es eine beliebige endliche Anzahl von Freiheitsgraden giebt, auszudrücken und mit allen seinen Details auszuarbeiten, als auch um allgemeine Principien zu beweisen, die sogar auf Fälle anwendbar sind, in denen unendlich viele Grade von Freiheit vorhanden sein können, wie in der im vorigen Paragraphen besprochenen Flüssigkeitsmasse. Diese Methode führt uns dazu, die Sätze über das Maass der Trägheit und die Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften, Impulsen und Bewegungsgrössen zu verallgemeinern nach dynamischen Principien, welche den in § 204 dargelegten kinematischen Principien entsprechen, die uns die allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten lieferten. Ausserdem

werden wir später sehen, dass die allgemeinen Gleichungen der continuirlichen Bewegung nicht nur für die Lösung von Aufgaben sehr zweckmässig, sondern auch äusserst lehrreich sind in Rücksicht auf die Natur der Beziehungen zwischen den Bewegungen der verschiedenen Theile eines Systems, seien diese Beziehungen auch noch so verwickelt. Vorläufig werden wir nur die allgemeinen Ausdrücke für die durch einen Impuls erzeugte Bewegung betrachten. Wir haben oben (§ 308) gesehen, dass bei Anwendung eines gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatensystems die kinetische Energie, welche ein in Ruhe befindliches gegebenes System in Folge beliebiger ihm ertheilter Impulse erhält, gleich der halben Summe aller Producte ist, die entstehen, wenn man die Componente jeder Kraft mit der entsprechenden Componente der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes multiplicirt. Genau derselbe Ausspruch bleibt für das allgemeine Coordinatensystem gültig und genügt, wenn er nach der getroffenen Uebereinkunft gefasst wird, zur Definition der allgemeinen Componenten des Impulses, während diejenigen der Geschwindigkeit nach kinematischen Principien (§ 204) festgestellt sind. Die allgemeinen Componenten der Bewegungsgrösse irgend einer bestimmt angegebenen Bewegung sind natürlich gleich den allgemeinen Componenten des Impulses, durch welchen diese Bewegung vom Zustande der Ruhe aus hätte erzeugt werden können.

(a.) Zu irgend einer Zeit seien $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ die allgemeinen Coordinaten eines materiellen Systems, und $\dot\psi, \dot\varphi, \dot\vartheta, \ldots$ die entsprechenden allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten desselben, d. h. $\dot\psi\, dt$, $\dot\varphi\, dt$, $\dot\vartheta\, dt$ u. s. w. seien die Grössen, um welche ψ, φ, ϑ u. s. w. während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt bei ihrer wirklichen Bewegung zunehmen. Bezeichnen x_1, y_1, z_1 die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten eines materiellen Punktes des Systems und $\dot x_1, \dot y_1, \dot z_1$ die Geschwindigkeitscomponenten dieses Punktes, so haben wir

$$(1)\qquad \begin{cases} \dot x_1 = \dfrac{dx_1}{d\psi}\dot\psi + \dfrac{dx_1}{d\varphi}\dot\varphi + \text{u. s. w.} \\ \dot y_1 = \dfrac{dy_1}{d\psi}\dot\psi + \dfrac{dy_1}{d\varphi}\dot\varphi + \text{u. s. w.} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die kinetische Energie, ausgedrückt durch die rechtwinkligen Coordinaten, ist $\Sigma \tfrac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$. Sie wird daher, wenn wir sie durch die allgemeinen Coordinaten ausdrücken, eine homogene Function zweiten Grades von $\dot\psi$, $\dot\varphi$, u. s. w., so dass, wenn wir sie mit T bezeichnen,

$$(2)\qquad T = \tfrac{1}{2}\{(\psi,\psi)\dot\psi^2 + (\varphi,\varphi)\dot\varphi^2 + \cdots + 2(\psi,\varphi)\dot\psi\dot\varphi + \cdots\}$$

ist, wo (ψ,ψ), (φ,φ), (ψ,φ), u. s. w. verschiedene Functionen der Coordinaten bezeichnen, die nach den Bedingungen des Systems zu bestimmen

sind. Die einzige Bedingung, welche diese Coefficienten im Wesentlichen erfüllen, ist die, dass sie für alle Werthe der Veränderlichen ein endliches positives T liefern müssen.

(b.) Weiter mögen (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), u. s. w. Kräftecomponenten bezeichnen, welche beziehungsweise auf die materiellen Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), u. s. w. wirken, und es seien $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$, u. s. w. die Componenten einer beliebigen unendlich kleinen Bewegung, die stattfinden kann, ohne dass die Bedingungen des Systems verletzt werden. Die Arbeit, welche jene Kräfte auf das in dieser Weise verschobene System aufgewendet haben, ist

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \tag{3}$$

Diese Grösse drücken wir mittels der Formeln

$$\begin{cases} \delta x_1 = \dfrac{d x_1}{d\psi}\,\delta\psi + \dfrac{d x_1}{d\varphi}\,\delta\varphi + \text{u. s. w.} \\ \delta y_1 = \dfrac{d y_1}{d\psi}\,\delta\psi + \dfrac{d y_1}{d\varphi}\,\delta\varphi + \text{u. s. w.} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases} \tag{4}$$

durch die allgemeinen Coordinaten aus und erhalten

$$\Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi + \text{u. s. w.}, \tag{5}$$

wo

$$\begin{cases} \Psi = \Sigma\left(X\dfrac{dx}{d\psi} + Y\dfrac{dy}{d\psi} + Z\dfrac{dz}{d\psi}\right) \\ \Phi = \Sigma\left(X\dfrac{dx}{d\varphi} + Y\dfrac{dy}{d\varphi} + Z\dfrac{dz}{d\varphi}\right) \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases} \tag{6}$$

ist. Die Grössen Ψ, Φ, u. s. w. sind offenbar die allgemeinen Componenten der auf das System wirkenden Kraft.

Es seien $\underset{\cdot}{\Psi}$, $\underset{\cdot}{\Phi}$, u. s. w. die nach demselben Princip verallgemeinerten Impulscomponenten, d. h. es sei

$$\underset{\cdot}{\Psi} = \int_0^\tau \Psi\,dt, \quad \underset{\cdot}{\Phi} = \int_0^\tau \Phi\,dt, \text{ u. s. w.},$$

wo $\Psi, \Phi, \ldots$ die allgemeinen Componenten der continuirlichen Kraft bezeichnen, die in irgend einem Augenblick des unendlich kleinen Zeitraumes τ wirkt, innerhalb welches der Stoss beendet wird.

Wenn dieser Impuls einem Systeme ertheilt wird, das sich schon zuvor in der oben angegebenen Weise in Bewegung befand, und wenn $\delta\dot\psi$, $\delta\dot\varphi, \ldots$ die sich ergebenden Zunahmen der Geschwindigkeitscomponenten bezeichnen, so sind die Mittel der Werthe, welche die Geschwindigkeitscomponenten vor und nach dem Stosse haben,

$$\dot\psi + \tfrac{1}{2}\delta\dot\psi, \quad \dot\varphi + \tfrac{1}{2}\delta\dot\varphi, \ldots,$$

und nach dem oben dargelegten allgemeinen Princip zur Berechnung der durch einen Impuls geleisteten Arbeit ist die in diesem Falle verrichtete Gesammtarbeit

$$\underset{\cdot}{\Psi}(\dot\psi + \tfrac{1}{2}\delta\dot\psi) + \underset{\cdot}{\Phi}(\dot\varphi + \tfrac{1}{2}\delta\dot\varphi) + \text{u. s. w.}$$

Um unnöthige Verwicklungen zu vermeiden, wollen wir jede der Grössen $\delta \dot{\psi}$, $\delta \dot{\varphi}$, u. s. w. als unendlich klein voraussetzen. Der vorstehende Ausdruck für die geleistete Arbeit wird dann

$$\Psi \dot{\psi} + \Phi \dot{\varphi} + \text{u. s. w.},$$

und da die Wirkung dieser Arbeit darin besteht, die kinetische Energie von T bis $T + \delta T$ zunehmen zu lassen, so muss

$$\delta T = \Psi \dot{\psi} + \Phi \dot{\varphi} + \text{u. s. w.}$$

sein. Es seien nun die Impulse von der Beschaffenheit, dass sie $\dot{\psi}$ auf $\dot{\psi} + \delta \dot{\psi}$ anwachsen und die übrigen Geschwindigkeitscomponenten unverändert lassen. Wir haben dann

$$\Psi \dot{\psi} + \Phi \dot{\varphi} + \text{u. s. w.} = \frac{dT}{d\dot{\psi}} \delta \dot{\psi}.$$

Dividiren wir beide Glieder durch $\delta \dot{\psi}$ und berücksichtigen, dass $\frac{dT}{d\dot{\psi}}$ eine lineare Function von $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, u. s. w. ist, so erkennen wir, dass $\frac{\Psi}{\delta \dot{\psi}}$, $\frac{\Phi}{\delta \dot{\psi}}$, u. s. w. beziehungsweise gleich den Coefficienten von $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}, \ldots$ in $\frac{dT}{d\dot{\psi}}$ sind.

(c.) Hieraus ist weiter ersichtlich, dass die Componenten des Impulses, welcher erforderlich ist, um die Geschwindigkeitscomponente $\dot{\psi}$ von der Ruhe aus zu erzeugen, oder um sie in dem sich mit einer beliebigen möglichen Geschwindigkeit bewegenden System hervorzubringen, folgende sind: —

$$(\psi, \psi)\dot{\psi},\ (\psi, \varphi)\dot{\psi},\ (\psi, \vartheta)\dot{\psi},\ \text{u. s. w.}$$

Wir schliessen daraus, dass, um die ganze resultirende Geschwindigkeit $(\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots)$ von der Ruhelage aus zu erzeugen, ein Impuls erfordert wird, dessen Componenten $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sich folgendermaassen ausdrücken lassen: —

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi = (\psi, \psi)\dot{\psi} + (\varphi, \psi)\dot{\varphi} + (\vartheta, \psi)\dot{\vartheta} + \cdots \\ \eta = (\psi, \varphi)\dot{\psi} + (\varphi, \varphi)\dot{\varphi} + (\vartheta, \varphi)\dot{\vartheta} + \cdots \\ \zeta = (\psi, \vartheta)\dot{\psi} + (\varphi, \vartheta)\dot{\varphi} + (\vartheta, \vartheta)\dot{\vartheta} + \cdots \\ \text{u. s. w.}; \end{cases}$$

dabei ist zu beachten, dass (φ, ψ) dasselbe wie (ψ, φ) bedeutet, u. s. w., wie aus dem anfänglichen Ausdruck für T hervorgeht, aus welchem diese Grössen abgeleitet sind. Die vorstehenden Ausdrücke sind die nach den Geschwindigkeiten genommenen Differentialquotienten von T, d. h. es ist

$$(8) \qquad \xi = \frac{dT}{d\dot{\psi}},\ \eta = \frac{dT}{d\dot{\varphi}},\ \zeta = \frac{dT}{d\dot{\vartheta}}, \cdots$$

(d.) Da die zweiten Glieder dieser Gleichungen lineare Functionen von $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ sind, so können wir mittels des gewöhnlichen Eliminationsverfahrens $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ durch $\xi, \eta, \ldots$ ausdrücken, und die so erhaltenen Aus-

drücke sind natürlich lineare Functionen der letztgenannten Elemente. Da ausserdem T eine quadratische Function von $\dot\psi$, $\dot\varphi$, u. s. w. ist, so haben wir

(9) $$2\,T = \xi\dot\psi + \eta\dot\varphi + \zeta\dot\vartheta + \cdots$$

Unter der Voraussetzung, dass $T, \dot\psi, \dot\varphi, \ldots$ durch $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückt seien, folgt hieraus durch Differentiation

$$2\frac{dT}{d\xi} = \dot\psi + \xi\frac{d\dot\psi}{d\xi} + \eta\frac{d\dot\varphi}{d\xi} + \zeta\frac{d\dot\vartheta}{d\xi} + \cdots$$

Nun zeigt das algebraische Verfahren, durch welches $\dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. durch ξ, η, u. s. w. ausgedrückt werden, dass, wie der Coefficient von $\dot\varphi$ in dem Ausdruck (7) für ξ gleich dem Coefficienten von $\dot\psi$ in dem Ausdruck für η, u. s. w. ist, so auch der Coefficient von η in dem Ausdruck für $\dot\psi$ gleich dem Coefficienten von ξ in dem Ausdruck für $\dot\varphi$ sein muss, u. s. w., d. h. es ist

$$\frac{d\dot\psi}{d\eta} = \frac{d\dot\varphi}{d\xi},\quad \frac{d\dot\psi}{d\zeta} = \frac{d\dot\vartheta}{d\xi},\ \text{u. s. w.}$$

Der vorhergehende Ausdruck geht danach über in

$$2\frac{dT}{d\xi} = \dot\psi + \xi\frac{d\dot\psi}{d\xi} + \eta\frac{d\dot\psi}{d\eta} + \zeta\frac{d\dot\psi}{d\zeta} + \cdots = 2\dot\psi,$$

und daher ist

(10) $$\begin{cases} \dot\psi = \dfrac{dT}{d\xi} \\ \dot\varphi = \dfrac{dT}{d\eta} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lösen die Aufgabe: — Die Geschwindigkeit zu ermitteln, welche ein gegebener Impuls $(\xi, \eta, \ldots)$ erzeugt, wenn die kinetische Energie T als eine quadratische Function der Componenten des Impulses gegeben ist.

(e.) Wenn wir die Bewegung einfach, ohne Rücksicht auf den Impuls betrachten, der erfordert wird, sie entweder aus der Ruhe zu erzeugen, oder sie aufzuheben, so sind die Grössen $\xi, \eta, \ldots$ offenbar als die nach dem System der allgemeinen Coordinaten genommenen Componenten der Bewegungsgrösse anzusehen.

(f.) Wir geben noch die folgende nützliche algebraische Relation: —

(11) $$\xi_{,}\dot\psi + \eta_{,}\dot\varphi + \zeta_{,}\dot\vartheta + \text{u. s. w.} = \xi\dot\psi_{,} + \eta\dot\varphi_{,} + \zeta\dot\vartheta_{,} + \text{u. s. w.};$$

darin haben $\xi, \eta, \dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. dieselbe Bedeutung wie vorher, während $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$, u. s. w. die Impulscomponenten bezeichnen, welche irgend welchen anderen Werthen $\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}, \dot\vartheta_{,}$, u. s. w. der Geschwindigkeitscomponenten entsprechen. Um diese Relation zu beweisen, hat man zu beachten, dass jedes Glied eine symmetrische Function von $\dot\psi, \dot\psi_{,}$; $\dot\varphi, \dot\varphi_{,}$; u. s. w. wird, wenn man darin $\xi_{,}, \eta_{,}$, u. s. w. durch ihre Werthe in $\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}$, u. s. w. und ξ, η, u. s. w. durch ihre Werthe in $\dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. ersetzt.

314. **Ein in Ruhe gegebenes materielles System irgendwelcher Art, welches einem Impulse von einer beliebig gegebenen Richtung und einer beliebig gegebenen Grösse unterworfen wird, bewegt sich so, dass es den grössten Betrag kinetischer Energie annimmt, welchen dieser bestimmte Impuls liefern kann.**

Es seien $\xi, \eta, \ldots$ die Componenten des gegebenen Impulses und $\dot\psi, \dot\varphi, \ldots$ die durch die obigen Gleichungen (10) bestimmten Componenten der durch den Impuls wirklich erzeugten Bewegung. Wir wollen nun voraussetzen, das System werde vermittels einer bloss die Richtung beeinflussenden Einschränkung dazu gebracht, unter der Einwirkung des gegebenen Impulses von der Ruhelage aus eine von der wirklichen verschiedene Bewegung $(\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}, \ldots)$ anzunehmen, und es sei $\xi_{,}, \eta_{,}, \ldots$ der Impuls, welcher allein, nach Beseitigung der Einschränkung, die Bewegung $(\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}, \ldots)$ erzeugen würde. Wir werden für diesen Fall, wie oben,

$$T_{,} = {}^1\!/_2(\xi_{,} \dot\psi_{,} + \eta_{,} \dot\varphi_{,} + \cdots)$$

haben. $\xi_{,} - \xi,\ \eta_{,} - \eta, \ldots$ sind aber die Componenten des Impulses, welchen das System in Folge der Einschränkung erfährt, die unserer Voraussetzung nach eingeführt ist. Wenn sich das System so bewegt, wie es durch diese Einschränkung gerichtet wird, so können jene Componenten in Beziehung auf dasselbe weder Arbeit leisten, noch verbrauchen, d. h. es ist

$$(12)\qquad (\xi_{,} - \xi)\,\dot\psi_{,} + (\eta_{,} - \eta)\,\dot\varphi_{,} + (\zeta_{,} - \zeta)\,\dot\vartheta_{,} + \text{u. s. w.} = 0,$$

folglich

$$2\,T_{,} = \xi\,\dot\psi_{,} + \eta\,\dot\varphi_{,} + \zeta\,\dot\vartheta_{,} + \text{u. s. w.}$$

Daraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} 2(T - T_{,}) &= \xi(\dot\psi - \dot\psi_{,}) + \eta(\dot\varphi - \dot\varphi_{,}) + \text{u. s. w.} \\ &= (\xi - \xi_{,})(\dot\psi - \dot\psi_{,}) + (\eta - \eta_{,})(\dot\varphi - \dot\varphi_{,}) + \text{u. s. w.} \\ &\quad + \xi_{,}(\dot\psi - \dot\psi_{,}) + \eta_{,}(\dot\varphi - \dot\varphi_{,}) + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Nach (11) ist aber

$$\xi_{,}(\dot\psi - \dot\psi_{,}) + \eta_{,}(\dot\varphi - \dot\varphi_{,}) + \text{u. s. w.} = (\xi - \xi_{,})\,\dot\psi_{,} + (\eta - \eta_{,})\,\dot\varphi_{,} + \text{u. s. w.},$$

und jedes Glied dieser Gleichung verschwindet, wie aus (12) ersichtlich ist, so dass wir

$$(13)\qquad 2(T - T_{,}) = (\xi - \xi_{,})(\dot\psi - \dot\psi_{,}) + (\eta - \eta_{,})(\dot\varphi - \dot\varphi_{,}) + \text{u. s. w.}$$

erhalten, d. h. T übertrifft $T_{,}$ um den Betrag der kinetischen Energie, welche durch einen dem Systeme einfach ertheilten Impuls $(\xi - \xi_{,}, \eta - \eta_{,}, \zeta - \zeta_{,}, \ldots)$ erzeugt werden würde. Dieser Ueberschuss ist natürlich positiv. Das erhaltene Resultat kann auch folgendermaassen ausgesprochen werden: —

315. **Wenn das System genöthigt wird, unter dem Einfluss eines gegebenen Impulses irgend eine von der natürlichen Bewegung $(\dot\psi, \dot\varphi, \ldots)$ verschiedene Bewegung $(\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}, \ldots)$ anzunehmen, so wird**

es weniger kinetische Energie erhalten, als wenn es die natürliche Bewegung vollführte, und zwar ist die Differenz gleich der kinetischen Energie der Bewegung ($\dot{\psi} - \dot{\psi}_{,,}\ \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{,,} \ldots$).

Zusatz: — Wenn eine Reihe materieller Punkte unabhängig von einander Impulse erhalten, deren jeder der Grösse nach gegeben ist, so wird mehr kinetische Energie erzeugt, wenn jeder Punkt sich völlig unabhängig von den übrigen frei bewegen kann, als wenn die Punkte in irgend einer Weise mit einander verbunden sind. Der Ueberschuss der kinetischen Energie im ersteren Falle über die des zweiten Falles ist gleich der Grösse der kinetischen Energie der Bewegung, welche, mit der Bewegung eines der beiden Fälle geometrisch zusammengesetzt, die Bewegung des anderen Falles liefern würde.

Probleme, deren Data Impulse und Geschwindigkeiten enthalten. — (a.) Bisher haben wir vorausgesetzt, es sei entweder die Bewegung vollständig gegeben, und man solle die Impulse bestimmen, die zu ihrer Erzeugung erfordert werden; oder es seien die Impulse gegeben, und man solle die durch dieselben hervorgebrachten Bewegungen bestimmen. Zu einer nicht minder wichtigen Klasse von Problemen gelangt man durch die Voraussetzung, es seien so viele lineare Bedingungsgleichungen zwischen den Impulsen und den Bewegungscomponenten gegeben, als das System Grade von Freiheit (oder unabhängige Coordinaten) in seiner Bewegung besitzt. Diese Gleichungen und ebenso viele weitere, die uns die Formeln (8) oder die äquivalenten Formeln (10) liefern, genügen für die vollständige Lösung der Aufgabe, die Impulse und die Bewegung zu bestimmen.

(b.) Ein sehr wichtiger Fall dieser Klasse bietet sich dar, wenn zwischen den Geschwindigkeiten allein eine Anzahl linearer Gleichungen mit constanten Gliedern bestehen und man voraussetzt, die Impulse seien so gerichtet und von solcher verhältnissmässigen Grösse, dass sie auf alle Geschwindigkeiten, die einer anderen vorgeschriebenen Reihe von linearen Gleichungen ohne constante Glieder genügen, keine Wirkung ausüben. Die Gesammtzahl der Gleichungen ist natürlich gleich der Anzahl der unabhängigen Coordinaten des Systems. Wir haben nicht nöthig, die Gleichungen für die Lösung dieses Problems niederzuschreiben, da sie auf der Hand liegen; doch ist die folgende Reduction von Nutzen, indem sie den einfachsten Beweis der unten angegebenen Minimum-Eigenschaft liefert.

(c.) Die zwischen den Geschwindigkeiten bestehenden gegebenen Gleichungen können auf eine Reihe von Gleichungen reducirt werden, die mit Ausnahme einer einzigen ein constantes Glied enthaltenden homogen sind. Jene homogenen Gleichungen verringern die Anzahl der Freiheitsgrade, und wir können die Coordinaten so transformiren, dass die Anzahl der unabhängigen Coordinaten demgemäss vermindert werde. Weiter können wir die neuen Coordinaten so wählen, dass die lineare Function der Geschwindigkeiten in der einen Gleichung mit dem constanten Gliede eine der neuen Geschwindigkeitscomponenten sei, und dass

die linearen Functionen der Geschwindigkeiten, welche mit den hinsichtlich der Impulse vorgeschriebenen Bedingungen in Gleichungen verbunden erscheinen, die übrigen Geschwindigkeitscomponenten seien. Auf diese Weise wird der Impuls die Bedingung erfüllen, dass er keine Arbeit für irgend eine Geschwindigkeitscomponente leistet, die von der einen gegebenen verschieden ist, und das allgemeine Problem: —

316. Es ist ein beliebiges in Ruhe befindliches materielles System gegeben. Irgendwelche Theile desselben werden plötzlich mit beliebig gegebenen Geschwindigkeiten, die nach den Bedingungen des Systems möglich sind, in Bewegung gesetzt, und die übrigen Theile nur durch ihren Zusammenhang mit den bewegten beeinflusst. Man soll die Bewegung bestimmen

nimmt die folgende sehr einfache Form an: — Auf ein materielles System wirkt ein Impuls, der für die angewandten allgemeinen Coordinaten als eine einzelne Componente erscheint und von solcher Grösse ist, dass er eine gegebene Geschwindigkeitscomponente von der entsprechenden Bewegungsform erzeugt. Man soll die Bewegung bestimmen.

Die Lösung der Aufgabe folgt natürlich aus den Gleichungen

$$(15)\qquad \dot{\psi} = A, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \text{ u. s. w.},$$

welche die speciellen Bedingungsgleichungen des Systems sind, und aus den allgemeinen kinetischen Gleichungen (7) oder (10). Wir wählen die letzteren und bezeichnen mit $[\xi,\xi]$, $[\xi,\eta]$, u. s. w. die Coefficienten von $\frac{1}{2}\xi^2$, $\xi\eta_{\prime\prime}$ u. s. w. in T; dann ist das Resultat

$$(16)\qquad \xi = \frac{A}{[\xi,\xi]}, \quad \dot{\varphi} = \frac{[\xi,\eta]}{[\xi,\xi]}A, \quad \dot{\vartheta} = \frac{[\xi,\zeta]}{[\xi,\xi]}A, \text{ u. s. w.}$$

Dieses Resultat besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass die kinetische Energie der dadurch ausgedrückten Bewegung kleiner als diejenige jeder anderen Bewegung ist, welche die in Betreff der Geschwindigkeit vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Denn wenn $\xi_\prime, \eta_\prime, \zeta_\prime$, u. s. w. die zur Hervorbringung irgend einer anderen Bewegung $\dot{\psi}_\prime, \dot{\varphi}_\prime, \dot{\vartheta}_\prime$, u. s. w. erforderlichen Impulse und $T_\prime$ die entsprechende kinetische Energie bezeichnen, so haben wir nach (9)

$$2\,T_\prime = \xi_\prime\dot{\psi}_\prime + \eta_\prime\dot{\varphi}_\prime + \zeta_\prime\dot{\vartheta}_\prime + \text{u. s. w.}$$

Nach (11) ist aber

$$\xi_\prime\dot{\psi} + \eta_\prime\dot{\varphi} + \zeta_\prime\dot{\vartheta} + \text{u. s. w.} = \xi\dot{\psi}_\prime,$$

da nach (15) $\eta = 0$, $\zeta = 0$, u. s. w. ist. Wir erhalten somit

$$2\,T_\prime = \xi\dot{\psi}_\prime + \xi_\prime(\dot{\psi}_\prime - \dot{\psi}) + \eta_\prime(\dot{\varphi}_\prime - \dot{\varphi}) + \zeta_\prime(\dot{\vartheta}_\prime - \dot{\vartheta}) + \cdots$$

Nun möge auch dieser zweite Bewegungsfall ($\dot{\psi}_\prime, \dot{\varphi}_\prime, \ldots$) die vorgeschriebene Geschwindigkeitsbedingung $\dot{\psi}_\prime = A$ erfüllen. Dann wird

$$\begin{aligned}\xi_\prime(\dot{\psi}_\prime - \dot{\psi}) + \eta_\prime(\dot{\varphi}_\prime - \dot{\varphi}) + \zeta_\prime(\dot{\vartheta}_\prime - \dot{\vartheta}) + \cdots &= (\xi_\prime - \xi)(\dot{\psi}_\prime - \dot{\psi}) \\ &+ (\eta_\prime - \eta)(\dot{\varphi}_\prime - \dot{\varphi}) + (\zeta_\prime - \zeta)(\dot{\vartheta}_\prime - \dot{\vartheta}) + \cdots\end{aligned}$$

sein, da $\dot{\psi}_, - \dot{\psi} = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0, \ldots$ ist. Bezeichnet also $\mathfrak{T}$ die kinetische Energie der durch den Impuls ($\xi_, - \xi$, $\eta_, - \eta, \ldots$) von der Ruhe aus erzeugten Bewegung, so haben wir

$$2\,T_, = 2\,T + 2\,\mathfrak{T}. \tag{17}$$

$\mathfrak{T}$ ist aber seiner Natur nach positiv, und daher ist $T_,$, die kinetische Energie irgend einer Bewegung, welche zwar der vorgeschriebenen Geschwindigkeitsbedingung genügt, aber von der wirklichen Bewegung abweicht, grösser als die kinetische Energie T der wirklichen Bewegung. Die Grösse der Differenz, $\mathfrak{T}$, wird durch die Gleichung

$$2\,\mathfrak{T} = \eta_,(\dot{\varphi}_, - \dot{\varphi}) + \zeta_,(\dot{\vartheta}_, - \dot{\vartheta}) + \cdots \tag{18}$$

gegeben. Mit anderen Worten:

317. Die Lösung des Problems ist folgende: — Die von dem System wirklich eingeschlagene Bewegung ist diejenige, welche weniger kinetische Energie als irgend eine andere den vorgeschriebenen Geschwindigkeitsbedingungen genügende Bewegung besitzt. Der Ueberschuss der kinetischen Energie jeder anderen solchen Bewegung über die Energie der wirklichen Bewegung ist gleich der Energie der Bewegung, welche durch die alleinige Wirkung desjenigen Impulses entstehen würde, der im Verein mit dem die wirkliche Bewegung erzeugenden Impulse diese andere vorausgesetzte Bewegung hervorbringen würde.

In der Behandlung von Aufgaben wird der Gebrauch des besonderen Coordinatensystems, welches die Anwendung der Lösung (16) erforderlich macht, sich nur sehr selten als zweckmässig erweisen. Die jetzt bewiesene Minimum-Eigenschaft liefert aber in allen Fällen eine leichte Lösung, selbst in solchen Fällen, welche, wie die nachstehenden Beispiele (2) und (3), eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden enthalten.

Beispiel (1). — Eine glatte Ebene, welche gezwungen ist, sich mit einer gegebenen Normalgeschwindigkeit q zu bewegen, komme mit einem in Ruhe befindlichen freien starren Körper in Berührung. Man soll die Bewegung bestimmen, die sie hervorbringt. Die Geschwindigkeitsbedingung ist hier die, dass die Bewegung aus zwei ganz beliebigen Bewegungen zusammengesetzt sein soll, von denen die eine dem gestossenen Punkte des Körpers eine zur stossenden Ebene senkrechte ganz bestimmte Geschwindigkeit q ertheilt, während die andere demselben Punkte eine ganz beliebige dieser Ebene parallele Geschwindigkeit liefert. Um diese Bedingung auszudrücken, seien u, v, w die rechtwinkligen linearen Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes und ω, ϱ, σ die Winkelgeschwindigkeitscomponenten um Axen, welche durch den Schwerpunkt gehen und den Coordinatenaxen parallel sind. Bezeichnen dann x, y, z die Coordinaten des gestossenen Punktes in Beziehung auf diese durch den Schwerpunkt gehenden Axen und l, m, n die Richtungscosinus der an

die stossende Ebene gelegten Normalen, so lässt sich die vorgeschriebene Geschwindigkeitsbedingung in folgender Form schreiben: —

$$\text{(a)}\quad (u + \varrho z - \sigma y) l + (v + \sigma x - \omega z) m + (w + \omega y - \varrho x) n = -q;$$

wir haben vor q das negative Zeichen gesetzt, da die Bewegung der stossenden Ebene, wenn jede der Grössen l, m, n positiv ist, schräg (wenn nicht direct) gegen den Schwerpunkt hin erfolgen soll. Setzen wir jetzt voraus, die durch den Schwerpunkt gehenden rechtwinkligen Axen seien die Hauptaxen des Körpers und bezeichnen die Trägheitsmomente in Beziehung auf dieselben mit Mf^2, Mg^2, Mh^2, so ist

$$\text{(b)}\quad T = \tfrac{1}{2} M (u^2 + v^2 + w^2 + f^2 \omega^2 + g^2 \varrho^2 + h^2 \sigma^2),$$

und dieser Ausdruck muss unter Bezugnahme auf die Bedingungsgleichung (a) zu einem Minimum gemacht werden. Nach der gewöhnlichen Methode der unbestimmten Multiplicatoren folgt

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} Mu + \lambda l = 0,\ Mv + \lambda m = 0,\ Mw + \lambda n = 0 \\ Mf^2 \omega + \lambda (ny - mz) = 0,\quad Mg^2 \varrho + \lambda (lz - nx) = 0, \\ Mh^2 \sigma + \lambda (mx - ly) = 0. \end{cases}$$

Jede dieser sechs Gleichungen liefert den Werth einer der sechs unbekannten Grössen $u, v, w, \omega, \varrho, \sigma$, ausgedrückt durch λ und die gegebenen Grössen. Werden die so erhaltenen Werthe in (a) eingesetzt, so erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von λ, und die Lösung der Aufgabe ist beendet. Die drei ersten Gleichungen (c) zeigen, dass die als ein unbestimmter Multiplicator eingetretene Grösse λ als das Maass der Grösse des Impulses interpretirt werden muss.

Beispiel (2). — Jedem Ende einer biegsamen unausdehnbaren Schnur, die einen beliebigen krummlinigen Bogen bildet, wird durch einen Stoss eine gegebene Geschwindigkeit in einer gegebenen Richtung ertheilt. Man soll die anfängliche Bewegung der ganzen Schnur bestimmen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Schnur und $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die Componenten der gesuchten anfänglichen Geschwindigkeit desselben. Ferner sei s die Länge vom einen Ende der Schnur bis zum Punkte P.

Wenn die Schnur ausdehnbar wäre, so würde

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\dot{x}}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\dot{y}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\dot{z}}{ds}$$

die für die Längeneinheit genommene Grösse der Ausdehnung sein, die sie in Folge der Bewegung $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ im Punkte P in der Zeiteinheit erfahren würde. Nun ist aber die Schnur der Voraussetzung nach unausdehnbar, folglich

$$\text{(a)}\quad \frac{dx}{ds}\frac{d\dot{x}}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\dot{y}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\dot{z}}{ds} = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung, welche die kinematische Bedingung des Systems ist, und auf die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{z} &= w \end{aligned}\right\} \text{ wenn } s = 0 \text{ ist,}\quad \left.\begin{aligned} \dot{x} &= u' \\ \dot{y} &= v' \\ \dot{z} &= w' \end{aligned}\right\} \text{ wenn } s = l \text{ ist,}$$

wo l die Länge der Schnur und (u, v, w), (u', v', w') die Componenten der den beiden Enden ertheilten gegebenen Geschwindigkeiten bezeichnen, soll man $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ in jedem Punkte so bestimmen, dass

$$\text{(b)} \qquad \int_0^l \tfrac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,ds$$

ein Minimum wird; darin bezeichnet μ die für die Längeneinheit genommene Masse der Schnur im Punkte P (die Schnur braucht nicht gleichförmig zu sein), und es ist natürlich

$$\text{(c)} \qquad ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}.$$

Multiplicirt man (a) mit einem unbestimmten Factor λ und verfährt weiter nach der bekannten Regel der Variationsrechnung, so erhält man

$$\int_0^l \left\{\mu(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\dot{z}) + \lambda\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\delta\dot{x}}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\delta\dot{y}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\delta\dot{z}}{ds}\right)\right\} ds = 0,$$

worin x, y, z als bekannte Functionen von s angesehen werden können, welche letztere Grösse zweckmässig zur unabhängig Veränderlichen genommen wird. Wenn man den Theil des ersten Gliedes, welcher λ enthält, partiell integrirt und die Grenzbedingungen beachtet, so erhält man nach dem gewöhnlichen Verfahren die Gleichungen

$$\text{(d)} \qquad \mu\dot{x} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right), \quad \mu\dot{y} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right), \quad \mu\dot{z} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right),$$

welche die Lösung darstellen. Diese drei Gleichungen genügen zur Bestimmung der vier unbekannten Grössen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ und λ. Wird mittels derselben $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ aus (a) eliminirt, so folgt

$$0 = \frac{d\frac{1}{\mu}}{ds}\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) + \cdots\right\} + \frac{1}{\mu}\left\{\frac{dx}{ds}\frac{d^2}{ds^2}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) + \cdots\right\}.$$

Setzen wir jetzt der Einfachheit wegen voraus, s sei die unabhängig Veränderliche, und führen die hier angedeutete Differentiation mit Rücksicht auf die Relationen

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \cdots = 1, \quad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \cdots = 0,$$
$$\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \cdots + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \cdots = 0$$

und auf den in § 9 gegebenen Ausdruck für den Krümmungsradius ϱ aus, so erhalten wir

$$\text{(e)} \qquad \frac{1}{\mu}\frac{d^2\lambda}{ds^2} + \frac{d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{ds}\frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{\mu\varrho^2} = 0.$$

Die Bedeutung der Formel (e) liegt auf der Hand. Sie zeigt, dass λ die impulsive Spannung der Schnur im Punkte P ist, und dass die Geschwindigkeit, welche dieser Punkt augenblicklich annimmt, die Resultante von

$\frac{1}{\mu}\frac{d\lambda}{ds}$ und $\frac{\lambda}{\varrho\mu}$ ist, von denen der erstere Ausdruck die tangentiale, der zweite die nach dem Krümmungsmittelpunkt zu gerichtete Componente ist. Die Differentialgleichung (e) zeigt daher das Gesetz der Fortleitung der augenblicklichen Spannung durch die Schnur hindurch und beweist, dass dieselbe lediglich von der Dichtigkeit der Schnur in jedem Theile und von ihrer Krümmung von Punkt zu Punkt, aber durchaus nicht von der Krümmungsebene ihrer anfänglichen Form abhängt. So z. B. wird sie längs einer Schraubenlinie dieselbe sein, wie längs eines Kreises von derselben Krümmung.

Rücksichtlich der Erfüllung der sechs Grenzgleichungen tritt eine Schwierigkeit ein, insofern $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ durch (d), ohne dass neue willkürliche Constanten eingeführt würden, unmittelbar als Functionen von λ ausgedrückt werden, welche Grösse, als die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, nur zwei willkürliche Constanten enthält. Es erklärt sich dies dadurch, dass in jedem Punkte der Schnur in jedem Augenblicke eine beliebige Geschwindigkeit in irgend einer zur Tangente senkrechten Richtung erzeugt werden kann, ohne dass der Zustand der Schnur, selbst in unendlich nahe gelegenen Punkten, auch nur die geringste Aenderung erlitte. Dies leuchtet ohne Beweis ein; man kann es aber analytisch dadurch beweisen, dass man die kinematische Gleichung (a) in folgender Weise transformirt. Es sei f die tangentiale, q die nach dem Krümmungsmittelpunkt zu gerichtete und p die zur osculatorischen Ebene senkrechte Geschwindigkeitscomponente. Bei Benutzung der elementaren Formeln für die Richtungscosinus dieser Linien (§ 9) und mit Rücksicht darauf, dass jetzt s die unabhängig Veränderliche ist, erhalten wir

$$\dot{x} = f\frac{dx}{ds} + q\frac{\varrho\, d^2x}{ds^2} + p\frac{\varrho\,(dz\, d^2y - dy\, d^2z)}{ds^3}, \quad \dot{y} = \text{u. s. w.}$$

Werden diese Werthe in (a) eingesetzt, so folgt nach einigen Reductionen

$$\text{(f)} \qquad \frac{df}{ds} = \frac{q}{\varrho},$$

eine Form der kinematischen Gleichung einer biegsamen Linie, die uns später von grossem Nutzen sein wird.

Wir sehen somit, dass, wenn die tangentialen Componenten der den Endpunkten ertheilten Geschwindigkeiten irgendwelche vorgeschriebenen Werthe haben, wir den Enden ausserdem beliebige zu den Tangenten senkrechte Geschwindigkeiten geben können, ohne die von irgend einem Theil der Schnur angenommene Bewegung zu ändern. Hieraus leuchtet auch ein, dass die Richtungen der Impulse an den Endpunkten nothwendig tangential sind, oder mit anderen Worten, dass ein gegen die Tangente an einem Endpunkte geneigter Impuls eine unendliche Quergeschwindigkeit erzeugen würde.

Um jetzt die Bedingungen für die Enden auszudrücken, seien F' und F die als bekannt vorausgesetzten tangentialen Geschwindigkeiten, die in denselben erzeugt werden. Für jeden Punkt P ist, wie wir oben gesehen haben,

$$\text{(g)} \qquad f = \frac{1}{\mu}\frac{d\lambda}{ds},$$

folglich

$$\text{(h)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\lambda}{ds} = F, \text{ wenn } s = 0 \text{ ist,} \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\lambda}{ds} = F', \text{ wenn } s = l \text{ ist,} \end{cases}$$

und diese Gleichungen genügen zur Bestimmung der Integrationsconstanten von (d).

Wenn statt der Geschwindigkeiten die tangentialen Impulse I, I' gegeben sind, die den Endpunkten ertheilt werden müssen, um die Bewegung zu erzeugen, so haben wir

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} \lambda = I, \text{ wenn } s = 0 \text{ ist,} \\ \lambda = I', \text{ wenn } s = l \text{ ist.} \end{cases}$$

Es kann auch einer der beiden Endpunkte frei sein; für diesen haben wir dann $\lambda = 0$ und für den zweiten Endpunkt irgend eine in Betreff des ertheilten Impulses oder der erzeugten Geschwindigkeit vorgeschriebene Bedingung.

Die Lösung dieser Aufgabe ist insofern sehr interessant, als sie zeigt, wie schnell die Fortleitung des Impulses mit der „Richtungsänderung" längs der Schnur nachlässt. Der Leser wird sich dies ohne grosse Schwierigkeit erläutern, dadurch dass er es für den Fall einer Schnur, die entweder gleichförmig oder von solcher Beschaffenheit ist, dass $\mu \dfrac{d\frac{1}{\mu}}{ds}$ einen constanten Werth hat, und die in der Form eines Kreises oder einer Schraubenlinie gegeben ist, detaillirt ausarbeitet. Die Resultate haben merkwürdige und dynamisch höchst interessante Beziehungen zu den Bewegungen einer Peitschenschmitze und des beim Harpuniren eines Wallfisches benutzten Taues.

Beispiel (3). — Es sei eine in Ruhe befindliche Masse einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit gegeben, welche ein geschlossenes Gefäss von irgend einer Gestalt ganz ausfüllt. Ferner sollen dadurch, dass man plötzlich die Gestalt des Gefässes zu ändern beginnt, in der Flüssigkeit an allen Punkten ihrer Umgrenzungsfläche plötzlich beliebig vorgeschriebene Normalgeschwindigkeiten erzeugt werden, wobei jedoch das Volumen unverändert bleiben muss. Man soll die augenblickliche Geschwindigkeit irgend eines inneren Punktes der Flüssigkeit bestimmen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes P des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes und u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit, welche das in P liegende Flüssigkeitstheilchen erhalten hat. Ist dann ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, und bezeichnet $\iiint$ eine sich durch den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum erstreckende Integration, so haben wir

$$\text{(a)} \qquad T = \iiint \tfrac{1}{2}\varrho\,(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz,$$

welches Integral, unter Berücksichtigung der kinematischen Bedingung (§ 193)

$$\text{(b)} \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

und der gegebenen Oberflächenwerthe der normalen Geschwindigkeitscomponente zu einem Minimum gemacht werden muss. Das Verfahren der Variationsrechnung liefert

(c) $$\iiint\left\{\varrho(u\delta u+v\delta v+w\delta w)+\lambda\left(\frac{d\delta u}{dx}+\frac{d\delta v}{dy}+\frac{d\delta w}{dz}\right)\right\}dx\,dy\,dz=0.$$

Durch partielle Integration erhalten wir aber

(d) $$\iiint\lambda\left(\frac{d\delta u}{dx}+\frac{d\delta v}{dy}+\frac{d\delta w}{dz}\right)dx\,dy\,dz$$
$$=\iint\lambda(\delta u\,dy\,dz+\delta v\,dz\,dx+\delta w\,dx\,dy)$$
$$-\iiint\left(\delta u\frac{d\lambda}{dx}+\delta v\frac{d\lambda}{dy}+\delta w\frac{d\lambda}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

und wenn l, m, n die Richtungscosinus der Normalen in irgend einem Punkte der Oberfläche, dS ein Element der Oberfläche und $\iint$ eine sich über die ganze Oberfläche erstreckende Integration bezeichnen, so ist

$$\iint\lambda(\delta u\,dy\,dz+\delta v\,dz\,dx+\delta w\,dx\,dy)$$
$$=\iint\lambda(l\delta u+m\delta v+n\delta w)\,dS=0,$$

da die normale Geschwindigkeitscomponente gegeben ist, was $l\delta u+m\delta v+n\delta w=0$ erfordert. Mit Rücksicht auf dies Resultat ergiebt sich aus (c) und (d) durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\delta u, \delta v, \delta w$

(e) $$\varrho u=\frac{d\lambda}{dx},\quad \varrho v=\frac{d\lambda}{dy},\quad \varrho w=\frac{d\lambda}{dz}.$$

Mittels dieser Formeln kann man u, v, w aus (b) eliminiren und erhält eine Gleichung

(f) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\lambda}{dz}\right)=0$$

zur Bestimmung von λ. Ist λ bestimmt, so ist die Lösung der Aufgabe der Gleichungen (e) wegen beendet.

Die ausser der kinematischen Gleichung (b) zu erfüllende Bedingung läuft einfach darauf hinaus, dass $\varrho(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$ ein vollständiges Differential sei. Wenn die Flüssigkeit homogen, also ϱ constant ist, so muss $u\,dx+v\,dy+w\,dz$ ein vollständiges Differential sein; mit anderen Worten, die plötzlich erzeugte Bewegung muss durch die ganze Flüssigkeit hindurch eine „rotationslose" [§ 190, (i)] sein. Die Gleichung zur Bestimmung von λ wird in diesem Falle

(g) $$\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}=0.$$

Aus den später zu behandelnden Principien der Hydrodynamik wird hervorgehen, dass die Function λ, deren Differential $\varrho(u\,dx+v\,dy+w\,dz)$ ist, der impulsive Druck im Punkte (x, y, z) der Flüssigkeit ist. Daraus können wir schliessen, dass die Lösung der Gleichung (f), der noch die Bedingung hinzugefügt wird, dass λ für jeden Punkt einer gewissen ge-

schlossenen Oberfläche einen gegebenen Werth habe, für jeden Punkt innerhalb dieser Oberfläche möglich ist und ein bestimmtes Resultat liefert. Dies ist genau dasselbe Problem, wie die Bestimmung der permanenten Temperatur in einem beliebigen Punkte innerhalb eines heterogenen festen Körpers, dessen Oberfläche beständig in einer nicht gleichförmigen Temperatur erhalten wird; es ist dann (f) die Fourier'sche Gleichung für die gleichförmige Wärmeleitung durch einen festen Körper, dessen Leitungsvermögen im Punkte (x, y, z) gleich $\frac{1}{\varrho}$ ist. Die Möglichkeit und die Bestimmtheit dieser Aufgabe sind schon oben [Cap. I, Anhang, A, (e)] bewiesen, und es ist lehrreich, den früheren Beweis mit dem gegenwärtigen zu vergleichen. Der andere Fall der Oberflächenbedingung — der, mit welchem wir hier begonnen haben — zeigt, dass die Gleichung (f), wenn $l\frac{d\lambda}{dx} + m\frac{d\lambda}{dy} + n\frac{d\lambda}{dz}$ für jeden Punkt der Oberfläche nach Belieben gegeben ist, gleichfalls für den ganzen inneren Raum eine und nur eine Lösung besitzt. Dies kann auch, wie wir in der mathematischen Theorie der magnetischen Induction sehen werden, aus dem allgemeinen Theorem (e) des obigen Anhanges *A* gefolgert werden, wenn man voraussetzt, α sei für jeden Punkt ausserhalb der gegebenen Oberfläche Null und habe für jeden inneren Punkt (x, y, z) den Werth $\frac{1}{\varrho}$.

318. **Princip der kleinsten Wirkung.** — Maupertuis' berühmtes Princip der kleinsten Wirkung ist bis jetzt mehr als eine sonderbare und etwas verwirrende Eigenschaft der Bewegung, denn als ein nützlicher Führer in kinetischen Forschungen angesehen worden. Wir haben aber die feste Ueberzeugung, dass man demselben eine viel tiefere Bedeutung beilegen wird, nicht nur in der abstracten Dynamik, sondern auch in der Theorie mehrerer Zweige der Physik, die jetzt anfangen, dynamische Erklärungen zu erhalten. Als eine Erweiterung dieses Princips hat W. R. Hamilton*) seine Methode der variirenden Wirkung entwickelt, die unzweifelhaft ein sehr schätzbares Hülfsmittel in späteren Verallgemeinerungen werden muss.

Die Bedeutung, welche das Wort „Wirkung" in diesen Ausdrücken hat, ist unglücklicherweise ganz von dem verschieden, was Newton als die Actio Agentis definirt, und unzweifelhaft ist jenes Wort durchaus nicht so gut gewählt, wie Newton's Ausdruck. Indem wir es indessen in dem Sinne, wie wir es jetzt allgemein in den Schriften über Dynamik gebraucht finden, beibehalten, so definiren wir die Wirkung eines in Bewegung befindlichen Systems als proportional dem Producte der mittleren kinetischen Energie, welche

*) Phil. Trans. 1834 — 1835.

das System von irgend einem passend gewählten Augenblicke an besessen hat, in die betrachtete Zeit. Nach der allgemein angenommenen Einheit ist die Wirkung eines Systems, dessen kinetische Energie keine Aenderung erlitten hat, das doppelte Product aus der Energie in die in Rede stehende Zeit. Wenn die Energie manchmal grösser, manchmal kleiner war, so ist die Wirkung zur Zeit t gleichfalls das Doppelte von dem, was wir das Zeitintegral der Energie nennen können, d. h. sie wird in der Integralrechnung durch

$$2\int_0^t T\,d\tau$$

bezeichnet, wo T die kinetische Energie ist, die das System in irgend einem Augenblick τ des betrachteten Zeitraums von 0 bis t besitzt.

Irgend einer der materiellen Punkte, aus denen das System besteht, habe die Masse m und zur Zeit τ die Geschwindigkeit v. Dann ist

$$T = \Sigma\, {}^1\!/_2\, m v^2, \tag{1}$$

folglich, wenn A die Wirkung zur Zeit t bezeichnet,

$$A = \int_0^t \Sigma m v^2\, d\tau. \tag{2}$$

Man kann hierfür einen anderen Ausdruck bilden, indem man mit ds den Weg bezeichnet, den ein materieller Punkt in der Zeit $d\tau$ beschreibt. Es ist dann $v\,d\tau = ds$, folglich

$$A = \int \Sigma m v\, ds, \tag{3}$$

oder, wenn die Masse m zu irgend einer Zeit die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z hat,

$$A = \int \Sigma m (\dot{x}\,dx + \dot{y}\,dy + \dot{z}\,dz). \tag{4}$$

Danach könnte man, und viele Schriftsteller haben dies wirklich gethan, die Wirkung folgendermaassen definiren: —

Die Wirkung eines Systems wird erhalten, wenn man die mittlere Bewegungsgrösse, die jeder Punkt des Systems auf seinem Wege während der in Rede stehenden Zeit hat, mit der Länge seines Weges multiplicirt und alle diese Producte addirt.

319. Das Princip der kleinsten Wirkung ist folgendes: — Unter allen den verschiedenen Bewegungsweisen, mittels deren die Punkte eines conservativen Systems aus einer Configuration in eine andere gelangen können, während die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie gleich einer gegebenen Constanten ist, giebt

es eine Bewegungsweise, für welche die Wirkung ein Minimum ist. Es ist dies diejenige, auf welcher sich das System von selbst ohne jede Leitung bewegt, wenn es nur durch einen Anstoss die geeigneten Geschwindigkeiten erhalten hat.

Es seien x, y, z zur Zeit τ die Coordinaten eines die Masse m enthaltenden Punktes und V die potentielle Energie des Systems in der zu dieser Zeit vorhandenen besonderen Configuration. Das System soll aus einer gegebenen Configuration in eine andere übergehen, und dabei sollen seine Geschwindigkeiten in jedem Augenblick der Bedingung

$$(5) \qquad \Sigma \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = E = \text{einer Constanten}$$

genügen. Auf welchem Wege muss dieser Uebergang erfolgen, damit A oder

$$\int \Sigma m (\dot{x}\, dx + \dot{y}\, dy + \dot{z}\, dz)$$

einen möglichst kleinen Werth annehme?

Nach dem Verfahren der Variationsrechnung findet man, dass $\delta A = 0$ sein muss, wo

$$(6) \quad \delta A = \int \Sigma m (\dot{x}\, d\delta x + \dot{y}\, d\delta y + \dot{z}\, d\delta z + \delta\dot{x}\, dx + \delta\dot{y}\, dy + \delta\dot{z}\, dz)$$

ist. Wird hierin $dx = \dot{x}\, d\tau$, $dy = \dot{y}\, d\tau$, $dz = \dot{z}\, d\tau$ genommen und beachtet, dass

$$(7) \qquad \Sigma m (\dot{x}\, \delta\dot{x} + \dot{y}\, \delta\dot{y} + \dot{z}\, \delta\dot{z}) = \delta T$$

ist, so haben wir

$$(8) \qquad \int \Sigma m (\delta\dot{x}\, dx + \delta\dot{y}\, dy + \delta\dot{z}\, dz) = \int_0^t \delta T\, d\tau.$$

Ferner ergiebt sich durch partielle Integration

$$\int \Sigma m (\dot{x}\, d\delta x + \cdots) = \{\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \cdots)\} - [\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \cdots)] \\ - \int \Sigma m (\ddot{x}\, \delta x + \cdots)\, d\tau,$$

wo $[\cdots]$ und $\{\cdots\}$ die Werthe der eingeschlossenen Grössen zu Anfang und zu Ende der betrachteten Bewegung bezeichnen und $d\dot{x} = \ddot{x}\, d\tau$, u. s. w. ist. Der obige Ausdruck (6) geht somit über in

$$(9) \quad \delta A = \{\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \dot{y}\, \delta y + \dot{z}\, \delta z)\} - [\Sigma m (\dot{x}\, \delta x + \dot{y}\, \delta y + \dot{z}\, \delta z)] \\ + \int_0^t d\tau\, [\delta T - \Sigma m (\ddot{x}\, \delta x + \ddot{y}\, \delta y + \ddot{z}\, \delta z)].$$

Wir machen darauf aufmerksam, dass dies ein völlig allgemeiner, durch keine Grenz- oder kinetischen Bedingungen beschränkter kinematischer Ausdruck ist. Im gegenwärtigen Problem setzen wir nun die anfängliche und die Endlage als unveränderlich voraus. Folglich müssen die Variationen δx, u. s. w. für die Grenzwerthe sämmtlich verschwinden, die Ausdrücke $\{\cdots\}$, $[\cdots]$ somit wegfallen. Auch ist im vorliegenden Problem nach der Gleichung der Energie (5) $\delta T = - \delta V$. Um also $\delta A = 0$ zu machen, müssen wir, da die Zwischenwerthe der Variationen δx, u. s. w.

nur den Bedingungen des Systems unterworfen, im Uebrigen aber ganz willkürlich sind,

$$\Sigma m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) + \delta V = 0 \tag{10}$$

haben, was [§ 293, (4)] die allgemeine Variationsgleichung der Bewegung eines conservativen Systems ist. Damit ist der Satz bewiesen. Es folgt daraus auch: —

320. Stationäre Wirkung. — Bei jeder ungezwungenen Bewegung eines conservativen Systems aus irgend einer bestimmten Anfangslage in eine beliebige andere Lage ist die Wirkung zwar nicht nothwendig ein Minimum, hat aber die Eigenschaft, stationär zu sein, d. h. ihre Variation verschwindet, was die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums, Maximums, oder eines Maximumminimums ist.

Dies lässt sich ohne Benutzung der mathematischen Ausdrucksweise wohl kaum klar machen. Es seien (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), u. s. w. zu irgend einer Zeit τ der wirklichen Bewegung die Coordinaten von Massentheilchen m_1, m_2, u. s. w. des Systems. Ferner seien V die potentielle Energie des Systems in der zu dieser Zeit τ vorhandenen Configuration und E der gegebene Werth der Summe der potentiellen und der kinetischen Energie. Die Gleichung der Energie ist dann:

$$\tfrac{1}{2}\{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \text{u. s. w.}\} + V = E. \tag{1}$$

Fassen wir irgend einen Theil der Bewegung, z. B. diejenige von der Zeit 0 bis zur Zeit t ins Auge, so erhalten wir für die Wirkung während dieses Intervalles

$$A = \int_0^t (E - V)\,d\tau = Et - \int_0^t V\,d\tau. \tag{11}$$

Jetzt wollen wir voraussetzen, das System werde auf irgend einem anderen bei den vorhandenen Bedingungen möglichen Wege mit irgendwelchen anderen Geschwindigkeiten aus derselben anfänglichen in dieselbe Endconfiguration wie in der gegebenen Bewegung geleitet, und auch bei dieser zweiten (gezwungenen) Bewegung sei die Bedingung erfüllt, dass die kinetische und die potentielle Energie die Summe E haben. Zur Zeit τ während dieser willkürlichen Bewegung seien (x_1', y_1', z_1'), u. s. w. die Coordinaten, V' die entsprechende potentielle Energie und $(\dot{x}_1', \dot{y}_1', \dot{z}_1')$, u. s. w. die Geschwindigkeitscomponenten. Dann bleibt die Gleichung (1) noch bestehen, wenn allen darin enthaltenen Buchstaben, mit alleiniger Ausnahme von E, Accente gegeben werden, und wir erhalten für die Wirkung

$$A' = Et' - \int_0^{t'} V'\,d\tau, \tag{12}$$

wo t' die Zeit bezeichnet, während welcher diese zweite gezwungene Bewegung vor sich geht. Es bezeichne nun ϑ eine kleine numerische Grösse, und es seien ξ_1, η_1, u. s. w. endliche Linien von der Beschaffenheit, dass

$$\frac{x_1' - x_1}{\xi_1} = \frac{y_1' - y_1}{\eta_1} = \frac{z_1' - z_1}{\zeta_1} = \frac{x_2' - x_2}{\xi_2} = \text{u. s. w.} = \vartheta$$

ist. Das „Princip der stationären Wirkung" besteht dann darin, dass für jede mögliche Abweichung ($\xi_1 \vartheta$, $\eta_1 \vartheta$, u. s. w.) von dem natürlichen Wege und den zugehörigen Geschwindigkeiten, wenn diese neue Bewegung nur die Gleichung der Energie erfüllt und das System durch die festgesetzte anfängliche und die gleichfalls festgesetzte Endconfiguration hindurchführt, der Ausdruck $\frac{V' - V}{\vartheta}$ für ein unendlich kleines ϑ verschwindet, und umgekehrt, dass, wenn $\frac{V' - V}{\vartheta}$ zugleich mit ϑ für jede mögliche Abweichung dieser Art von einem gewissen durch die Coordinaten (x_1, y_1, z_1), u. s. w. angegebenen Wege und gewissen Geschwindigkeiten verschwindet, dieser Weg und diese Geschwindigkeiten es sind, welche das System ohne weitere Leitung annimmt, wenn es nur mit passenden Geschwindigkeiten von der anfänglichen Configuration aus in Bewegung gesetzt wird.

321. Variirende Wirkung. — Von diesem Princip der stationären Wirkung, das sich, wie wir gesehen haben, auf einen Vergleich zwischen einer natürlichen Bewegung und einer beliebigen anderen Bewegung stützt, die willkürlich geleitet wird und nur dem Gesetz der Energie, sowie der Bedingung unterworfen ist, das System aus derselben anfänglichen in dieselbe Endconfiguration wie die natürliche Bewegung zu führen, geht Hamilton zu der Betrachtung der Variation der Wirkung in einer natürlichen oder ungeleiteten Bewegung des Systems über, die entsteht, wenn man die anfängliche und die Endconfiguration, sowie die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie variiren lässt. Das Resultat ist folgendes: —

322. Die Abnahme der Wirkung, genommen für die Einheit der Zunahme irgend einer der beliebig gewählten (allgemeinen) Coordinaten (§ 204), welche die anfängliche Configuration ausdrücken, ist gleich der entsprechenden (allgemeinen) Componente der Bewegungsgrösse [§ 313, (c)] der wirklichen Bewegung aus dieser Configuration; die Zunahme der Wirkung, genommen für die Einheit der Zunahme irgend einer der die Endconfiguration bestimmenden beliebigen Coordinaten ist gleich der entsprechenden Componente der Bewegungsgrösse der wirklichen Bewegung gegen diese zweite Configuration hin; endlich ist die Zunahme der Wirkung, genommen für die Einheit der Zunahme der constanten Summe der potentiellen und der kinetischen Energie, gleich der Zeit, welche die Bewegung dauert, deren Wirkung berechnet wird.

Dies zu beweisen, müssen wir in unserem früheren Ausdruck (9) für δA die auf die beiden äussersten Lagen bezüglichen Coordinaten variiren lassen; ferner haben wir anzunehmen, aus δT werde $\delta E - \delta V$, wo δE während der Bewegung eine Constante ist, und jede Reihe von Wegen und Geschwindigkeiten gehöre zu einer ungezwungenen Bewegung des Systems, unter welcher Voraussetzung die Gleichung (10) gültig bleibt. Es ist daher

$$\begin{aligned}(13)\qquad \delta A = &\{\Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)\} \\ &- [\Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)] + t\delta E.\end{aligned}$$

Wir setzen jetzt erstens voraus, die das System ausmachenden materiellen Punkte seien sämmtlich frei von Zwang, so dass (x, y, z) für jeden dieser Punkte drei unabhängig Veränderliche sind. Ausserdem bezeichnen wir der Deutlichkeit wegen mit (x_1', y_1', z_1') und (x_1, y_1, z_1) die Coordinaten des Massentheilchens m_1 in seiner anfänglichen und seiner Endlage und mit $(\dot{x}_1', \dot{y}_1', \dot{z}_1')$, $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ die Geschwindigkeitscomponenten dieses Theilchens in diesen Punkten. Dann erhalten wir aus dem Vorhergehenden nach der gewöhnlichen Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dA}{dx_1'} = -m_1\dot{x}_1', \quad \dfrac{dA}{dy_1'} = -m_1\dot{y}_1', \quad \dfrac{dA}{dz_1'} = -m_1\dot{z}_1', \text{ u. s. w.} \\ \dfrac{dA}{dx_1} = m_1\dot{x}_1, \quad \dfrac{dA}{dy_1} = m_1\dot{y}_1, \quad \dfrac{dA}{dz_1} = m_1\dot{z}_1, \text{ u. s. w.} \\ \text{und } \dfrac{dA}{dE} = t. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen haben wir vorauszusetzen, A sei als Function der anfänglichen und der Endcoordinaten ausgedrückt, was im Ganzen sechs Mal so viele unabhängig Veränderliche sind, als das System materielle Punkte enthält; dazu kommt noch eine weitere Veränderliche E, die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie.

Wenn die materiellen Punkte, aus denen das System besteht, nicht frei, sondern in irgend einer Weise mit einander verbunden sind, so dass sie entweder einen starren Körper oder eine beliebige Anzahl starrer Körper bilden, die frei oder verbunden sind, so könnten wir das System zwar immer noch als ein System freier Punkte ansehen, wenn wir ausser den einwirkenden Kräften auch noch diejenigen Kräfte in Rechnung zögen, die nothwendig sind, um die Erfüllung der Bedingungen des vorhandenen Zusammenhanges zu erzwingen. Aber. obschon diese Art, mit einem System in Verbindung stehender materieller Punkte zu verfahren, sehr einfach ist, soweit es sich bloss um das Gesetz der Energie handelt, so sind doch Lagrange's Methoden vorzuziehen, sowohl diejenige „der Bedingungsgleichungen", als auch die für unsere jetzigen Zwecke weit passendere Methode „der allgemeinen Coordinaten"; sie ersparen uns nämlich sehr mühselige Interpretationen, wenn die Verschiebungen materieller Punkte betrachtet werden sollen, die aus willkürlichen Variationen in der Configuration eines Systems herrühren.

Wir wollen demgemäss voraussetzen, für irgend eine besondere Configuration (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... gehe der Ausdruck

$$(15)\quad \begin{cases} m_1(\dot{x}_1\delta x_1 + \dot{y}_1\delta y_1 + \dot{z}_1\delta z_1) + \text{u. s. w.} \\ \text{über in } \xi\delta\psi + \eta\delta\varphi + \zeta\delta\vartheta + \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

wenn er durch die allgemeinen Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ ausgedrückt wird, deren Anzahl gleich der Anzahl der Freiheitsgrade in der Bewegung des Systems ist [§ 313, (c)].

Wenn man ebenso den Ausdruck für die kinetische Energie des Systems transformirt, so erhält man offenbar

$$(16)\quad \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \text{u. s. w.} = \tfrac{1}{2}(\xi \dot{\psi} + \eta \dot{\varphi} + \zeta \dot{\vartheta} + \text{u. s. w.}),$$

und daher sind ξ, η, ζ, u. s. w. diejenigen linearen Functionen der allgemeinen Geschwindigkeiten, welche wir die „allgemeinen Componenten der Bewegungsgrösse“ genannt haben, und welche, wenn die kinetische Energie T als eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten ausgedrückt ist (die Coefficienten dieser Function sind natürlich im Allgemeinen Functionen der Coordinaten ψ, φ, ϑ, u. s. w.), aus T durch die folgenden Formeln hergeleitet werden können:

$$(17)\quad \xi = \frac{dT}{d\dot{\psi}},\quad \eta = \frac{dT}{d\dot{\varphi}},\quad \zeta = \frac{dT}{d\dot{\vartheta}},\ \text{u. s. w.}$$

Werden also wieder accentuirte Buchstaben für die anfängliche und nicht accentuirte Buchstaben für die Endconfiguration des Systems genommen, so ist

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{dA}{d\psi'} = -\xi',\ \dfrac{dA}{d\varphi'} = -\eta',\ \dfrac{dA}{d\vartheta'} = -\zeta',\ \text{u. s. w.} \\ \dfrac{dA}{d\psi} = \xi,\ \dfrac{dA}{d\varphi} = \eta,\ \dfrac{dA}{d\vartheta} = \zeta,\ \text{u. s. w.} \\ \text{und, wie früher, } \dfrac{dA}{dE} = t. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (18), welche die Gleichungen (14) natürlich als einen besonderen Fall in sich schliessen, drücken in einer mathematischen Form das Princip der variirenden Wirkung aus, das wir oben in Worten angegeben haben.

Die Werthe der Bewegungsgrössen, welche in dieser Weise [(14) und (18)] durch die Differentialquotienten von A ausgedrückt werden, müssen natürlich der Gleichung der Energie genügen. Für den Fall freier materieller Punkte ist daher

$$(19)\quad \Sigma \frac{1}{m}\left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right) = 2(E - V),$$

$$(20)\quad \Sigma \frac{1}{m}\left(\frac{dA^2}{dx'^2} + \frac{dA^2}{dy'^2} + \frac{dA^2}{dz'^2}\right) = 2(E - V').$$

Für ein System von materiellen Punkten oder starren Körpern, die irgendwie mit einander verbunden sind, ist im Allgemeinen nach (16) und (18)

$$(21)\quad \dot{\psi}\frac{dA}{d\psi} + \dot{\varphi}\frac{dA}{d\varphi} + \dot{\vartheta}\frac{dA}{d\vartheta} + \text{u. s. w.} = 2(E - V),$$

$$(22)\quad \dot{\psi}'\frac{dA}{d\psi'} + \dot{\varphi}'\frac{dA}{d\varphi'} + \dot{\vartheta}'\frac{dA}{d\vartheta'} + \text{u. s. w.} = 2(E - V'),$$

wo $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. durch Auflösung der Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} (\psi,\psi)\,\dot{\psi} + (\psi,\varphi)\,\dot{\varphi} + (\psi,\vartheta)\,\dot{\vartheta} + \text{u. s. w.} = \xi = \dfrac{dA}{d\psi} \\ (\varphi,\psi)\,\dot{\psi} + (\varphi,\varphi)\,\dot{\varphi} + (\varphi,\vartheta)\,\dot{\vartheta} + \text{u. s. w.} = \eta = \dfrac{dA}{d\varphi} \\ \text{u. s. w. u. s. w.} \end{cases}$$

als lineare Functionen von $\frac{dA}{d\psi}, \frac{dA}{d\varphi}$, u. s. w., und ebenso $\dot{\psi}', \dot{\varphi}'$, u. s. w. durch Auflösung der Gleichungen

$$(24)\quad \begin{cases} (\psi',\psi')\,\dot{\psi}' + (\psi',\varphi')\,\dot{\varphi}' + (\psi',\vartheta')\,\dot{\vartheta}' + \text{u. s. w.} = \xi' = -\dfrac{dA}{d\psi'} \\ (\varphi',\psi')\,\dot{\psi}' + (\varphi',\varphi')\,\dot{\varphi}' + (\varphi',\vartheta')\,\dot{\vartheta}' + \text{u. s. w.} = \eta' = -\dfrac{dA}{d\varphi'} \\ \text{u. s. w. u. s. w.} \end{cases}$$

als lineare Functionen von $-\frac{dA}{d\psi'}, -\frac{dA}{d\varphi'}$, u. s. w. ausgedrückt werden können. Wir erinnern daran, dass (ψ, ψ), (ψ, φ), u. s. w. Functionen der bestimmenden Elemente ψ, φ, ϑ, u. s. w. sind, die nur von der kinematischen Natur des Coordinatensystems und keineswegs von dem dynamischen Problem abhängen, das uns jetzt beschäftigt; es sind nämlich die Coefficienten der halben Quadrate und der Producte der verallgemeinerten Geschwindigkeiten in dem Ausdruck für die kinetische Energie irgend einer Bewegung des Systems; die Functionen (ψ', ψ'), (ψ', φ'), u. s. w. sind aus ψ', φ', u. s. w. auf genau dieselbe Weise, wie (ψ, ψ), (ψ, φ), u. s. w. aus ψ, φ, u. s. w. gebildet, und A ist eine Function aller Elemente ψ, φ, u. s. w., ψ', φ', u. s. w. Danach ist das erste Glied von (21) eine quadratische Function von $\frac{dA}{d\psi}, \frac{dA}{d\varphi}$, u. s. w., deren Coefficienten bekannte Functionen von ψ, φ, u. s. w. sind, die nur von den kinematischen Beziehungen des Systems und von den Massen seiner Theile, aber durchaus nicht von den wirklichen Kräften oder Bewegungen abhängen; das zweite Glied ist eine Function der Coordinaten ψ, φ, u. s. w., die von den Kräften in dem dynamischen Problem und von einer Constanten abhängt, welche den gegebenen besonderen Werth der Summe der potentiellen und der kinetischen Energie in der wirklichen Bewegung ausdrückt. Aehnliches gilt von (22) in Beziehung auf ψ', φ', u. s. w.

Es ist bemerkenswerth, dass die eine für die Bewegung freier materieller Punkte gefundene partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades (19) oder die ihr äquivalente Gleichung (21) zur Bestimmung einer Function A genügt, die so beschaffen ist, dass die Gleichungen (14) oder (18) die Bewegungsgrössen in einer wirklichen Bewegung des den gegebenen Kräften unterworfenen Systems ausdrücken. Denn wenn wir zuerst die Annahme vollkommener Freiheit der Massenpunkte machen und die Gleichung (19) noch unter Hamilton's Voraussetzung differentiiren, dass A bloss durch die anfänglichen und die Endcoordinaten und die Summe E der potentiellen und der kinetischen Energie ausgedrückt ist, so erhalten wir

$$2\,\Sigma\frac{1}{m}\left(\frac{dA}{dx}\,\frac{d^2A}{dx_1\,dx} + \frac{dA}{dy}\,\frac{d^2A}{dx_1\,dy} + \frac{dA}{dz}\,\frac{d^2A}{dx_1\,dz}\right) = -\,2\,\frac{dV}{dx_1}.$$

Nach (14) ist aber

$$\frac{1}{m_1}\frac{dA}{dx_1} = \dot{x}_1, \ \frac{1}{m_1}\frac{dA}{dy_1} = \dot{y}_1, \text{ u. s. w.,}$$

folglich

$$\frac{d^2A}{dx_1^2} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dx_1}, \ \frac{d^2A}{dx_1\,dy_1} = m_1\frac{d\dot{y}_1}{dx_1} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dy_1}, \ \frac{d^2A}{dx_1\,dz_1} = m_1\frac{d\dot{z}_1}{dx_1} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dz_1},$$

$$\frac{d^2A}{dx_1\,dx_2} = m_2\frac{d\dot{x}_2}{dx_1} = m_1\frac{d\dot{x}_1}{dx_2}, \text{ u. s. w.}$$

Diese Formeln benutzen wir in der letzten Gleichung; zugleich lassen wir beiderseits den Factor 2 weg und schreiben die Glieder für zwei materielle Punkte vollständig hin, damit der Gebrauch des Zeichens Σ keine Verwirrung veranlasse; es ergiebt sich

$$(25) \qquad m_1\left(\dot{x}_1\frac{d\dot{x}_1}{dx_1} + \dot{y}_1\frac{d\dot{x}_1}{dy_1} + \dot{z}_1\frac{d\dot{x}_1}{dz_1} + \dot{x}_2\frac{d\dot{x}_1}{dx_2} + \dot{y}_2\frac{d\dot{x}_1}{dy_2} + \dot{z}_2\frac{d\dot{x}_1}{dz_2} + \text{u. s. w.}\right) = -\frac{dV}{dx_1}.$$

Wird jetzt das erste Glied mit dt multiplicirt, so erhalten wir offenbar die Aenderung des Werthes von $m_1\dot{x}_1$, welche dadurch entsteht, dass man, immer noch unter Hamilton's Voraussetzung, die Coordinaten aller Punkte (d. h. die Configuration des Systems) von den Werthen, die sie in irgend einem Augenblick haben, zu den Werthen variiren lässt, die sie zu einer dt späteren Zeit haben. Das mit dt multiplicirte erste Glied von (25) ist daher die Aenderung in dem Werthe von $m_1\dot{x}_1$, die in der natürlichen Bewegung von der Zeit t, wo die Configuration $(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots E)$ ist, bis zur Zeit $t + dt$ wirklich erfolgt. Dasselbe ist daher gleich $m_1\ddot{x}_1 dt$, und folglich geht (25) einfach in $m_1\ddot{x}_1 = -\frac{dV}{dx_1}$ über. Auf ähnliche Weise finden wir

$$m_1\ddot{y}_1 = -\frac{dV}{dy_1}, \ m_1\ddot{z}_1 = -\frac{dV}{dz_1}, \ m_2\ddot{x}_2 = -\frac{dV}{dx_2}, \text{ u. s. w.}$$

Dies sind aber [§ 293, (4)] die elementaren Differentialgleichungen der Bewegungen eines conservativen Systems, das aus freien materiellen Punkten besteht, die wechselseitig auf einander einwirken.

Wenn wir weiter x_1, y_1, z_1, x_2, u. s. w. als constant ansehen und genau dasselbe Verfahren in Beziehung auf x_1', y_1', z_1', x_2', u. s. w. anstellen, so erhalten wir genau dieselben Gleichungen zwischen den accentuirten Buchstaben; der einzige Unterschied besteht darin, dass $-A$ statt A erscheint. Wir finden schliesslich $m_1\ddot{x}_1' = \frac{dV'}{dx_1'}$ und folgern daraus, dass, wenn die Gleichung (20) erfüllt wird, die durch (14) dargestellte Bewegung eine natürliche Bewegung durch die Configuration $(x_1', y_1', z_1', x_2', \ldots)$ hindurch ist.

Wenn daher die Gleichungen (19) und (20) beide erfüllt werden, und wenn wir im Falle $x_1 = x_1'$, $y_1 = y_1'$, $z_1 = z_1'$, $x_2 = x_2'$, u. s. w. auch noch $\frac{dA}{dx_1} = -\frac{dA}{dx_1'}$, u. s. w. haben, so ist die durch (14) dargestellte

Bewegung eine natürliche Bewegung durch die beiden Configurationen $(x_1', y_1', z_1', x_2', \ldots)$ und $(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots)$ hindurch. Obgleich die Zeichen in den vorhergehenden Ausdrücken auf Grund der Voraussetzung festgesetzt sind, dass die Bewegung aus der ersteren in die zweite Configuration erfolgen solle, so kann sie offenbar auch von der zweiten zur ersteren vor sich gehen; denn welcher Weg auch eingeschlagen wird, die Bewegung im entgegengesetzten Sinne ist nach der allgemeinen Eigenschaft eines conservativen Systems gleichfalls eine natürliche Bewegung (§ 271).

Um dasselbe für ein conservatives System zu beweisen, das durch irgendwie mit einander verbundene materielle Punkte oder starre Körper gebildet wird, so erhalten wir erstens aus (18)

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{d\xi}{d\varphi}, \quad \frac{d\zeta}{d\psi} = \frac{d\xi}{d\vartheta}, \text{ u. s. w.,} \tag{26}$$

wo nach Hamilton's Princip vorausgesetzt wird, $\dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. und ξ, η, u. s. w. seien durch ψ, φ, u. s. w., ψ', φ', u. s. w. und die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie ausgedrückt. Wird unter derselben Voraussetzung die Gleichung (21) differentiirt, so folgt

$$\begin{aligned}\dot\psi\frac{d\xi}{d\psi} + \dot\varphi\frac{d\eta}{d\psi} + \dot\vartheta\frac{d\zeta}{d\psi} + \text{u. s. w.}\\ + \xi\frac{d\dot\psi}{d\psi} + \eta\frac{d\dot\varphi}{d\psi} + \zeta\frac{d\dot\vartheta}{d\psi} + \text{u. s. w.} = -2\frac{dV}{d\psi}.\end{aligned} \tag{27}$$

Nach (26) und nach den obigen Betrachtungen ist aber

$$\begin{aligned}\dot\psi\frac{d\xi}{d\psi} + \dot\varphi\frac{d\eta}{d\psi} + \dot\vartheta\frac{d\zeta}{d\psi} + \text{u. s. w.}\\ = \dot\psi\frac{d\xi}{d\psi} + \dot\varphi\frac{d\xi}{d\varphi} + \dot\vartheta\frac{d\xi}{d\vartheta} + \text{u. s. w.} = \dot\xi,\end{aligned} \tag{28}$$

wo $\dot\xi$ die für die Einheit der Zeit genommene Aenderung von ξ bezeichnet, die in der wirklichen Bewegung erfolgt.

Weiter haben wir

$$\begin{cases}\dfrac{d\dot\psi}{d\psi} = \dfrac{\partial\dot\psi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d\psi} + \dfrac{\partial\dot\psi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\psi} + \text{u. s. w.} + \dfrac{\partial\dot\psi}{d\psi},\\ \dfrac{d\dot\varphi}{d\psi} = \dfrac{\partial\dot\varphi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d\psi} + \dfrac{\partial\dot\varphi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\psi} + \text{u. s. w.} + \dfrac{\partial\dot\varphi}{d\psi},\\ \text{u. s. w. u. s. w.,}\end{cases} \tag{29}$$

wenn, wie in Hamilton's System der kanonischen Bewegungsgleichungen, vorausgesetzt wird, $\dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. seien als lineare Functionen von ξ, η, u. s. w. ausgedrückt, deren Coefficienten die Veränderlichen ψ, φ, ϑ, u. s. w. enthalten, und wenn wir uns des Buchstabens ∂ bedienen, um die partielle Differentiation dieser Functionen in Beziehung auf das System der als unabhängig angesehenen Veränderlichen $\xi, \eta, \ldots, \psi, \varphi, \ldots$ zu bezeichnen. Wir wollen die Coefficienten nach dem oben befolgten Verfahren mit $[\psi, \psi]$, u. s. w. bezeichnen, so dass wir, wenn

$$T = \tfrac{1}{2}\{[\psi,\psi]\xi^2 + [\varphi,\varphi]\eta^2 + \cdots + 2[\psi,\varphi]\xi\eta + \cdots\} \tag{30}$$

die Formel für die kinetische Energie ist,

$$(31)\quad \begin{cases} \dot\psi = \dfrac{\partial T}{d\xi} = [\psi,\psi]\,\xi + [\psi,\varphi]\,\eta + [\psi,\vartheta]\,\zeta + \text{u. s. w.} \\ \dot\varphi = \dfrac{\partial T}{d\eta} = [\varphi,\psi]\,\xi + [\varphi,\varphi]\,\eta + [\varphi,\vartheta]\,\zeta + \text{u. s. w.} \\ \text{u. s. w. u. s. w.} \end{cases}$$

erhalten, wo $[\psi, \varphi]$ und $[\varphi, \psi]$ natürlich denselben Werth haben. Es ergiebt sich dann

$$\frac{\partial\dot\psi}{d\xi} = [\psi,\psi],\ \frac{\partial\dot\varphi}{d\xi} = [\varphi,\psi], \ldots;$$

$$\frac{\partial\dot\psi}{d\psi} = \frac{d[\psi,\psi]}{d\psi}\xi + \frac{d[\psi,\varphi]}{d\psi}\eta + \text{u. s. w.};$$

$$\frac{\partial\dot\varphi}{d\psi} = \frac{d[\varphi,\psi]}{d\psi}\xi + \text{u. s. w., u. s. w.,}$$

folglich aus (29)

$$\xi\frac{d\dot\psi}{d\psi} + \eta\frac{d\dot\varphi}{d\psi} + \zeta\frac{d\dot\vartheta}{d\psi} + \text{u. s. w.} = \{[\psi,\psi]\,\xi + [\varphi,\psi]\,\eta + \text{u. s. w.}\}\frac{d\xi}{d\psi}$$
$$+ \{[\psi,\varphi]\,\xi + [\varphi,\varphi]\,\eta + \text{u. s. w.}\}\frac{d\eta}{d\psi} + \text{u. s. w.} + \frac{d[\psi,\psi]}{d\psi}\xi^2$$
$$+ \frac{d[\varphi,\varphi]}{d\psi}\eta^2 + \text{u. s. w.} + 2\frac{d[\psi,\varphi]}{d\psi}\xi\eta + \text{u. s. w.}$$
$$= \dot\psi\frac{d\xi}{d\psi} + \dot\varphi\frac{d\eta}{d\psi} + \cdots + 2\frac{\partial T}{d\psi},$$

und hieraus ersehen wir mit Rücksicht auf (28)

$$(32)\qquad \xi\frac{d\dot\psi}{d\psi} + \eta\frac{d\dot\varphi}{d\psi} + \zeta\frac{d\dot\vartheta}{d\psi} + \text{u. s. w.} = \dot\xi + 2\frac{\partial T}{d\psi}.$$

Die Gleichungen (32) und (28) reduciren das erste Glied von (27) auf $2\dot\xi + 2\dfrac{\partial T}{d\psi}$; wir erhalten daher durch Division mit 2

$$(33)\quad \dot\xi + \frac{\partial T}{d\psi} = -\frac{dV}{d\psi},\ \text{und ebenso}\ \dot\eta + \frac{\partial T}{d\varphi} = -\frac{dV}{d\varphi},\ \text{u. s. w.}$$

Die Anzahl dieser Differentialgleichungen ist so gross wie diejenige der Veränderlichen ψ, φ, u. s. w. Sie genügen, letztere durch t und ein zweimal so grosse Anzahl willkürlicher Constanten auszudrücken. Jede Lösung des dynamischen Problems genügt aber, wie wir oben gezeigt haben, den Gleichungen (21) und (23); sie muss daher auch diesen daraus hergeleiteten Gleichungen (33) genügen. Die Gleichungen (33) sind somit die Bewegungsgleichungen des auf allgemeine Coordinaten bezogenen Systems, deren Anzahl gleich derjenigen der Freiheitsgrade ist. Sie sind die Hamilton'schen expliciten Bewegungsgleichungen, für welche wir unten einen directen Beweis geben werden. Ganz wie oben erhellt folglich, dass, wenn (21) und (22) erfüllt sind, (18) eine natürliche Bewegung des Systems aus einer der beiden Configurationen $(\psi, \varphi, \vartheta, \ldots)$ $(\psi', \varphi', \vartheta', \ldots)$ in die andere ausdrückt. Wir erhalten also das folgende Resultat: —

323. Charakteristische Function. — Die Bestimmung der Bewegung eines beliebigen conservativen Systems aus einer Configuration in eine andere hängt, wenn die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie gegeben ist, von der Ermittelung einer einzigen Function der jene Configurationen bestimmenden Coordinaten ab. Diese Function wird durch zwei partielle Differentialgleichungen bestimmt, welche beziehungsweise für jede der beiden Coordinatenreihen quadratisch und von der ersten Ordnung sind, und deren entsprechende Glieder einzeln einander gleich werden, wenn die Werthe der beiden Coordinatenreihen übereinstimmen. Die auf diese Weise bestimmte und zur Ausdrückung der Lösung des kinetischen Problems angewandte Function ist von W. R. Hamilton, dem wir die Methode verdanken, die charakteristische Function genannt worden. Sie ist, wie wir gesehen haben, der Ausdruck für die „Wirkung" von einer der Configurationen zur anderen. Ihre Eigenthümlichkeit in Hamilton's System besteht darin, dass sie, wie oben dargelegt wurde, als eine Function der Coordinaten und einer Constanten, nämlich der ganzen Energie, ausgedrückt werden kann. Sie ist offenbar in Beziehung auf beide Configurationen symmetrisch, indem sie nur ihr Zeichen ändert, wenn deren Coordinaten vertauscht werden.

Charakteristische Gleichung der Bewegung. — Da nicht nur die vollständige Lösung des Bewegungsproblems eine Lösung A der partiellen Differentialgleichung (19) oder (21) liefert, sondern, wie wir eben [§ 322, (33), u. s. w.] gesehen haben, auch jede Lösung dieser Gleichung einem wirklichen Problem in Betreff der Bewegung entspricht, so wird es ein nicht gut zu übergehender Gegenstand der mathematischen Analysis, zu untersuchen, welchen Charakter von Vollständigkeit eine Lösung oder ein Integral der Differentialgleichung haben muss, damit sich aus ihm ein vollständiges Integral der dynamischen Gleichungen herleiten lasse. Diese Frage scheint zuerst Jacobi aufgestossen zu sein. Ein „vollständiges Integral" der Differentialgleichung nennt man einen Ausdruck

$$A = A_0 + F(\psi, \varphi, \vartheta, \ldots, \alpha, \beta, \ldots) \tag{34}$$

für A, welcher der Differentialgleichung genügt und ebenso viele, sagen wir i, unabhängige willkürliche Constanten $A_0, \alpha, \beta, \ldots$ enthält, als unabhängige Veränderliche ψ, φ, u. s. w. vorhanden sind. Ein solcher Ausdruck führt, wie Jacobi fand, zu einem vollständigen Endintegral der Bewegungsgleichungen, das folgendermaassen ausgedrückt ist: —

$$\frac{dF}{d\alpha} = \mathfrak{A},\ \frac{dF}{d\beta} = \mathfrak{B}, \ldots, \tag{35}$$

und, wie oben,

$$\frac{dF}{dE} = t + \varepsilon; \tag{36}$$

darin ist ε eine Constante, die von der Wahl des Augenblicks abhängt, in welchem man die Zeit zu zählen beginnt; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ sind $i - 1$ andere willkürliche Constanten, so dass im Ganzen, bei Hinzurechnung von $E, \alpha, \beta, \ldots$, sich die richtige Anzahl $2i$ willkürlicher Constanten ergiebt. Man erkennt dies, wenn man beachtet, dass (35) die Gleichungen des Laufs (oder, im Falle eines Systems freier materieller Punkte, der Wege) sind, was auf der Hand liegt. Denn diese Gleichungen liefern

$$(37) \quad \begin{cases} 0 = \frac{d}{d\psi}\frac{dF}{d\alpha}d\psi + \frac{d}{d\varphi}\frac{dF}{d\alpha}d\varphi + \frac{d}{d\vartheta}\frac{dF}{d\alpha}d\vartheta + \cdots \\ 0 = \frac{d}{d\psi}\frac{dF}{d\beta}d\psi + \frac{d}{d\varphi}\frac{dF}{d\beta}d\varphi + \frac{d}{d\vartheta}\frac{dF}{d\beta}d\vartheta + \cdots \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

was im Ganzen $i - 1$ Gleichungen sind, aus denen sich die Verhältnisse $d\psi : d\varphi : d\vartheta : \cdots$ bestimmen lassen. Hieraus und aus (21) folgt

$$(38) \quad \frac{d\psi}{\dot{\psi}} = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}} = \cdots$$

[denn (37) sind dieselben Gleichungen, wie diejenigen, welche wir erhalten, wenn wir (21) und (23) der Reihe nach in Beziehung auf $\alpha, \beta, \ldots$ differentiiren; nur enthalten sie $d\psi, d\varphi, d\vartheta, \ldots$ statt $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \ldots$].

Eine völlig allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung, d. h. ein Ausdruck für A, welcher jede Function von $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ enthält, die der Gleichung (21) genügen kann, lässt sich natürlich nach dem gewöhnlichen Verfahren aus dem vollständigen Integral (34) herleiten. Man hat aus demselben mittels einer willkürlichen Gleichung

$$f(A_0, \alpha, \beta, \ldots) = 0$$

und der $i - 1$ Gleichungen

$$\frac{1}{\frac{df}{dA_0}} = \frac{\frac{dF}{d\alpha}}{\frac{df}{d\alpha}} = \frac{\frac{dF}{d\beta}}{\frac{df}{d\beta}} = \cdots,$$

wo f eine willkürliche Function der jetzt von $\psi, \varphi, \ldots$ abhängig gemachten, also veränderlichen i Elemente $A_0, \alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet, $A_0, \alpha, \beta, \ldots$ zu eliminiren. Die volle Bedeutung der allgemeinen Lösung von (21) wird aber in Verbindung mit dem physikalischen Problem besser verstanden werden, wenn wir erst zur Hamilton'schen Lösung zurückgehen, und uns von dieser zur allgemeinen wenden. Wir wollen daher erstens annehmen, die Gleichungen (35) des Weges werden für jede von zwei Coordinatenreihen $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ und $\psi', \varphi', \vartheta', \ldots$ befriedigt. Sie werden $2(i - 1)$ Gleichungen liefern, durch welche, damit die angegebenen Bedingungen erfüllt seien, die $2(i - 1)$ Constanten $\alpha, \beta, \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ als Functionen von $\psi, \varphi, \ldots, \psi', \varphi', \ldots$ ausgedrückt werden. Benutzt man die auf diese Weise gefundenen Werthe von $\alpha, \beta, \ldots$ und bestimmt A_0 so, dass A für $\psi = \psi'$, $\varphi = \varphi'$, u. s. w. verschwindet, so erhält man den Hamilton'schen Ausdruck für A, nämlich A als Function von $\psi, \varphi, \ldots, \psi', \varphi', \ldots$ und E; dieser Ausdruck ist somit einem „vollständigen Inte-

gral" der partiellen Differentialgleichung (21) äquivalent. Es seien jetzt $\psi', \varphi', \dots$ durch eine einzelne willkürliche Gleichung

$$f(\psi', \varphi', \dots) = 0 \tag{39}$$

verbunden, und es mögen mittels dieser Gleichung und der nachstehenden Gleichungen (40) die Werthe von $\psi', \varphi', \dots$ durch $\psi, \varphi, \dots$ und E ausgedrückt werden: —

$$\left\{\frac{\frac{dA}{d\psi'}}{\frac{df}{d\psi'}} = \frac{\frac{dA}{d\varphi'}}{\frac{df}{d\varphi'}} = \frac{\frac{dA}{d\vartheta'}}{\frac{df}{d\vartheta'}} = \text{u. s. w.}\right. \tag{40}$$

Wenn man die auf diese Weise für $\psi', \varphi', \vartheta'$, u. s. w. gefundenen Werthe in den Hamilton'schen Ausdruck für A substituirt, so erhält man einen Ausdruck für A, welcher die allgemeine Lösung von (21) ist. Denn die Gleichungen (40) drücken, wie unmittelbar ersichtlich ist, aus, dass die Werthe von A für alle der Gleichung (39) genügenden Configurationen gleich sind, d. h. wir haben

$$\frac{dA}{d\psi'}d\psi' + \frac{dA}{d\varphi'}d\varphi' + \cdots = 0,$$

wenn ψ', φ', u. s. w. den Gleichungen (39) und (40) genügen. Wenn also $\psi', \varphi', \dots$ vermittels dieser Gleichungen aus dem Hamilton'schen Ausdrucke für A eliminirt werden, so wird das vollständige Hamilton'sche Differential

$$dA = \left(\frac{dA}{d\psi}\right)d\psi + \left(\frac{dA}{d\varphi}\right)d\varphi + \cdots + \frac{dA}{d\psi'}d\psi' + \frac{dA}{d\varphi'}d\varphi' + \cdots \tag{41}$$

einfach

$$dA = \left(\frac{dA}{d\psi}\right)d\psi + \left(\frac{dA}{d\varphi}\right)d\varphi + \cdots, \tag{42}$$

wo $\left(\frac{dA}{d\psi}\right)$, u. s. w. die Differentialquotienten in dem Hamilton'schen Ausdruck bezeichnen, zum Unterschiede von denjenigen, die durch Differentiation von (34) erhalten werden, und die wir jetzt einfach mit $\frac{dA}{d\psi}, \frac{dA}{d\varphi}$, u. s. w. bezeichnen. Da jetzt A eine Function von $\psi, \varphi, \cdots$ ist, sowohl insofern diese Grössen in dem Hamilton'schen Ausdruck schon vorhanden waren, als auch durch die Elimination von ψ', φ', u. s. w. noch weiter eingeführt sind, so haben wir

$$\frac{dA}{d\psi} = \left(\frac{dA}{d\psi}\right), \ \frac{dA}{d\varphi} = \left(\frac{dA}{d\varphi}\right), \text{ u. s. w.,} \tag{43}$$

und daher genügt der neue Ausdruck der partiellen Differentialgleichung (21). Er ist auch eine völlig allgemeine Lösung; das ersehen wir daraus, dass er die Bedingung erfüllt, dass die „Wirkung" für alle einer völlig willkürlichen Gleichung (39) genügenden Configurationen dieselbe ist.

Für den Fall eines einzelnen freien materiellen Punktes hat (39) die Bedeutung, dass der Punkt (x', y', z') auf einer willkürlichen Oberfläche liegt, und (40) sagt aus, dass jede Bewegungslinie diese Oberfläche unter rechten Winkeln schneidet. Hieraus folgt: —

324. Die allgemeinste mögliche Lösung der quadratischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, von welcher Hamilton zeigte, dass sie durch seine charakteristische Function befriedigt wird (wenn eine der beiden Endconfigurationen allein variirt), drückt, wenn man sie für den Fall eines einzigen freien materiellen Punktes interpretirt, die Wirkung bis zu irgend einem Punkte (x, y, z) von einem Punkte einer gewissen willkürlich gegebenen Oberfläche aus, von welcher der materielle Punkt in der Richtung der Normalen und mit einer solchen Geschwindigkeit fortgeschleudert worden ist, dass die Summe seiner potentiellen und seiner kinetischen Energie einen gegebenen Werth hat. Mit anderen Worten, das durch die allgemeinste Lösung jener partiellen Differentialgleichung gelöste physikalische Problem ist folgendes: —

Eigenschaften der Oberflächen gleicher Wirkung. — Es mögen freie materielle Punkte, die keinen Einfluss auf einander ausüben, aus allen Punkten einer gewissen willkürlich gegebenen Oberfläche in den Richtungen der Normalen fortgeschleudert werden, jeder mit einer solchen Geschwindigkeit, dass die Summe seiner potentiellen und seiner kinetischen Energie einen gegebenen Werth hat. Man soll für den durch (x, y, z) gehenden materiellen Punkt die „Wirkung" in seinem Lauf von jener Oberfläche bis zu diesem Punkte (x, y, z) bestimmen. Die oben ausgesprochenen Hamilton'schen Principien zeigen, dass die Oberflächen gleicher Wirkung die Wege der materiellen Punkte unter rechten Winkeln schneiden; sie liefern auch die folgenden bemerkenswerthen Eigenschaften der Bewegung: —

Wenn man von allen Punkten einer willkürlichen Oberfläche aus materielle Punkte, die keinen Einfluss auf einander ausüben, mit geeigneten Geschwindigkeiten in den Richtungen der Normalen fortschleudert, so liegen die Punkte, die sie mit gleichen Wirkungen erreichen, auf einer Oberfläche, welche die Wege unter rechten Winkeln schneidet. Die unendlich kleine Dicke des Raumes zwischen irgend zweien solchen Oberflächen, welche Wirkungen entsprechen, deren Grössen sich unendlich wenig unterscheiden, ist der Geschwindigkeit des hindurchgehenden materiellen Punktes umgekehrt proportional, insofern sie gleich der unendlich kleinen Wirkungsdifferenz, dividirt durch die ganze Bewegungsgrösse des materiellen Punktes ist.

Es seien λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normalen an die durch (x, y, z) gehende Oberfläche gleicher Wirkung. Dann haben wir

$$(1) \qquad \lambda = \frac{\frac{dA}{dx}}{\left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right)^{1/2}}, \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber $\frac{dA}{dx} = m\dot{x}$, u. s. w., und wenn q die Geschwindigkeitsresultante bezeichnet,

$$(2) \qquad mq = \left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right)^{1/2}.$$

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{\dot{x}}{q}, \ \mu = \frac{\dot{y}}{q}, \ \nu = \frac{\dot{z}}{q},$$

und diese Ausdrücke beweisen den ersteren Satz. Bezeichnet weiter δA die unendlich kleine Zunahme der Wirkung vom Punkte (x, y, z) bis zum Punkte $(x + \delta x, \ y + \delta y, \ z + \delta z)$, so ist

$$\delta A = \frac{dA}{dx}\delta x + \frac{dA}{dy}\delta y + \frac{dA}{dz}\delta z.$$

Liegt nun der zweite Punkt in einer unendlich kleinen Entfernung e von dem ersteren in der Richtung der Normalen an die Oberfläche gleicher Wirkung, d. h. ist

$$\delta x = e\lambda, \ \delta y = e\mu, \ \delta z = e\nu,$$

so geht der vorhergehende Ausdruck mit Rücksicht auf (1) über in

$$(3) \qquad \delta A = e\left(\frac{dA^2}{dx^2} + \frac{dA^2}{dy^2} + \frac{dA^2}{dz^2}\right)^{1/2},$$

und hieraus folgt wegen (2)

$$(4) \qquad e = \frac{\delta A}{mq},$$

welche Formel den zweiten Satz ausdrückt.

325. Beispiele variirender Wirkung. — Wir wollen hier nicht auf die Methoden eingehen, nach denen die „charakteristische Function" in kinetischen Problemen bestimmt wird. Aber die Thatsache, dass jeder beliebige Bewegungsfall vermittels einer einzigen Function auf die in § 323 dargelegte Weise dargestellt werden kann, ist an sich schon sehr bemerkenswerth und führt, geometrisch interpretirt, zu äusserst wichtigen und interessanten Eigenschaften der Bewegung, die in verschiedenen Zweigen der Physik schätzbare Anwendungen finden. Eine von den vielen Anwendungen des allgemeinen Princips, welche Hamilton machte, führte ihn zu einer

allgemeinen Theorie der optischen Instrumente, welche deren Gesammtheit in einen Ausdruck zusammenfasst *).

Einige der directesten Anwendungen auf die Bewegungen der als freie Punkte angesehenen Planeten, Cometen, u. s. w. und auf das berühmte, unter dem Namen „Problem der drei Körper" bekannte Perturbationsproblem sind von Hamilton (Phil. Trans., 1834 bis 1835) und von Jacobi, Liouville, Bour, Donkin, Cayley, Boole, u. s. w. in verschiedenen Abhandlungen eingehend ausgearbeitet worden. Auch die jetzt aufgegebene, aber immer noch interessante Emanationstheorie des Lichts liefert eine Menge guter Anwendungen. Diese Theorie setzt voraus, das Licht bestehe aus materiellen Punkten, die keine Wirkung auf einander ausüben, aber seitens der Theile der ponderabeln Körper Molekularkräften unterworfen sind, welche in wahrnehmbaren Abständen unwahrnehmbar sind und daher keine Abweichung von der gleichförmigen geradlinigen Bewegung in einem homogenen Medium verursachen, ausser wenn der Abstand von der Grenzfläche desselben unendlich klein ist. Die Gesetze der Reflexion und der einfachen Brechung ergeben sich in aller Strenge aus dieser Hypothese, die somit für die sogenannte geometrische Optik völlig ausreichend ist.

Wir hoffen, bei der Behandlung der Optik zu diesem Gegenstande zurückzukehren und ihn mit hinreichender Ausführlichkeit zu erörtern. Für jetzt begnügen wir uns damit, einen Satz anzugeben, welcher die bekannte Regel zur Messung der vergrössernden Wirkung eines Mikroskops oder eines Teleskops (Vergleichung des Durchmessers des Objectivglases mit dem Durchmeser des Büschels paralleler Strahlen, welche aus dem Ocular austreten, wenn ein leuchtender Punkt in grosser Entfernung vor das Objectivglas gesetzt ist) als einen besonderen Fall in sich schliesst.

326. Anwendung auf die Kinetik eines einzelnen materiellen Punktes. — Es werde eine beliebige Anzahl anziehender oder abstossender Massen, oder vollkommen glatter elastischer Gegenstände im Raume festgelegt. Ferner werden zwei Stationen O und O' gewählt, und mit einer festgesetzten Geschwindigkeit V ein Schuss von O in einer solchen Richtung abgeschossen, dass er durch O' geht. Offenbar kann es mehr als einen natürlichen Weg geben, auf welchem dies geschehen kann; wenn aber ein solcher Pfad einmal gewählt ist, so lässt sich im Allgemeinen kein anderer finden, der nicht merklich von dem gewählten abwiche, und jede unendlich kleine Abweichung in

*) On the Theory of Systems of Rays. Trans. R. I. A. 1824, 1830, 1832.

der Linie, in der man von O aus schiesst, wird bewirken, dass die Kugel nicht mehr O' trifft, sondern unendlich nahe an O' vorbeigeht. Es werde nun um O als Mittelpunkt mit unendlich kleinem Radius r ein Kreis beschrieben, in einer zu der Richtung, in der von O aus geschossen wird, senkrechten Ebene. Von allen Punkten dieses Kreises mögen Kugeln abgeschossen werden mit unendlich wenig verschiedener Geschwindigkeit, aber so, dass die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie bei jedem Schusse gleich derjenigen des von O ausgehenden Schusses ist; alle Kugeln sollen ferner der Richtung des letzteren Schusses nahezu parallel, aber gerade so gerichtet sein, dass eine jede genau durch O' geht. Jenseit O', in einer unendlich kleinen Entfernung a' von O', wird eine Scheibe gehalten, so dass ihre Ebene senkrecht zu der Richtung des Schusses ist, welcher sie von O aus erreicht. Die von dem Umfange des um O beschriebenen Kreises abgeschossenen Kugeln werden, nachdem sie durch O' hindurchgegangen sind, die Scheibe in dem Umfange einer äusserst kleinen Ellipse treffen, eine jede mit einer (natürlich ihrer Lage nach dem Gesetz der Energie entsprechenden) Geschwindigkeit, welche von der Geschwindigkeit V', mit der sie sämmtlich durch O' gehen, unendlich wenig verschieden ist. Wird nun um O' in einer Ebene, welche senkrecht auf dem durch O' gehenden Centralweg steht, ein dem früheren gleicher Kreis beschrieben, und werden von den Punkten des Umfanges dieses Kreises Kugeln abgeschossen, jede mit der erforderlichen Geschwindigkeit und in einer solchen, dem Centralweg nahezu parallelen Richtung, dass sie genau durch O geht, so werden diese Kugeln eine jenseit O in der Entfernung $a = a'\frac{V}{V'}$ gehaltene Scheibe, auf die sie senkrecht stossen, längs des Umfangs einer Ellipse treffen, welche der früheren gleich ist und eine entsprechende Lage hat, und die von den einzelnen Kugeln getroffenen Punkte werden in der folgenden Weise einander entsprechen: Es seien P und P' Punkte des ersten und des zweiten Kreises, Q und Q' die Punkte der ersten und der zweiten Scheibe, welche die von P und P' ausgehenden Kugeln treffen. Liegt dann P' in einer Ebene, welche den durch O' gehenden Centralweg und die Lage enthält, die Q annehmen würde, wenn man die Ellipse, der dieser Punkt angehört, durch eine reine Deformation (§ 183) in einen Kreis verwandelte, so sind Q und Q' auf beiden Ellipsen ähnlich gelegen.

Es sei nämlich XOY die auf dem Centralweg senkrechte Ebene durch O und $X'O'Y'$ die entsprechende Ebene durch O'. Ferner sei

A die „Wirkung" von O nach O', und φ die Wirkung von einem in de Nähe von O gelegenen Punkte P, der in Beziehung auf die erstere Coordinatenaxen die Coordinaten x, y, z hat, bis zu einem in der Nähe vo O' liegenden Punkte P', dessen Coordinaten in Beziehung auf das zweit Axensystem x', y', z' sind.

Die Function $\varphi - A$ verschwindet natürlich, wenn $x = 0$, $y = 0$ $z = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ ist. Für dieselben Coordinatenwerth müssen auch ihre Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ und $\frac{d\varphi}{dx'}$, $\frac{d\varphi}{dy'}$ ver schwinden und $\frac{d\varphi}{dz}$, $-\frac{d\varphi}{dz'}$ beziehungsweise gleich V und V' sein. Denn für alle Werthe der Coordinaten sind $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{d\varphi}{dy}$ die den beiden Richtunge OX und OY parallelen Geschwindigkeitscomponenten des durch P' gehende materiellen Punktes, zur Zeit, wo derselbe aus P austritt, und $-\frac{d\varphi}{dx'}$ $-\frac{d\varphi}{dy'}$ sind die OX', OY' parallelen Componenten der Geschwindigkeit welche durch P' in einer solchen Richtung erfolgt, dass P erreicht wird. Wi erhalten daher mittels des Taylor'schen (oder Maclaurin'schen) Satze

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\varphi - A = -V'z' + Vz\\ &+ \tfrac{1}{2}\{(X,X)x^2 + (Y,Y)y^2 + \cdots + (X',X')x'^2 + \cdots\\ &+ 2(Y,Z)yz + \cdots + 2(Y',Z')y'z' + \cdots\\ &+ 2(X,X')xx' + 2(Y,Y')yy' + 2(Z,Z')zz'\\ &+ 2(X,Y')xy' + 2(X,Z')xz' + \cdots + 2(Z,Y')zy'\} + R,\end{aligned}\right.$$

worin (X,X), (X,Y), u. s. w. Constanten bezeichnen, nämlich die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, u. s. w., wenn jede der sechs Coordinaten x, y, z, x', y', z' verschwindet; R bezeichnet den Rest der Reihe, von den Gliedern zweiten Grades an. Nach Cauchy's Principien über die Convergenz der Taylor'schen Reihe erhalten wir einen streng richtigen Ausdruck von derselben Form für $\varphi - A$, welcher keinen Rest R enthält, wenn wir die Coefficienten (X,X), u. s. w. die Werthe bezeichnen lassen, welche die Differentialquotienten annehmen, wenn für die Elemente x, y, u. s. w. gewisse veränderliche Werthe substituirt werden, die zwischen 0 und den wirklichen Werthen von x, y, u. s. w. liegen. Vorausgesetzt also, dass die Differentialquotienten für unendlich kleine Werthe der Coordinaten nahezu dieselben sind, wie für verschwindende Werthe der Coordinaten, so wird R unendlich kleiner als die vorhergehenden Glieder, wenn jede der Grössen x, y, u. s. w. unendlich klein ist. Wir können folglich, wenn jede der Veränderlichen x, y, z, x', y', z' unendlich klein ist, in dem Ausdruck (1) von $\varphi - A$ den Rest R unterdrücken. Nun wollen wir, wie in dem zu erweisenden Satze, voraussetzen, z sowohl wie z' seien in aller Strenge gleich Null. Dann erhalten wir

$$\frac{d\varphi}{dx} = (X,X)x + (X,Y)y + (X,X')x' + (X,Y')y',$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = (Y,Y)y + (Y,X)x + (Y,X')x' + (Y,Y')y'$$

Wenn wir in diesen Ausdrücken $x = 0$ und $y = 0$ machen, so werden sie die OX und OY parallelen Geschwindigkeitscomponenten eines durch O gehenden, aus P' geworfenen materiellen Punktes. Bezeichnen also ξ, η, ζ die Coordinaten dieses Punktes, eine unendlich kleine Zeit, $\frac{a}{V}$, nachdem er durch O gegangen, so haben wir $\zeta = a$ und

$$2) \quad \xi = \{(X,X')\,x' + (X,Y')\,y'\}\,\frac{a}{V},\ \eta = \{(Y,X')\,x' + (Y,Y')\,y'\}\,\frac{a}{V}\cdot$$

Hier sind ξ und η die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes Q', in welchem die Scheibe im zweiten Falle getroffen wird, und nach der Voraussetzung ist

$$3) \qquad x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen x', y', so erhält man offenbar die Gleichung einer Ellipse, und die beiden ersteren Gleichungen drücken die Beziehung der „entsprechenden" Punkte aus. Entsprechende Gleichungen mit x und y statt x' und y', mit ξ', η' statt ξ, η, und mit (X,X'), $-(Y,X')$, $-(X,Y')$, $-(Y,Y')$ statt (X,X'), (X,Y'), (Y,X'), (Y,Y') drücken den ersteren Fall aus. Daraus ergiebt sich unser Satz, wie man am leichtesten sieht, wenn man OX und $O'X'$ so wählt, dass eine der Grössen (X,Y') und (Y,X') Null ist.

327. Anwendung auf die elementare Optik. — Die einleuchtendste optische Anwendung dieses bemerkenswerthen Resultates ist folgende: Wenn beim Gebrauch irgend eines optischen Apparats das Auge und das Object ihre Plätze vertauschen, während die Lage des Instruments dieselbe bleibt, so bleibt auch die vergrössernde Wirkung unverändert. Man versteht dies leicht in den Fällen, in welchen das Instrument in Beziehung auf eine Axe symmetrisch ist, wie beim gewöhnlichen Teleskop, beim Mikroskop, beim Opernglas (Galiläi'schen Teleskop). In auffallendem Gegensatz dazu scheint die allbekannte Thatsache zu stehen, dass ein Teleskop „verkleinert", wenn man das verkehrte Ende vor das Auge hält. Diese Thatsache ist allerdings richtig, wenn das Teleskop einfach um die Mitte seiner Länge herumgedreht wird, während Auge und Object ihre Plätze beibehalten. Wird aber das Teleskop vom Auge fortgerückt, bis das Ocularglas dem Objecte nahe gekommen ist, so wird man den sichtbaren Theil des Objects ebenso stark vergrössert erblicken, wie wenn das Teleskop in der gewöhnlichen Weise gehalten würde. Man kann dies leicht dadurch bewahrheiten, dass man aus einer Entfernung von einigen Fuss durch das Objectiv eines Opernglases auf das Auge einer zweiten Person blickt, welche das Instrument in der gewöhnlichen Weise vor ihr Auge hält.

Die allgemeinere Anwendung kann in folgender Weise erläutert werden: — Es seien die Punkte O, O' (die Mittelpunkte der in § 326

beschriebenen beiden Kreise) die optischen Mittelpunkte der Augen zweier Personen, welche durch irgend eine zwischen ihnen angebrachte Reihe von Linsen, Prismen oder durchsichtigen Mitteln einander ansehen. Wenn ihre Pupillen in Wirklichkeit gleiche Grössen haben, so werden sie von den beiden Beobachtern als ähnliche Ellipsen von gleichen scheinbaren Dimensionen gesehen werden. Hier nehmen die nach der Emanationstheorie vorausgesetzten Lichttheilchen, die von dem Umfange der Pupille eines Auges fortgeschleudert werden, die Stelle der von dem Umfange eines Kreises fortgeschleuderten materiellen Punkte ein, und die Retina des zweiten Auges ist für die diese Punkte aufnehmende Scheibe gesetzt, die wir in dem allgemeinen kinetischen Ausspruch des Satzes benutzt haben.

328. **Anwendung auf ein System freier, in Wechselwirkung stehender materieller Punkte.** — Wenn wir statt eines freien materiellen Punktes ein conservatives System einer beliebigen Anzahl freier, in Wechselwirkung stehender materieller Punkte haben, so lässt sich derselbe Ausspruch in Beziehung auf die anfängliche Lage eines der Punkte und auf die Endlage eines anderen Punktes, oder in Beziehung auf die anfänglichen oder auf die Endlagen zweier Punkte anwenden. Er dient dazu, zu zeigen, wie der Einfluss, den eine unendlich kleine Aenderung in einer dieser Lagen auf die Richtung des durch die andere Lage hindurchgehenden materiellen Punktes ausübt, sich verhält zu dem durch eine unendlich kleine Aenderung in der letzteren Lage hervorgebrachten Einfluss auf die Richtung des ersteren materiellen Punktes, wenn dieser durch die erstere Lage hindurchgeht. Es lässt sich natürlich ein entsprechender Satz in Ausdrücken allgemeiner Coordinaten geben, der für ein System starrer Körper oder materieller Punkte passt, die auf irgend eine Weise verbunden sind. Alle solche Aussprüche sind in dem folgenden ganz allgemeinen Satze enthalten: —

Die Zunahme irgend einer einer beliebigen Coordinate entsprechenden Bewegungsgrössencomponente, genommen für die Einheit der Zunahme einer beliebigen anderen Coordinate, ist gleich der Zunahme der Bewegungsgrössencomponente, welche der letzteren Coordinate entspricht, genommen für die Einheit der Zunahme der ersteren Coordinate, wenn die beiden gewählten Coordinaten einer Configuration des Systems angehören, oder aber genommen für die Einheit der Abnahme der ersteren Coordinate, wenn eine der gewählten Coordinaten der anfänglichen, die andere der Endconfiguration des Systems angehört.

Es seien ψ und χ zwei von den Coordinaten, welche das Argument der Hamilton'schen charakteristischen Function A ausmachen, und ξ, η die entsprechenden Bewegungsgrössen. Dann haben wir [§ 322, (18)]

$$\frac{dA}{d\psi} = \pm \xi, \; \frac{dA}{d\chi} = \pm \eta,$$

wo die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem eine anfängliche, oder eine Endcoordinate in Rede steht. Daraus folgt

$$\frac{d^2 A}{d\psi\, d\chi} = \pm \frac{d\xi}{d\chi} = \pm \frac{d\eta}{d\psi};$$

es ist also

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{d\eta}{d\psi},$$

wenn beide Coordinaten einer Configuration angehören, oder

$$\frac{d\xi}{d\chi} = -\frac{d\eta}{d\psi},$$

wenn eine Coordinate der anfänglichen, die andere der Endconfiguration angehört, was der zweite Satz ist. Die geometrische Interpretation dieses Satzes für den Fall eines freien materiellen Punktes und zweier Coordinaten, welche beide einer Lage, z. B. seiner Endlage angehören, liefert bloss den oben (§ 324) mitgetheilten Satz für den Fall, dass materielle Punkte von einem Punkte aus mit gleichen Geschwindigkeiten nach allen Richtungen hin fortgeschleudert werden; mit anderen Worten, sie liefert jenen Satz für den Fall, dass die in demselben benutzte willkürliche Oberfläche sich auf einen Punkt reducirt. Zur Vervollständigung der Reihe der aus § 322 hergeleiteten Variationsgleichungen haben wir noch

$$\frac{dt}{d\chi} = \pm \frac{d\eta}{dE},$$

was eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft der conservativen Bewegung ausdrückt.

329. Lagrange's allgemeine Form der Bewegungsgleichungen. — Wir haben schon (§ 293) Lagrange's allgemeine Form der Bewegungsgleichungen erwähnt und dieselben in der von Hamilton gegebenen Form [§ 322 (33)] bewiesen. Wir wollen die allgemeine Form jetzt direct mittheilen und auf einige Beispiele anwenden.

Wie oben (§ 293) haben wir allgemein als die unbestimmte Bewegungsgleichung

$$(1) \qquad \Sigma[(X - m\ddot{x})\,\delta x + \cdots] = 0.$$

Sehen wir jetzt $x_1, y_1, z_1, \ldots$ als explicit durch die allgemeinen Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ ausgedrückt an, so folgt

$$(2) \qquad \delta x = \frac{dx}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\varphi}\delta\varphi + \cdots$$

Die Gleichung (1) geht mit Rücksicht hierauf über in

$$\Sigma\left[(X - m\ddot{x})\left(\frac{dx}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\varphi}\delta\varphi + \cdots\right)\right] = 0, \tag{3}$$

und da $\delta\psi, \delta\varphi, \ldots$ völlig unabhängig von einander sind, so ergiebt sich

$$\begin{cases} \Sigma(X - m\ddot{x})\dfrac{dx}{d\psi} = 0 \\ \Sigma(X - m\ddot{x})\dfrac{dx}{d\varphi} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{4}$$

Dies sind die **bestimmten** Bewegungsgleichungen. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der unabhängigen Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$, und wir können aus ihnen $x, y, \ldots$ durch ihre expliciten Ausdrücke in $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ eliminiren.

Um die schöne Formel zu beweisen, welche **Lagrange** als das Resultat dieser Elimination gegeben hat, bemerken wir erstens, dass [§ 313 (b) (6)]

$$\begin{cases} \Sigma\left(X\dfrac{dx}{d\psi} + Y\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) = \Psi \\ \Sigma\left(X\dfrac{dx}{d\varphi} + Y\dfrac{dy}{d\varphi} + \cdots\right) = \Phi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{5}$$

ist, wo $\Psi, \Phi, \ldots$ die allgemeinen Componenten des Systems der äusseren Kräfte $X, Y, \ldots$ bezeichnen, und dass folglich, wenn $\xi, \eta, \ldots$ die allgemeinen Componenten der Bewegungsgrösse bezeichnen (da die Transformation der Componenten der Bewegungsgrössen mittels derselben Formeln wie die Transformation der Kräftecomponenten ausgeführt wird)

$$\begin{cases} \xi = \Sigma m\left(\dot{x}\dfrac{dx}{d\psi} + \dot{y}\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) \\ \eta = \Sigma m\left(\dot{x}\dfrac{dx}{d\varphi} + \dot{y}\dfrac{dy}{d\varphi} + \cdots\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{6}$$

sein muss, welche Formeln unmittelbar durch § 313, (a) (1) u. (c) (7) bewahrheitet werden.

Werden die Formeln (5) in (4) substituirt, so erhält man

$$\begin{cases} \Sigma m\left(\ddot{x}\dfrac{dx}{d\psi} + \ddot{y}\dfrac{dy}{d\psi} + \cdots\right) = \Psi \\ \Sigma m\left(\ddot{x}\dfrac{dx}{d\varphi} + \ddot{y}\dfrac{dy}{d\varphi} + \cdots\right) = \Phi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{7}$$

eine wichtige und bedeutungsvolle Form der bestimmten Bewegungsgleichungen, die sich auf folgende Weise auf eine Form bringen lässt, welche **Lagrange**'s Form enthält: —

Durch Differentiation von (6) ergiebt sich

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Sigma m\left(\ddot{x}\frac{dx}{d\psi} + \ddot{y}\frac{dy}{d\psi} + \cdots + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{dx}{d\psi} + \dot{y}\frac{d}{dt}\frac{dy}{d\psi} + \cdots\right) \\ \frac{d\eta}{dt} = \text{u. s. w.} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nun ist [vergleiche (2)]

$$(9)\quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{d\psi}\dot{\psi} + \frac{dx}{d\varphi}\dot{\varphi} + \cdots \\ \dot{y} = \frac{dy}{d\psi}\dot{\psi} + \frac{dy}{d\varphi}\dot{\varphi} + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

und auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{d\psi}\right) = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{dx}{d\psi}\right)\dot{\psi} + \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dx}{d\psi}\right)\dot{\varphi} + \cdots \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{d\psi}\right) = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{dy}{d\psi}\right)\dot{\psi} + \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dy}{d\psi}\right)\dot{\varphi} + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die zweiten Glieder dieser Gleichungen sind aber, da

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dx}{d\psi}\right) = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{dx}{d\varphi}\right), \text{ u. s. w.}$$

ist, nach (9) gleich

$$\frac{d\dot{x}}{d\psi}, \ \frac{d\dot{y}}{d\psi}, \text{ u. s. w.},$$

wenn $\frac{d}{d\psi}$ eine unter der Voraussetzung vollzogene Differentiation bezeichnet, dass $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ Constanten und $\psi, \varphi, \ldots$ die unabhängig Veränderlichen sind.

Die Formeln (8) gehen somit über in

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Sigma m\left(\ddot{x}\frac{dx}{d\psi} + \ddot{y}\frac{dy}{d\psi} + \cdots\right) + \Sigma m\left(\dot{x}\frac{d\dot{x}}{d\psi} + \dot{y}\frac{d\dot{y}}{d\psi} + \cdots\right) \\ \frac{d\eta}{dt} = \text{u. s. w.} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Werden diese Werthe in (7) substituirt und wie gewöhnlich

$$(12)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T$$

gesetzt, so folgt

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} - \frac{dT}{d\psi} = \Psi \\ \frac{d\eta}{dt} - \frac{dT}{d\varphi} = \Phi \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Wenn man endlich in (12) $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ durch die in (9) gegebenen Werthe ersetzt, so erhält man T in Form einer homogenen quadratischen Function von $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$, deren Coefficienten Functionen von $\psi, \varphi, \ldots$ sind. Wird diese Function unter der Voraussetzung differentiirt, dass $\psi, \varphi, \ldots$ constant und $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ veränderlich sind, so liefert der Vergleich mit (6)

$$(14) \qquad \frac{dT}{d\dot{\psi}} = \xi, \quad \frac{dT}{d\dot{\varphi}} = \eta, \ldots$$

Diese Werthe setzen wir in (13) ein und erhalten

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\psi}}\right) - \dfrac{dT}{d\psi} = \Psi \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) - \dfrac{dT}{d\varphi} = \Phi \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Dies sind Lagrange's bestimmte Bewegungsgleichungen in der Form, in welcher er selbst sie gegeben hat.

Die Form (13) mit (6), welche jetzt zum ersten Male bewiesen wird, ist in den Fällen von Nutzen, in denen es sich empfiehlt, einige der Coordinaten des Systems zu ignoriren, und in denen T die Geschwindigkeitscomponenten enthält, welche den ignorirten Coordinaten entsprechen. So würde *) bei einem sich durch eine Flüssigkeit bewegenden, mehrfach zusammenhängenden festen Körper, wenn ohne eigene Rotation der Flüssigkeitstheilchen doch solche „cyklische" **) Bewegungen in ihr bestehen, wie der feste Körper sie zulässt, die kinetische Energie, ausgedrückt in der von Lagrange vorgeschriebenen quadratischen Form, ihrer Natur nach die Geschwindigkeitscomponenten enthalten, welche den Coordinaten der Flüssigkeit selbst entsprechen. Nun ist es zweckmässig, die Coordinaten der Flüssigkeit in diesem Falle zu ignoriren und das Problem ganz in Ausdrücken der Coordinaten des festen Körpers zu lösen. Dies kann nicht unmittelbar durch Lagrange's Form (15) geschehen; es hat aber keine Schwierigkeit, wenn man sich an (13) in Verbindung mit (6) hält. Wenn andererseits (§ 331 unten) keine cyklische Bewegung der Flüssigkeit stattfindet, so ist die gesammte kinetische Energie der Flüssigkeit und des festen Körpers eine Function der Coordinaten und der Geschwindigkeitscomponenten des festen Körpers, und Lagrange's Form lässt sich ohne Weiteres in Anwendung bringen.

Wenn das System conservativ ist und V seine potentielle Energie bezeichnet, so haben wir nach § 293, (3)

$$-\delta V = \Psi \delta \psi + \cdots,$$

*) Proc. R. S. E., Febr. 1871.

**) „Cyklisch" ist nach W. Thomson's Definition die Bewegung in einer Flüssigkeit, wenn in derselben geschlossene Curven von solcher Art bestehen, dass das Integral $\int v\, ds \gtrless 0$. Darin ist unter v die in Richtung von ds genommene Componente der Geschwindigkeit der Flüssigkeit zu verstehen, und das Integral über die ganze Curve auszudehnen.

und die allgemeinen Gleichungen gehen über in

$$
(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\psi}}\right) - \dfrac{dT}{d\psi} = - \dfrac{dV}{d\psi} \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}
$$

Hamilton's Form. — Die Bewegungsgleichungen lassen sich auf eine ein wenig abweichende Form bringen, welche zuerst Hamilton gegeben hat, und die oft zweckmässig ist. Das geschieht auf folgende Weise: — Es seien $T, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ durch die Impulse $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückt, welche erfordert werden, um die Bewegung in irgend einem Augenblick von der Ruhe aus zu erzeugen [§ 313, (d)]. T ist dann eine homogene quadratische Function, und jede der Grössen $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ ist eine lineare Function dieser Elemente. Die Coefficienten von $T, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$, u. s. w. sind Functionen von φ, ψ, u. s. w., die von den kinematischen Bedingungen des Systems, aber nicht von der besonderen Bewegung abhängen. Bezeichnet also, wie in § 322 (29), ∂ eine partielle Differentiation in Beziehung auf die als unabhängig Veränderliche angesehenen Grössen $\xi, \eta, \ldots, \psi, \varphi, \ldots$, so haben wir [§ 313, (10)]

$$
(17)\qquad \dot{\psi} = \frac{\partial T}{d\xi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial T}{d\eta}, \ldots,
$$

und wenn d, wie im Vorhergehenden, die partielle Differentiation in Beziehung auf das System $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots, \psi, \varphi, \ldots$ bezeichnet, so ist [§ 313, (8)]

$$
(18)\qquad \xi = \frac{dT}{d\dot{\psi}}, \quad \eta = \frac{dT}{d\dot{\varphi}}, \ldots
$$

Die beiden Ausdrücke für T sind, wie oben (§ 313)

$$
(19)\qquad \begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\{(\psi,\psi)\dot{\psi}^2 + \cdots + 2(\psi,\varphi)\dot{\psi}\dot{\varphi} + \cdots\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{[\psi,\psi]\xi^2 + \cdots + 2[\psi,\varphi]\xi\eta + \cdots\}. \end{aligned}
$$

Der zweite muss sich aus dem ersteren dadurch ergeben, dass man für die Grössen $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \ldots$ ihre Werthe, in $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückt, substituirt. Es ergiebt sich somit

$$
\begin{aligned} \frac{\partial T}{d\psi} &= \frac{dT}{d\psi} + \frac{dT}{d\dot{\psi}}\frac{\partial \dot{\psi}}{d\psi} + \frac{dT}{d\dot{\varphi}}\frac{\partial \dot{\varphi}}{d\psi} + \cdots \\ &= \frac{dT}{d\psi} + \xi\frac{\partial}{d\psi}\frac{\partial T}{d\xi} + \eta\frac{\partial}{d\psi}\frac{\partial T}{d\eta} + \cdots \\ &= \frac{dT}{d\psi} + \frac{\partial}{d\psi}\left(\xi\frac{\partial T}{d\xi} + \eta\frac{\partial T}{d\eta} + \cdots\right) = \frac{dT}{d\psi} + 2\frac{\partial T}{d\psi}. \end{aligned}
$$

Hieraus schliessen wir

$$
(20)\qquad \frac{\partial T}{d\psi} = -\frac{dT}{d\psi}, \text{ und ebenso } \frac{\partial T}{d\varphi} = -\frac{dT}{d\varphi}, \text{ u. s. w.}
$$

Lagrange's Gleichungen verwandeln sich also in

$$
(21)\qquad \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial T}{d\psi} = \Psi', \text{ u. s. w.}
$$

Das sind dieselben Gleichungen, wie diejenigen, welche wir [§ 322, (33)] aus Hamilton's partieller Differentialgleichung für seine charakteristische Function und seinen mittels derselben dargestellten Ausdruck der Bewegung hergeleitet haben.

Wenn wir

$$\psi' = \frac{\partial T}{d\psi} + \psi'_{,}$$

setzen, so folgt $\frac{d\xi}{dt} = \psi'_{,}$, und dies berechtigt uns zu dem Ausspruch: —

330. Hamilton's Form der in allgemeinen Coordinaten dargestellten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen drückt Folgendes aus: — Um zu verhindern, dass irgend eine der Bewegungsgrössencomponenten sich ändere, wird eine entsprechende Kraftcomponente erfordert, die so gross ist, wie die Aenderung der kinetischen Energie, genommen für die Einheit der Zunahme der entsprechenden Coordinate, bei constant bleibenden Bewegungsgrössencomponenten; und von welcher Grösse auch die Kraftcomponente sein mag, ihr Ueberschuss über diesen Werth misst die Grösse der Zunahme der Bewegungsgrössencomponente.

Im Falle eines conservativen Systems nimmt derselbe Ausspruch die folgende Form an: — Die Grösse, um welche irgend eine Bewegungsgrössencomponente in der Einheit der Zeit zunimmt, ist gleich der für die Einheit der Zunahme der entsprechenden Coordinate genommenen Abnahme, welche die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie bei constanten Bewegungsgrössen erleidet. Dies ist die berühmte „kanonische Form" der Bewegungsgleichungen eines Systems, für welche Benennung sich wohl kaum ein Grund angeben lässt.

Kanonische Form der Hamilton'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen eines conservativen Systems. — Es bezeichne U den algebraischen Ausdruck für die Summe der durch die Coordinaten $\psi, \varphi, \ldots$ ausgedrückten potentiellen und der durch diese Coordinaten und die Bewegungsgrössencomponenten $\xi, \eta, \ldots$ ausgedrückten kinetischen Energie. Dann ist

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial U}{d\psi}, \text{ u. s. w.} \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial U}{d\xi}, \text{ u. s. w.}; \end{cases}$$

die Gleichungen der zweiten Zeile sind den Gleichungen (12) äquivalent, da die potentielle Energie ξ, η, u. s. w. nicht enthält.

In den folgenden Beispielen werden wir uns an Lagrange's Form (15) als die für solche Anwendungen passendste halten.

Beispiele über den Gebrauch von Lagrange's allgemeinen Bewegungsgleichungen. Beispiel (A). — Bewegung eines einzelnen Punktes (m), der auf Polarcoordinaten (r, ϑ, φ) bezogen ist. Aus der wohlbekannten Geometrie dieses Falles wissen wir, dass $\delta r, r\delta\vartheta$ und $r \sin\vartheta\,\delta\varphi$ die Grössen der linearen Verschiebung sind, welche den unendlich kleinen Zunahmen $\delta r, \delta\vartheta, \delta\varphi$ der Coordinaten entspricht, und dass diese Verschiebungen beziehungsweise in der Richtung von r, in der Richtung des Bogens $r\,\delta\vartheta$ (eines grössten Kreises) in der durch r und die Polaraxe gelegten Ebene und in der Richtung des Bogens $r \sin\vartheta\,\delta\varphi$ (eines kleinen Kreises, dessen Ebene zur Axe senkrecht ist) erfolgen, dass sie also zu einander senkrecht stehen. Bezeichnen daher F, G, H die Componenten der Kraft, welche der Punkt in diesen drei zu einander senkrechten Richtungen erfährt, so haben wir

$$F = R,\quad Gr = \Theta,\quad Hr \sin\vartheta = \Phi,$$

wo R, Θ, Φ die Grössen sind, in welche sich die allgemeinen Kraftcomponenten (§ 313) für dieses besondere Coordinatensystem verwandeln. Wir sehen zugleich, dass

$$\dot{r},\quad r\dot{\vartheta},\quad r\sin\vartheta\,\dot{\varphi}$$

die drei längs dieser zu einander senkrechten Richtungen vorhandenen Geschwindigkeitscomponenten sind. Es ist somit

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2).$$

Hieraus folgt

$$\frac{dT}{d\dot{r}} = m\dot{r},\quad \frac{dT}{d\dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta},\quad \frac{dT}{d\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi},$$

$$\frac{dT}{dr} = mr(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2),\quad \frac{dT}{d\vartheta} = mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2,\quad \frac{dT}{d\varphi} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen werden also

$$m\left\{\frac{d\dot{r}}{dt} - r(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)\right\} = F,$$

$$m\left\{\frac{d(r^2\dot{\vartheta})}{dt} - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right\} = Gr,$$

$$m\frac{d(r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi})}{dt} = Hr\sin\vartheta,$$

oder nach der in der Differentialrechnung üblichen Bezeichnungsart

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta^2}{dt^2} + \sin^2\vartheta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)\right\} = F,$$

$$m\left\{\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right\} = Gr,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\right) = Hr\sin\vartheta.$$

Wenn die Bewegung auf eine Ebene beschränkt wird, etwa auf die Ebene von r, ϑ, so haben wir $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, folglich $H = 0$, und die beiden übrig bleibenden Bewegungsgleichungen sind

$$m\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) = F,\ m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = Gr.$$

Wir hätten diese Gleichungen ohne Weiteres nach dem zweiten Bewegungsgesetz niederschreiben können, mit Rücksicht auf die kinematische Untersuchung des § 32, in welchem gezeigt wurde, dass $\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\vartheta^2}{dt^2}$ und $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ die längs des Radiusvector und senkrecht zu demselben genommenen Beschleunigungscomponenten sind, wenn die Bewegung eines Punktes in einer Ebene mittels der Polarcoordinaten r, ϑ ausgedrückt wird.

Dieselben Gleichungen, mit φ an der Stelle von ϑ, erhält man aus den drei für die Bewegung im Raume geltenden Polargleichungen, wenn man darin $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ setzt, in Folge welcher Annahme $G = 0$ und die Bewegung auf die Ebene (r, φ) beschränkt wird.

Beispiel (B). — Zwei materielle Punkte sind durch eine Schnur verbunden. Einer derselben, m, bewegt sich irgendwie auf einer glatten, horizontalen Ebene. Die Schnur, welche durch eine glatte unendlich kleine Oeffnung in dieser Ebene hindurchgeht, trägt den zweiten materiellen Punkt, m', welcher vertical herunter hängt und sich nur in dieser Verticallinie bewegen kann. (Die Schnur bleibt in jedem praktischen Versuch immer gestreckt; hier setzen wir aber natürlich voraus, dass sie auch negativer Spannung fähig sei.) Ist l die Länge der ganzen Schnur, r die Länge des Theils von m bis zur Oeffnung in der Ebene und ϑ der Winkel zwischen der Richtung von r und einer festen Richtung in der Ebene, so haben wir

$$T = \tfrac{1}{2}\{m(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2) + m'\dot r^2\},$$
$$\frac{dT}{d\dot r} = (m + m')\dot r,\ \frac{dT}{d\dot\vartheta} = mr^2\dot\vartheta,$$
$$\frac{dT}{dr} = mr\dot\vartheta^2,\ \frac{dT}{d\vartheta} = 0.$$

Da ausser gm', dem Gewicht des zweiten materiellen Punktes, keine äussere Kraft vorhanden ist, so ist auch

$$R = -gm',\ \Theta = 0.$$

Die Gleichungen der Bewegung sind daher

$$(m + m')\ddot r - mr\dot\vartheta^2 = -m'g,\quad m\frac{d(r^2\dot\vartheta)}{dt} = 0.$$

Die Bewegung von m' ist natürlich diejenige eines materiellen Punktes, der nur von einer nach einem festen Mittelpunkte hin gerichteten Kraft beeinflusst wird. Aber das Gesetz dieser Kraft, P (die Spannung der Schnur), ist bemerkenswerth. Zu seiner Bestimmung haben wir (§ 32)

$$P = m(-\ddot r + r\dot\vartheta^2).$$

Aus den Bewegungsgleichungen folgt aber

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -\frac{m'}{m+m'}(g + r\dot{\vartheta}^2), \text{ und } \dot{\vartheta} = \frac{h}{mr^2},$$

wo h eine willkürliche Integrationsconstante ist und das Moment der Bewegungsgrösse bezeichnet. Folglich ist

$$P = \frac{m\,m'}{m+m'}\left(g + \frac{h^2}{m^2}r^{-3}\right).$$

Der besondere Fall, in welchem m durch einen Stoss in eine kreisförmige Bewegung gesetzt und m' in Ruhe gelassen wird, ist insofern von Interesse, als (§ 350, unten) die Bewegung von m stabil ist, m' folglich sich in stabilem Gleichgewicht befindet.

Beispiel (C). — Ein starrer Körper wird von einer festen Axe getragen; dieser erste Körper trägt einen zweiten vermittels einer zweiten Axe; die Bewegung um jede Axe ist völlig frei.

Fall (a). — Die zweite Axe ist der ersteren parallel. Zu irgend einer Zeit t seien φ und ψ beziehungsweise die Neigungswinkel einer durch die erstere Axe gehenden festen Ebene gegen die durch beide Axen gelegte Ebene und gegen die Ebene, welche die zweite Axe und den Trägheitsmittelpunkt des zweiten Körpers enthält. Es leuchtet ein, dass diese beiden Coordinaten φ und ψ die Lage des Körpers vollständig bestimmen. Nun sei a der Abstand der zweiten Axe von der ersteren und b der Abstand des Trägheitsmittelpunktes des zweiten Körpers von der zweiten Axe. Dann ist $a\dot{\varphi}$ die Geschwindigkeit der zweiten Axe, und die Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes des zweiten Körpers ist die Resultante der beiden Geschwindigkeiten

$$a\dot{\varphi} \text{ und } b\dot{\psi},$$

deren Richtungen einen Winkel von der Grösse $\psi - \varphi$ einschliessen, so dass das Quadrat der Geschwindigkeit des Trägheitsmittelpunktes des zweiten Körpers gleich

$$a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi) + b^2\dot{\psi}^2$$

ist. Bezeichnen also m und m' die Massen, j den Gyrationsradius des ersteren Körpers in Beziehung auf die feste Axe und k den Gyrationsradius des zweiten Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende parallele Axe, so haben wir nach §§ 280, 281

$$T = \tfrac{1}{2}\{mj^2\dot{\varphi}^2 + m'[a^2\dot{\varphi}^2 + 2ab\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi) + b^2\dot{\psi}^2 + k^2\dot{\psi}^2]\}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{dT}{d\dot{\varphi}} = mj^2\dot{\varphi} + m'a^2\dot{\varphi} + m'ab\cos(\psi - \varphi)\dot{\psi},$$

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = m'ab\cos(\psi - \varphi)\dot{\varphi} + m'(b^2 + k^2)\dot{\psi},$$

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\frac{dT}{d\psi} = m'ab\sin(\psi - \varphi)\dot{\varphi}\dot{\psi}.$$

Die allgemeinste Voraussetzung, die wir hinsichtlich der äusseren Kräfte machen können, ist mit der Annahme äquivalent, dass ein Kräftepaar

Φ auf den ersteren und ein Kräftepaar Ψ' auf den zweiten Körper wirke, jedes in einer zu den Axen senkrechten Ebene. Diese Kräftepaare sind offenbar das, was aus den allgemeinen Kräftecomponenten bei diesem besonderen Coordinatensystem φ, ψ wird. Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$(mj^2 + m'a^2)\ddot{\varphi} + m'ab\frac{d[\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi)]}{dt} - m'ab\sin(\psi-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\psi} = \Phi,$$

$$m'ab\frac{d[\dot{\varphi}\cos(\psi-\varphi)]}{dt} + m'(b^2+k^2)\ddot{\psi} + m'ab\sin(\psi-\varphi)\dot{\varphi}\dot{\psi} = \Psi'.$$

Wenn ausser der Schwere keine äussere Kraft vorhanden ist, und wenn wir beide Axen als horizontal annehmen, was unbeschadet der Allgemeinheit der Betrachtung geschehen kann, so ist die potentielle Energie des Systems

$$gmh(1-\cos\varphi) + gm'\{a[1-\cos(\varphi+A)] + b[1-\cos(\psi+A)]\};$$

darin bezeichnet h den Abstand des Trägheitsmittelpunktes des ersteren Körpers von der festen Axe, A den Neigungswinkel der Ebene, welche die feste Axe und den Trägheitsmittelpunkt des ersteren Körpers enthält, gegen die durch die beiden Axen gehende Ebene; ausserdem ist die feste Ebene so angenommen, dass man $\varphi = 0$ hat, wenn die erstere Ebene vertical ist. Wird der letzte Ausdruck nach φ und nach ψ differentiirt, so folgt

$$-\Phi = gmh\sin\varphi + gm'a\sin(\varphi+A),$$
$$-\Psi' = gm'b\sin(\psi+A).$$

Wir werden diesen Fall später ziemlich eingehend untersuchen, wenn wir die Interferenz der Vibrationen betrachten werden, ein Gegenstand, der in der Physik von grosser Wichtigkeit ist.

Wenn keine äusseren oder innerlich arbeitenden Kräfte vorhanden sind, so haben wir $\Phi = 0$ und $\Psi' = 0$, oder wenn die beiden Körper gegenseitig Kräfte auf einander ausüben, aber keine Einwirkung von aussen her erleiden, so ist $\Phi + \Psi' = 0$. In jedem dieser beiden Fälle erhalten wir, wenn wir die beiden Bewegungsgleichungen addiren und das Resultat integriren, als erstes Integral

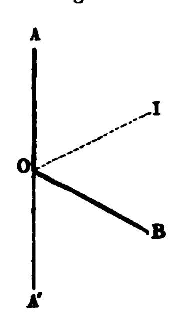
$$(mj^2 + m'a^2)\dot{\varphi} + m'ab\cos(\psi-\varphi)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}) + m'(b^2+k^2)\dot{\psi} = C.$$

Dies drückt offenbar aus, dass das ganze Moment der Bewegungsgrösse constant ist und liefert $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$, ausgedrückt durch $(\dot{\psi}-\dot{\varphi})$ und $(\psi-\varphi)$. Werden diese Werthe von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ in die Integralgleichung der Energie eingesetzt, so ergiebt sich, vorausgesetzt dass die zwischen den Körpern wechselseitig wirkenden Kräfte zur conservativen Classe gehören, eine einzige Gleichung zwischen $\frac{d(\psi-\varphi)}{dt}$, $(\psi-\varphi)$ und Constanten, und die vollständige Lösung des Problems ist somit auf Quadraturen zurückgeführt.

Fall (b). — Die zweite Axe ist zur ersteren senkrecht. Wir empfehlen dem Leser, diesen Fall zu seiner Uebung zu bearbeiten. Da derselbe für die Theorie der centrifugalen chronometrischen Regulatoren von grosser Wichtigkeit ist, so werden wir später auf ihn zurückkommen.

Beispiel (D). — Das gyroskopische Pendel. Ein starrer Körper P ist an eine Axe eines Universalgelenkes (§ 109) befestigt, dessen zweite Axe festgehalten wird, und ein zweiter Körper Q wird von P vermittels einer festen Axe getragen, deren Richtung mit der des ersterwähnten Gelenkarmes zusammenfällt oder ihr parallel ist. Der Einfachheit wegen wollen wir voraussetzen, der Körper Q sei um die Axe, die ihn trägt, kinetisch symmetrisch, und OB sei eine Hauptaxe eines gedachten starren Körpers PQ, der aus P und einer Q gleichen Masse besteht, die sich im Trägheitsmittelpunkt von Q befindet und mit P verbunden ist. Es sei AO der feste Arm, O das Gelenk, OB der bewegliche Arm, welcher den Körper P trägt und mit der Axe von Q zusammenfällt oder ihr parallel ist. Ferner sei $BOA' = \vartheta$, und φ der Winkel, welchen die Ebene AOB mit einer durch OA gehenden festen Ebene bildet, welche letztere so gewählt ist, dass sie die Hauptaxe des Trägheitsmoments $\mathfrak{C}$ des gedachten starren Körpers PQ enthält, wenn OB mit AO in eine Richtung gebracht wird. Endlich sei ψ der Winkel zwischen der Ebene AOB und einer in Q angenommenen festen Ebene, welche durch die Axe geht, um welche dieser Körper symmetrisch ist. Offenbar wird durch diese drei Coordinaten $(\vartheta, \varphi, \psi)$ die Lage des Systems zu jeder Zeit t bestimmt. Die Trägheitsmomente des gedachten starren Körpers in Beziehung auf OB und auf seine beiden anderen Hauptaxen bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, und die Trägheitsmomente des Körpers Q in Beziehung auf die Axe, die ihn trägt, und auf irgend eine zweite durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende und zur ersten senkrechte Axe mit $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$.

Fig. 48.



Wir haben (§ 109) gesehen, dass bei der Gelenkart, die wir in O voraussetzen, jede mögliche Bewegung eines mit OB starr verbundenen Körpers in eine Rotation um die den Winkel AOB halbirende Linie OI und eine Rotation um die durch O gehende zur Ebene AOB senkrechte Gerade zerlegt werden kann. Die Winkelgeschwindigkeit der letzteren Bewegung ist, nach unserer jetzigen Bezeichnung, $\dot{\vartheta}$. Die erstere Bewegung würde jedem Punkte in OB dieselbe absolute Geschwindigkeit durch die Rotation um OI ertheilen, die er durch eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um AA' erfolgende Rotation erhält. Sie ist deshalb gleich

$$\frac{\sin A'OB}{\sin IOB}\dot{\varphi} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\dot{\varphi} = 2\dot{\varphi}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta.$$

Diese Geschwindigkeit lässt sich in $2\dot{\varphi}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta = \dot{\varphi}(1-\cos\vartheta)$ um OB und $2\dot{\varphi}\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\vartheta = \dot{\varphi}\sin\vartheta$ um die in der Ebene AOB liegende zu OB Senkrechte zerlegen. Wegen der symmetrischen Natur des Gelenks in Beziehung auf die Linie OI wird weiter der Winkel φ, wie er oben definirt ist, gleich dem Winkel sein, den die Ebene AOB mit derjenigen Ebene des Körpers P bildet, die für $\varphi = 0$ mit der festen Ebene zusammenfiel. Daher ist der Neigungswinkel der Axe der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}\sin\vartheta$ gegen die Hauptaxe des Moments $\mathfrak{B}$ gleich φ.

Wenn wir also diese Winkelgeschwindigkeit und auch $\dot{\vartheta}$ in Componenten um die Axen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zerlegen, so finden wir, dass die ganzen Winkelgeschwindigkeitscomponenten des gedachten starren Körpers PQ um diese Axen beziehungsweise

$$\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi \text{ und } - \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi + \dot{\vartheta} \cos\varphi$$

sind. Die ganze kinetische Energie T besteht aus derjenigen des gedachten starren Körpers PQ und derjenigen des Körpers Q um die Axen, die durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehen. Es ist somit

$$\begin{aligned} 2T = \mathfrak{A}(1 - \cos\vartheta)^2 \dot{\varphi}^2 &+ \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi)^2 \\ &+ \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi)^2 \\ + \mathfrak{A}' \{\dot{\psi} - \dot{\varphi}(1 - \cos\vartheta)\}^2 &+ \mathfrak{B}'(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2). \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = \mathfrak{A}' \{\dot{\psi} - \dot{\varphi}(1 - \cos\vartheta)\}, \quad \frac{dT}{d\psi} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\dot{\varphi}} &= \mathfrak{A}(1 - \cos\vartheta)^2 \dot{\varphi} + \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi) \sin\vartheta \cos\varphi \\ &\quad + \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \sin\vartheta \sin\varphi \\ &\quad - \mathfrak{A}' \{\dot{\psi} - \dot{\varphi}(1 - \cos\vartheta)\}(1 - \cos\vartheta) + \mathfrak{B}' \dot{\varphi} \sin^2\vartheta, \\ \frac{dT}{d\varphi} &= - \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi)(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \\ &\quad + \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi)(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi), \\ \frac{dT}{d\dot{\vartheta}} &= \mathfrak{B}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi) \sin\varphi \\ &\quad - \mathfrak{C}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \cos\varphi + \mathfrak{B}' \dot{\vartheta}, \\ \frac{dT}{d\vartheta} &= \mathfrak{A}(1 - \cos\vartheta) \sin\vartheta . \dot{\varphi}^2 + \mathfrak{B} \cos\vartheta \cos\varphi . \dot{\varphi}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + \dot{\vartheta} \sin\varphi) \\ &\quad + \mathfrak{C} \cos\vartheta \sin\varphi\, \dot{\varphi}(\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi - \dot{\vartheta} \cos\varphi) \\ &\quad + \mathfrak{A}' \sin\vartheta . \dot{\varphi} \{\dot{\psi} - (1 - \cos\vartheta) \dot{\varphi}\} + \mathfrak{B}' \sin\vartheta \cos\vartheta \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Nun möge auf den Körper Q in einer zu seiner Axe senkrechten Ebene ein Kräftepaar G wirken, und auf den Körper P in der zu OB senkrechten Ebene, in der Ebene $A'OB$ und in der durch OB gehenden zur Zeichnung senkrechten Ebene beziehungsweise die Kräftepaare L, M, N. Wenn ψ constant erhalten wird und φ variirt, so wird das Paar G in demselben Sinne wie L Arbeit leisten oder verbrauchen, so dass beide Wirkungen einfach addirt werden können. Wenn man also $L + G$ und N in Componenten um OI und senkrecht zu OI zerlegt, die letzteren weglässt und sich erinnert, dass $2 \sin \frac{1}{2}\vartheta . \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit um OI ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \{- (L + G) \sin \tfrac{1}{2}\vartheta + N \cos \tfrac{1}{2}\vartheta\} \\ &= \{- (L + G)(1 - \cos\vartheta) + N \sin\vartheta\}. \end{aligned}$$

Ausserdem ist offenbar

$$\Psi = G, \quad \Theta = M.$$

Bei Benutzung dieser verschiedenen Ausdrücke in Lagrange's allgemeinen Formeln erhält man die Bewegungsgleichungen des Systems. Dieselben werden uns später von grossem Nutzen sein, wenn wir mehrere besondere Fälle von erheblichem Interesse und sehr grosser Wichtigkeit betrachten werden.

Beispiel (E). — Bewegung eines auf rotirende Axen bezogenen materiellen Punktes. Es seien x, y, z die Coordinaten eines in Bewegung befindlichen materiellen Punktes, der auf Axen bezogen ist, die mit constanter oder veränderlicher Winkelgeschwindigkeit um die Axe OZ rotiren. Derselbe Punkt habe in Beziehung auf dieselbe Axe OZ und auf zwei in der zu OZ senkrechten Ebene festliegende Axen OX_1, OY_1 die Coordinaten x_1, y_1, z_1. Es ist dann

$$x_1 = x \cos\vartheta - y \sin\vartheta,\ y_1 = x \sin\vartheta + y \cos\vartheta,$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \cos\vartheta - \dot{y} \sin\vartheta - (x \sin\vartheta + y \cos\vartheta)\dot{\vartheta},\ \dot{y}_1 = \text{u. s. w.},$$

wo ϑ, der Winkel $X_1 O X$, als eine gegebene Function von t betrachtet werden muss. Wir erhalten folglich

$$T = \tfrac{1}{2} m \{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2(x\dot{y} - y\dot{x})\dot{\vartheta} + (x^2 + y^2)\dot{\vartheta}^2\};$$

$$\frac{dT}{d\dot{x}} = m(\dot{x} - y\dot{\vartheta}),\ \frac{dT}{d\dot{y}} = m(\dot{y} + x\dot{\vartheta}),\ \frac{dT}{d\dot{z}} = m\dot{z};$$

$$\frac{dT}{dx} = m(\dot{y}\dot{\vartheta} + x\dot{\vartheta}^2),\ \frac{dT}{dy} = m(-\dot{x}\dot{\vartheta} + y\dot{\vartheta}^2),\ \frac{dT}{dz} = 0.$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} = m(\ddot{x} - \dot{y}\dot{\vartheta} - y\ddot{\vartheta}),\ \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{y}} = m(\ddot{y} + \dot{x}\dot{\vartheta} + x\ddot{\vartheta}),$$

und die Bewegungsgleichungen sind somit

$$m(\ddot{x} - y\ddot{\vartheta} - 2\dot{y}\dot{\vartheta} - x\dot{\vartheta}^2) = X,\ m(\ddot{y} + x\ddot{\vartheta} + 2\dot{x}\dot{\vartheta} - y\dot{\vartheta}^2) = Y,\ m\ddot{z} = Z,$$

wo X, Y, Z einfach die den beweglichen Axen in jedem Augenblick parallelen Componenten der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft bezeichnen. In diesem Beispiel geht t in die Relation ein zwischen den festen rechtwinkligen Axen und dem Coordinatensystem, auf welches die Bewegung bezogen wird; es findet aber keine Gebundenheit statt. Wir lassen noch ein Beispiel folgen, in welchem eine variirende oder kinetische Gebundenheit vorhanden ist.

Beispiel (F). — Ein unter der Einwirkung irgend welcher Kräfte stehender materieller Punkt ist an das eine Ende einer Schnur befestigt, deren anderes Ende sich mit beliebiger constanter oder veränderlicher Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegt. Es sei ϑ die Neigung der Schnur zur Zeit t gegen die gegebene gerade Linie und φ der Winkel zwischen zwei durch diese Linie gehenden Ebenen, von denen die eine jederzeit die Schnur enthält, während die andere fest ist. Diese beiden Coordinaten (ϑ, φ) bestimmen die Lage P des materiellen Punktes in jedem Augenblick, da die Länge der Schnur eine gegebene Constante a und die Entfernung OE ihres zweiten

Endpunktes E von einem festen Punkte O der Geraden, in der er sich bewegt, eine gegebene Function von t ist, die wir mit u bezeichnen werden. Auf drei feste rechtwinklige Axen bezogen habe der materielle Punkt die Coordinaten x, y, z. Wir wählen OX als die gegebene gerade Linie und YOX als die feste Ebene, von welcher aus φ gemessen wird. Dann ist

$$x = u + a \cos \vartheta,\ y = a \sin \vartheta \cos \varphi,\ z = a \sin \vartheta \sin \varphi,$$
$$\dot{x} = \dot{u} - a \sin \vartheta \,.\, \dot{\vartheta},$$

und für $\dot{y}, \dot{z}$ erhalten wir dieselben Ausdrücke wie im Beispiel (A). Es ist somit

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{u}^2 - 2 \dot{u} \dot{\vartheta} a \sin \vartheta) + \mathfrak{T},$$

wo $\mathfrak{T}$ den Werth hat, welchen T im Beispiel (A) annimmt, wenn darin $\dot{r} = 0$, $r = a$ gesetzt wird. Bezeichnen also wie in jenem Beispiele G, und H die beiden zu EP senkrechten und beziehungsweise in der Ebene von ϑ und senkrecht zu dieser Ebene genommenen Componenten der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft, so erhalten wir als die beiden gesuchten Bewegungsgleichungen

$$m \{a (\ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2) - \sin \vartheta \ddot{u}\} = G,$$
$$m a \frac{d (\sin^2 \vartheta \dot{\varphi})}{dt} = H.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung dieselbe ist, die sie sein würde, wenn E fest wäre und eine $- m \ddot{u}$ gleiche Kraft in einer zu EX parallelen Richtung in dem materiellen Punkte angebracht würde. Wir hätten dies Resultat ohne Weiteres dadurch erlangen können, dass wir dem ganzen System eine der Beschleunigung von E gleiche und entgegengesetzte Beschleunigung hinzugefügt hätten, deren Ertheilung an P die Kraft $- m \ddot{u}$ erfordert.

331. Kinetik einer vollkommenen Flüssigkeit. — Mit Hülfe der Lagrange'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen lassen sich äusserst interessante und wichtige, bisher nicht in Angriff genommene Probleme über die Bewegung der flüssigen Körper behandeln. Der Kürze wegen wollen wir eine Masse, die absolut unzusammendrückbar und absolut unfähig ist, einer Formänderung einen Widerstand zu leisten, einfach eine **Flüssigkeit** nennen. Wir brauchen wohl nicht erst zu sagen, dass es in der Natur keine Materie giebt, welche dieser Definition vollständig genügt. Wir werden aber später (in dem Kapitel über die Eigenschaften der Materie) sehen, wie Wasser und andere wirklich vorhandene Flüssigkeiten diesem Begriffe wenigstens annähernd entsprechen. Auch wird sich zeigen, dass wir durch Anwendung der Principien der abstrakten Dynamik auf jene ideale vollkommene Flüssigkeit unserer Definition zu Resultaten gelangen, welche uns viele praktische und interessante Belehrungen über die wirklichen Bewegungen der Flüssi

keiten gewähren. In der Hydrodynamik werden wir finden, dass die Bewegung einer homogenen Flüssigkeit, durch welche sich beliebige starre oder biegsame feste Körper bewegen, mag sie nun von unbegrenzter Ausdehnung sein oder sich in einem endlichen geschlossenen Gefäss von irgend einer Form befinden, in jedem Augenblick, falls die Flüssigkeit überhaupt jemals in Ruhe war, mit der ganz bestimmten Bewegung übereinstimmt, welche impulsiv von der Ruhe aus dadurch erzeugt werden würde, dass man jedem Theil der Umgrenzungsfläche und jedem Theil der Oberfläche jedes in der Flüssigkeit befindlichen festen Körpers momentan die Geschwindigkeit ertheilte, die er in dem in Rede stehenden Augenblicke wirklich besitzt. (Diese Bewegung erfüllt, § 312, die Bedingung, dass ihre kinetische Energie ein Minimum ist.) Danach würde z. B., wenn alle diese Oberflächen plötzlich oder allmälig zur Ruhe gebracht würden, die ganze Flüssigkeitsmasse gleichzeitig zur Ruhe kommen, gleichgiltig wie lange sie in Bewegung begriffen war. Wenn also keine der Oberflächen biegsam ist, aber ein oder mehrere starre Körper sich unter der Einwirkung irgend welcher Kräfte irgendwie durch die Flüssigkeit bewegen, so wird die kinetische Energie der ganzen Bewegung in jedem Augenblick lediglich von der endlichen Anzahl der Coordinaten und der Geschwindigkeitscomponenten abhängen, welche die Lage und die Bewegung dieser Körper bestimmen, welches auch die (nur durch eine unendlich grosse Anzahl von Coordinaten ausdrückbaren) Lagen sein mögen, die von den Flüssigkeitstheilchen erreicht sind. Ein durch eine endliche Anzahl solcher Elemente gegebener Ausdruck für die ganze kinetische Energie ist aber, wie wir gesehen haben, gerade das, was wir zur Aufstellung der Lagrange'schen Gleichungen in jedem besonderen Falle bedürfen.

Hydrodynamische Beispiele der Anwendung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen. —

Wie in allen anderen Fällen, so wird auch in der Hydrodynamik der Ausdruck für die ganze kinetische Energie eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeitscomponenten sein, vorausgesetzt dass man ein unveränderliches Coordinatensystem zu Grunde legt. Die Coefficienten der verschiedenen Glieder dieser Function sind im Allgemeinen Functionen der Coordinaten, deren Bestimmung sich in jedem besonderen Falle unmittelbar aus der Lösung des Minimumproblems des Beispiels (3), § 317, ergiebt.

[Es ist uns vom Hon. J. W. Strutt und neuerdings vom Prof. Boltzmann in Gratz bemerkt worden, dass die vorstehende Begründung unserer hydrokinetischen Anwendung von Lagrange's allgemeinen Gleichungen

nicht genau sei. Wir geben das zu und theilen deshalb den folgenden (hauptsächlich auf eine Bemerkung Boltzmann's gegründeten) Beweis des Princips der „Wirkung" (§§ 319, 320) für eine unzusammendrückbare Flüssigkeit mit, aus welchem sich unsere Anwendung dieser Gleichungen leicht herleiten lässt.

Das System, dessen Bewegung betrachtet wird, sei eine zusammendrückbare oder unzusammendrückbare Flüssigkeitsmasse, deren Theile sich reibungslos gegen einander verschieben lassen. Zwischen diesen Theilen mögen beliebige Kräfte wirken, und ebenso möge jeder kleinste Theil eine gewissen Bedingungen unterworfene Krafteinwirkung erleiden (die wir uns als aus der Fernwirkung festgelegter äusserer Körper herrührend denken können).

Es bezeichne δ die von einer unendlich kleinen Aenderung der anfänglichen Lagen und Geschwindigkeiten der materiellen Punkte hervorgebrachte Variation. Ferner bezeichnen x, y, z die Coordinaten eines unendlich kleinen Massentheiles m der Flüssigkeit, X, Y, Z die Componenten der auf m wirkenden Kraft und Σ eine sich über alle materiellen Punkte der Flüssigkeitsmasse erstreckende Summation. Dann ist (vergl. § 319)

$$\delta\int_0^t (T + V)\,dt$$

$$= \int_0^t dt\,\Sigma\{m(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}) + X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z\}.$$

Nun liefert eine partielle Integration

$$\int_0^t dt\,\dot{x}\,\delta\dot{x} = [\dot{x}\,\delta x]_0^t - \int_0^t dt\,\ddot{x}\,\delta x,$$

und weil noch [§ 293 (1)]

$$\Sigma\{(X - m\ddot{x})\,\delta x + (Y - m\ddot{y})\,\delta y + (Z - m\ddot{z})\,\delta z\} = 0$$

ist, so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$(1) \qquad \delta\int_0^t (T + V)\,dt = [\Sigma m(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y + \dot{z}\,\delta z)]_0^t.$$

Später, in der Hydrokinetik, werden wir Lagrange's berühmtes hydrokinetisches Theorem beweisen, dass

$$\dot{x}\,dx + \dot{y}\,dy + \dot{z}\,dz$$

ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z ist, wenn die Bewegung von der Ruhe aus oder von irgend einem Bewegungszustande begonnen hat, für welchen

$$\dot{x}\,dx + \dot{y}\,dy + \dot{z}\,dz$$

ein vollständiges Differential ist. Wir nehmen jetzt an, dies sei der Fall, d. h. die Bewegung, mit der wir uns beschäftigen, sei rotationslos (§ 190). Die Function, deren Differential

$$\dot{x}\,dx + \dot{y}\,dy + \dot{z}\,dz.$$

ist, nennen wir nach Helmholtz das Geschwindigkeitspotential und bezeichnen es mit φ. Dann verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$\delta\int_0^t (T + V)\,dt = [\Sigma m\,\delta\varphi]_0^t, \tag{2}$$

wo $\delta\varphi$ die Variation von x, y, z zu $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ bezeichnet.

Nehmen wir nun an, die Flüssigkeit sei unzusammendrückbar, und nennen ihre Dichtigkeit ϱ, so ist

$$\Sigma m\,\delta\varphi = \varrho\,\delta\int\int\int dx\,dy\,dz\,\varphi,$$

wo $\int\int\int dx\,dy\,dz\,()$ eine Integration durch den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum und δ die Variation bezeichnet, die dadurch entsteht, dass man das Integral der Function φ durch den von der Flüssigkeit eingenommenen veränderten Raum nimmt. Da nun φ zwar für jedes bewegte Theilchen variirt, aber für jede Stelle im Raum durch die Variation unverändert bleibt, so ergiebt die vorgeschriebene Integration einfach die Integration

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\varphi$$

durch den von der geänderten Flüssigkeit eingenommenen neuen Raum, vermindert um dieselbe Integration durch den vor der Variation eingenommenen Raum. In Zeichen ist dies für den Fall unendlich abnehmender Variation

$$\delta\int\int\int dx\,dy\,dz\,\varphi = \int\int d\sigma\,\delta q\,\varphi, \tag{3}$$

wenn δq das Zurückweichen der Umgrenzungsfläche in Richtung ihrer nach aussen gerichteten Normale und $\int\int d\sigma\,()$ eine Integration über die ganze Oberfläche bezeichnet. Hieraus folgt endlich

$$\delta\int_0^t (T + V)\,dt = \varrho\left[\int\int d\sigma\,\delta q\,\varphi\right]_0^t, \tag{4}$$

und dies ist die Gleichung der variirenden Wirkung (§ 321) für eine homogene unzusammendrückbare Flüssigkeit, die sich ohne Rotation bewegt. Die Gleichung (4) ist insofern wichtig, als sie zeigt, dass die Variation der Wirkung in einer incompressiblen und rotationslosen Flüssigkeit ohne cyklische Bewegung allein von der Variation der anfänglichen und der Endgestalt der die Flüssigkeit begrenzenden Oberfläche und nicht von den anfänglichen und den Endcoordinaten der Flüssigkeitstheilchen abhängt*). Wenn also die (nirgend biegsame) Umgrenzung der Flüssig-

---

*) Wir setzen hier das Geschwindigkeitspotential als einwerthig voraus. Im zweiten Bande dieses Werkes beabsichtigen wir, die „cyklische“ Bewegung der Flüssigkeiten (welche, wenn sie rotationslos ist, ein vielwerthiges Geschwindigkeitspotential liefert) zu behandeln und das Hamilton'sche Princip der variirenden Wirkung in seiner Anwendung auf diese Bewegungsart eingehend zu discutiren.

keit nur variirt, insofern sich ein oder mehrere starre Körper durch dieselbe hindurch bewegen, oder insofern das die Flüssigkeit enthaltende Gefäss eine Bewegung vollführt, so können geeignete verallgemeinerte Coordinaten, welche die Lage jeder beweglichen geschlossenen starren Oberfläche ausdrücken, die zur Umgrenzung der Flüssigkeit gehört, an Stelle der verallgemeinerten Coordinaten $\psi, \varphi, \vartheta, \ldots$ angewendet werden, wie sie in der auf die variirende Wirkung (§§ 322, 323) bezüglichen Theorie und Formeln vorkommen; in letzteren ist denn auch ein Beweis von **Lagrange's** verallgemeinerten Gleichungen der Beschleunigung [§ 322 (33)] enthalten. Professor **Boltzmann's** Beweis der Formel (4) rechtfertigt daher vollkommen unsere Anwendung der **Lagrange'schen** Gleichungen.] *)

Beispiel (1). — **Eine Kugel wird in Bewegung gesetzt in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeitsmasse, die sich au der einen Seite einer unendlichen Ebene nach allen Rich tungen hin ins Unendliche erstreckt und anfänglich in Ruh ist.** Als Anfangspunkt des festen rechtwinkligen Coordinatensystem wählen wir einen Punkt O der Grenzebene und lassen die Axe OX a dieser Ebene senkrecht stehen. In Beziehung auf dieses System habe d Mittelpunkt der Kugel zur Zeit t die Coordinaten x, y, z. Wenn eine d Componenten $\dot y$ oder $\dot z$ der Geschwindigkeit in irgend einem Augenblic umgekehrt wird, so bleibt die kinetische Energie offenbar unverändert folglich können in dem Ausdruck für die kinetische Energie keine Glied mit $\dot y \dot z, \dot z \dot x, \dot x \dot y$ vorkommen. Aus diesem Grunde und der Symmetrie d Umstände in Beziehung auf y und z wegen ist jener Ausdruck folgende

$$T = \tfrac{1}{2}\{P\dot x^2 + Q(\dot y^2 + \dot z^2)\}.$$

Ferner sehen wir, dass P und Q einfach Functionen von x sein müss da die Umstände für alle Werthe von y und z ähnlich sind. Wir halten also durch Differentiation

$$\frac{dT}{d\dot x} = P\dot x,\ \frac{dT}{d\dot y} = Q\dot y,\ \frac{dT}{d\dot z} = Q\dot z;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot x}\right) = P\ddot x + \frac{dP}{dx}\dot x^2,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot y}\right) = Q\ddot y + \frac{dQ}{dx}\dot y\dot x, \text{ u. s. w.};$$

$$\frac{dT}{dx} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dP}{dx}\dot x^2 + \frac{dQ}{dx}(\dot y^2 + \dot z^2)\right\},\ \frac{dT}{dy} = 0, \text{ u. s. w.},$$

und die Bewegungsgleichungen sind

$$P\ddot x + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{dP}{dx}\dot x^2 - \frac{dQ}{dx}(\dot y^2 + \dot z^2)\right\} = X,$$

$$Q\ddot y + \frac{dQ}{dx}\dot y\dot x = Y,\ Q\ddot z + \frac{dQ}{dx}\dot z\dot x = Z.$$

Principien, die für eine praktische Lösung der Aufgabe, P und Q zu b stimmen, ausreichend sind, werden später gegeben werden. Inzwisch sehen wir schon jetzt, dass jede dieser Functionen abnimmt, wenn wächst. Die Bewegungsgleichungen lehren also Folgendes: —

---

*) Zusatz der Verfasser zur deutschen Ausgabe.

332. Einfluss einer starren Ebene auf die Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit. — Eine Kugel, welche durch eine Flüssigkeitsmasse von einer unendlichen Grenzebene aus in einer zu dieser Ebene senkrechten Richtung geworfen wird, und auf welche keine anderen Kräfte als die aus dem Druck der Flüssigkeit herrührenden wirken, erleidet eine allmälige Beschleunigung, und ihre Geschwindigkeit nähert sich schnell einem Grenzwerthe, der ganz nahezu erreicht ist, wenn ihr Abstand von der Ebene mehrmals so gross als ihr Durchmesser ist. Wird aber die Kugel der Ebene parallel geworfen, so erleidet sie unter der Einwirkung der Resultante des Flüssigkeitsdrucks eine Anziehung gegen die Ebene hin. Das erstere dieser Resultate wird leicht dadurch bewiesen, dass man zunächst einen Wurf gegen die Ebene hin betrachtet (in welchem Falle die Bewegung der Kugel offenbar eine Verzögerung erleiden wird) und dann das allgemeine Princip der Umkehrbarkeit (§ 272) in Rechnung zieht, welches sich in dem idealen Falle einer vollkommenen Flüssigkeit in aller Strenge anwenden lässt. Das zweite Resultat kann man ohne Hülfe von Lagrange's Analysis nicht so leicht vorhersehen; es folgt aber ohne Weiteres aus der Hamilton'schen Form seiner Gleichungen, wie wir sie oben in § 330 in allgemeinen Ausdrücken mitgetheilt haben. Völlig äquivalent ist der Fall einer in Ruhe gegebenen, sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckenden Flüssigkeit, durch welche zwei Kugeln mit gleichen Geschwindigkeiten senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte geschleudert werden: Die Kugeln werden einander anzuziehen scheinen, ein sehr bemerkenswerthes und anregendes Resultat.

Weitere hydrodynamische Beispiele. — Beispiel (2). Ein fester Rotationskörper bewegt sich so durch eine Flüssigkeit, dass seine Axe beständig in einer Ebene bleibt. Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit, welche der Körper in irgend einem Augenblick um eine beliebige zur festen Ebene senkrechte Axe hat. Ferner seien u und q die längs und senkrecht zur Symmetrieaxe des Körpers genommenen Geschwindigkeitscomponenten eines in dieser Axe beliebig gewählten Punktes C des Körpers. Dann haben wir nach dem in § 331 ausgesprochenen allgemeinen Princip (da eine Aenderung des Zeichens von u die kinetische Energie nicht ändern kann)

$$(a) \qquad T = \tfrac{1}{2}(Au^2 + Bq^2 + \mu'\omega^2 + E\omega q),$$

wo A, B, μ' und E Constanten sind, welche von der Figur und Masse des Körpers und von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängen. Es bezeichne nun v die zur Axe senkrechte Geschwindigkeit eines Punktes, den wir

den **Reactionsmittelpunkt** nennen wollen. Es ist dies ein Punkt in der Axe, welcher die Entfernung $\frac{E}{2B}$ von C hat, so dass (§ 87) $q = v - \frac{E}{2B}\omega$ ist. Wird jetzt $\mu' - \frac{E^2}{2B}$ mit μ bezeichnet, so geht (a) über in

(a′) $$T = \tfrac{1}{2}(Au^2 + Bv^2 + \mu\omega^2).$$

In der Ebene, in welcher sich die Axe der Figur bewegt, nehmen wir zwei beliebige auf einander senkrechte feste Axen an, in Beziehung auf welche der Reactionsmittelpunkt die Coordinaten x und y hat; den Winkel, welchen die Axe der Figur mit OX in irgend einem Augenblick bildet, bezeichnen wir mit ϑ; dann ist

(b) $$\omega = \dot\vartheta,\ u = \dot x\cos\vartheta + \dot y\sin\vartheta,\ v = -\dot x\sin\vartheta + \dot y\cos\vartheta.$$

Wird der Ausdruck von T, nachdem darin diese Werthe eingesetzt worden sind, differentiirt, so ergiebt sich, wenn man da, wo es passend ist, die Buchstaben u, v der Kürze wegen beibehält,

(c) $$\begin{cases}\frac{dT}{d\dot\vartheta} = \mu\dot\vartheta,\ \frac{dT}{d\dot x} = Au\cos\vartheta - Bv\sin\vartheta,\ \frac{dT}{d\dot y} = Au\sin\vartheta + Bv\cos\vartheta,\\ \frac{dT}{d\vartheta} = (A - B)uv,\ \frac{dT}{dx} = 0,\ \frac{dT}{dy} = 0.\end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen sind daher

(d) $$\begin{cases}\mu\ddot\vartheta - (A - B)uv = L,\\ \frac{d(Au\cos\vartheta - Bv\sin\vartheta)}{dt} = X,\\ \frac{d(Au\sin\vartheta + Bv\cos\vartheta)}{dt} = Y,\end{cases}$$

wo X, Y die Kraftcomponenten sind, deren Richtungen durch C gehen und OX, OY parallel sind, während L das auf den Körper wirkende Kräftepaar ist.

Bezeichnen λ, ξ, η beziehungsweise das impulsive Kräftepaar und die durch C gehenden impulsiven Kraftcomponenten, welche erforderlich sind, um die Bewegung in irgend einem Augenblick zu erzeugen, so ist natürlich [§ 313, (c)]

(e) $$\lambda = \frac{dT}{d\dot\vartheta} = \mu\dot\vartheta,\ \xi = \frac{dT}{d\dot x},\ \eta = \frac{dT}{d\dot y},$$

folglich nach (b) und (c)

(f) $$u = \frac{1}{A}(\xi\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta),\ v = \frac{1}{B}(-\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta),\ \dot\vartheta = \frac{\lambda}{\mu},$$

(g) $$\begin{cases}\dot x = \left(\frac{\cos^2\vartheta}{A} + \frac{\sin^2\vartheta}{B}\right)\xi + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,.\,\eta,\\ \dot y = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta\,.\,\xi + \left(\frac{\sin^2\vartheta}{A} + \frac{\cos^2\vartheta}{B}\right)\eta,\end{cases}$$

und die Bewegungsgleichungen gehen über in

$$
\text{(h)} \quad \begin{cases} \mu \dfrac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \dfrac{A-B}{2AB} \{(-\xi^2 + \eta^2) \sin 2\vartheta + 2\xi\eta \cos 2\vartheta\} = L, \\ \dfrac{d\xi}{dt} = X, \ \dfrac{d\eta}{dt} = Y. \end{cases}
$$

Der einfache Fall $X = 0$, $Y = 0$, $L = 0$ ist von besonderem Interesse. Es ist dann jede der Grössen ξ, η constant; wir können daher die Axen OX, OY so wählen, dass η verschwindet. Dann liefert uns (g) zwei erste Integrale der Bewegungsgleichungen

$$
\text{(k)} \qquad \dot{x} = \xi\left(\frac{\cos^2\vartheta}{A} + \frac{\sin^2\vartheta}{B}\right), \ \dot{y} = -\frac{A-B}{2AB}\xi \sin 2\vartheta,
$$

und die erste der Gleichungen (h) verwandelt sich in

$$
\text{(l)} \qquad \mu \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{A-B}{2AB}\xi^2 \sin 2\vartheta = 0.
$$

Wird in dieser Gleichung für einen Augenblick

$$
2\vartheta = \varphi \text{ und } \frac{A-B}{AB}\xi^2 = gW
$$

geschrieben, so geht sie über in

$$
\mu \frac{d^2\varphi}{dt^2} + gW \sin \varphi = 0,
$$

und dies ist die Bewegungsgleichung eines gemeinen Pendels, welches die Masse W und in Beziehung auf seine feste Axe das Trägheitsmoment μ hat, wenn φ der Winkel ist, um welchen es zur Zeit t von der Gleichgewichtslage abgelenkt ist. Das Endintegral dieser Gleichung drückt, wie wir in der Kinetik sehen werden, φ vermittels einer elliptischen Function durch t aus. Wird der auf diese Weise für ϑ oder $\frac{1}{2}\varphi$ gefundene Werth in (k) eingesetzt, so erhalten wir Gleichungen, welche, auf die gewöhnliche Weise integrirt, x und y durch t ausgedrückt liefern; die vollständige Lösung des vorliegenden Problems ist somit auf Quadraturen zurückgeführt. Es ist höchst interessant, die vom Reactionsmittelpunkt wirklich beschriebene Curve und die Lage, welche die Axe des Körpers in einem beliebigen Augenblick hat, zu bestimmen. Diese Bestimmung kann näherungsweise sehr leicht für den Fall sehr kleiner angularer Vibrationen geschehen, d. h. wenn entweder $A - B$ positiv und φ beständig sehr klein, oder $A - B$ negativ und φ sehr wenig von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden ist. Aber auch ohne für jetzt auf die exacten oder approximativen Endintegrale Rücksicht zu nehmen, ersehen wir aus (k) und (l) Folgendes: —

333. Wenn ein Rotationskörper in einer unendlichen Flüssigkeit um eine zur Axe seiner Figur senkrechte Axe in Bewegung gesetzt, oder wenn er einfach ohne Rotation nach irgend einer Rich-

tung hin geworfen wird, so wird seine Axe beständig in einer Ebene bleiben und jeder seiner Punkte sich nur parallel dieser Ebene bewegen. Die seltsamen Schwankungen, die er im Allgemeinen verrichten wird, lassen sich völlig durch den Vergleich mit einem gemeinen Pendel definiren. Dies zu zeigen, wollen wir zunächst der Kürze wegen einen Körper, welcher sich nach demselben Gesetze in Beziehung auf einen Quadranten zu jeder Seite seiner Gleichgewichtslage um eine Axe bewegt, wie sich das gemeine Pendel in Beziehung auf einen Halbkreis zu jeder Seite bewegt, ein Quadrantpendel nennen. (Wir werden diesen Begriff später in der Lehre von der Elektricität und vom Magnetismus durch verschiedene Beispiele näher erläutern; ein solches Quadrantpendel ist z. B. eine langgestreckte Masse weichen Eisens, welche sich um eine verticale Axe in einem „gleichförmigen Felde magnetischer Kraft" drehen kann.)

Der in Rede stehende Körper werde nun durch einen Impuls ξ, der eine beliebige durch den Reactionsmittelpunkt gehende Richtung hat, und durch ein impulsives Kräftepaar λ in Bewegung gesetzt, das sich in der Ebene dieser Richtung und der Axe befindet. Es wird dies (wie wir später in der Theorie der statischen Kräftepaare zeigen werden) dieselbe Wirkung haben, wie ein einfacher Impuls ξ (der einem wirklichen Punkte des Körpers oder auch einem mit dem Körper durch eine unendlich leichte Verbindung verknüpften Punkte ertheilt wird) in einer gewissen Richtung, welche wir die Linie des resultirenden Impulses oder der resultirenden Bewegungsgrösse nennen wollen; diese Linie ist der ersteren parallel und hat von derselben den Abstand $\frac{\lambda}{\xi}$. Die Gesammtgrösse der erzeugten Bewegung ist natürlich (§ 295) gleich ξ. Der Körper wird sich nachher beständig den folgenden Bedingungen gemäss bewegen: — 1. Die Winkelgeschwindigkeit in Beziehung auf den Reactionsmittelpunkt folgt dem Gesetze des Quadrantpendels. 2. Der Abstand des Reactionsmittelpunktes von der Linie des resultirenden Impulses variirt einfach wie die Winkelgeschwindigkeit. 3. Die der Richtung des Impulses parallele Geschwindigkeit des Reactionsmittelpunktes wird erhalten, wenn man den Ueberschuss der ganzen constanten Energie der Bewegung über den Theil der Energie, welcher aus der Winkelgeschwindigkeit um den Reactionsmittelpunkt herrührt, durch die halbe Bewegungsgrösse dividirt. 4. Wenn A, B und μ Constanten bezeichnen, welche von der Masse des festen Körpers, von deren Vertheilung, von der Dichtigkeit der Flüssigkeit

und von der Form und den Dimensionen des festen Körpers abhängen, so dass $\frac{\xi^2}{A}, \frac{\xi^2}{B}, \frac{\lambda^2}{\mu}$ die linearen Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeit sind, welche beziehungsweise ein längs der Axe ertheilter Impuls ξ, ein in einer durch den Reactionsmittelpunkt gehenden zur Axe senkrechten Richtung ertheilter Impuls ξ und ein in einer durch die Axe gehenden Ebene wirkendes impulsives Kräftepaar λ erzeugen, so ist die Länge des einfachen Gravitationspendels, dessen Bewegung mit der in Rede stehenden periodischen Bewegung Schritt halten würde, $\frac{g \mu A B}{\xi^2 (A - B)}$, und wenn die angulare Bewegung vibratorisch ist, so werden die Vibrationen, je nachdem $A > B$, oder $A < B$ ist, darin bestehen, dass entweder die Axe oder eine zur Axe senkrechte Linie zu jeder Seite der Linie des Impulses vibrirt. Die angulare Bewegung wird in der That vibratorisch sein, wenn der Abstand der Linie des resultirenden Impulses von dem Reactionsmittelpunkt etwas kleiner als $\sqrt{\frac{(A \backsim B)\mu}{AB}} \cos\alpha$ ist, wo α, je nachdem $A > B$ oder $A < B$ ist, entweder die Neigung des Impulses gegen die anfängliche Lage der Axe, oder das Complement dieses Winkels bezeichnet. In diesem Falle wird die Bahn des Reactionsmittelpunktes eine zu beiden Seiten der Linie des Impulses symmetrische Sinuscurve sein; so oft sie diese Linie schneidet, kehrt die angulare Bewegung um, und ist die grösste Neigung erreicht, und so oft der Reactionsmittelpunkt sich nach einer Seite hin in seinem grössten Abstande befindet, hat die Winkelgeschwindigkeit ihren grössten, positiven oder negativen, Werth und die lineare Geschwindigkeit des Reactionsmittelpunktes ihren kleinsten Werth. Wenn andererseits der Abstand der Linie des resultirenden Impulses von dem Reactionsmittelpunkt grösser als $\sqrt{\frac{(A \backsim B)\mu}{AB}} \cos\alpha$ ist, so wird die angulare Bewegung beständig in einer Richtung erfolgen, aber periodisch zunehmen und abnehmen, und der Reactionsmittelpunkt wird auf einer Seite jener Linie eine Sinuscurve beschreiben; seine Abweichung wird am grössten und kleinsten sein, wenn die Winkelgeschwindigkeit am grössten und kleinsten ist. In denselben Punkten ist die Krümmung der Bahn beziehungsweise am grössten und kleinsten und die lineare Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes am kleinsten und grössten.

334. Die längs der Axe des festen Körpers und senkrecht zu derselben genommenen linearen Geschwindigkeitscomponenten sind

in irgend einem Augenblick beziehungsweise $\frac{\xi\cos\vartheta}{A}$ und $\frac{\xi\sin}{B}$
wenn ϑ die Neigung dieser Axe gegen die Linie des resultiren
Impulses ist, und die Winkelgeschwindigkeit ist $\frac{\xi y}{\mu}$, wenn y der
stand des Reactionsmittelpunktes von der letztgenannten Linie
Die gesammte kinetische Energie der Bewegung ist daher

$$\frac{\xi^2\cos^2\vartheta}{2A}+\frac{\xi^2\sin^2\vartheta}{2B}+\frac{\xi^2 y^2}{2\mu},$$

und das letzte Glied dieses Ausdrucks ist der schon erwähnte T
der Energie, welcher aus der Rotation um den Reactionsmittelpu
herrührt. Um die ganze Bewegung in irgend einem Augenb
zum Stillstand zu bringen, bedarf es nur eines ξ gleichen und
gegengesetzten einfachen Impulses in der festen Linie des resulti
den Impulses (oder natürlich, nach dem schon angegebenen Prin
eines gleichen und parallelen Impulses in irgend einer durch
Körper gehenden Linie und zugleich des passenden impulsi
Kräftepaares.)

335. Wenn man Lagrange's Gleichungen, wie oben, auf d
Fall eines sich durch eine Flüssigkeit bewegenden festen Rotation
körpers anwendet, so ergiebt sich für das Kräftepaar, welch
beständig auf ihn einwirken muss, damit er sich nicht drehe, u
mittelbar

$$uv(A-B),$$

wenn u und v die längs der Axe und senkrecht zu derselben g
nommenen Geschwindigkeitscomponenten sind, oder [§ 332 (f)]

$$\xi^2\frac{(A-B)\sin 2\vartheta}{2AB},$$

wenn wieder ξ den erzeugenden Impuls und ϑ den zwischen d
Richtung desselben und der Axe enthaltenen Winkel bezeichne
Die Richtung dieses Kräftepaares muss eine solche sein, dass ϑ ve
hindert wird, abzunehmen oder zuzunehmen, je nachdem $A > B$
oder $A < B$ ist. Das erstere wird offenbar bei einer platten Scheib
oder einem abgeplatteten Sphäroid, das letztere bei einem gestreck
ten oder eiförmigen Körper der Fall sein. In der Hydrodynami
werden wir die wirklichen Werthe von A und B für mehrere Fäll
berechnen lernen; darunter befinden sich der Fall eines von zw

Kugeloberflächen begrenzten Körpers, die einander unter einem Winkel schneiden, der ein beliebiges Submultiplum von zwei rechten Winkeln ist, der Fall zweier starr verbundenen vollständigen Kugeln und der Fall eines abgeplatteten oder eines gestreckten Sphäroids.

336. Das Bestreben eines Körpers, seine flache Seite oder seine Länge (wie der Fall sein mag) quer gegen die Richtung seiner Bewegung durch eine Flüssigkeit zu drehen, aus welchem Bestreben die Beschleunigungen und Verzögerungen der in § 333 beschriebenen rotirenden Bewegung herrühren, und für welches wir jetzt das statische Maass erhalten haben, ist eine bemerkenswerthe Erläuterung des Ausspruchs des § 330 und steht in engem Zusammenhange mit der dynamischen Erklärung vieler in der praktischen Mechanik wohlbekannten Erscheinungen, von denen wir die folgenden anführen: Das Schleppseil eines Canalbootes nimmt, wenn es an der Seite des Bootes befestigt ist, und wenn das Steuerruder gerade gelassen wird, eine Lage in einer verticalen Ebene an, welche die Axe vor ihrem Mittelpunkte schneidet. Wenn ein Boot von einem Manne mit zwei Rudern schnell quer gegen den Wind fortgerudert wird, so muss immer (ausser wenn es hinsichtlich der Tiefe, die seine verschiedenen Theile im Wasser haben, und hinsichtlich der Grösse der nach seinen beiden Enden zu dem Winde ausgesetzten Oberflächen ausserordentlich unsymmetrisch ist) am Ruder auf der Windseite stärker gearbeitet werden, damit es sich nicht gegen den Wind hin wende; aus demselben Grunde trägt ein segelndes Schiff gewöhnlich „ein Wettersteuer“ *). Bei schwerem Winde ist es ausserordentlich schwer und oft unmöglich, ein Schiff aus dem hohlen Raume zwischen zwei Wellen zu bringen, und es kann dies überhaupt nur durch schnelle Vorwärtsbewegung, sei es vermittels des Dampfes oder vermittels der Segel, geschehen. Ein längliches Geschoss muss schnell um seine Axe rotiren, damit seine Spitze vorn bleibe. Unzweifelhaft gleichen die merkwürdigen Bewegungen einer schräg ins Wasser fallen gelassenen flachen Scheibe, Austerschale, oder dergl. in gewissem Grade den Bewegungen, die wir in § 333 beschrieben haben. Man darf aber nicht vergessen, dass die realen Umstände, der Reibung der Flüssigkeit wegen, von denjenigen des abstracten Problems bedeutend abweichen. Wir wollen dies Problem für jetzt verlassen.

*) d. h. der Griff des Steuerruders muss dem Winde zugekehrt werden.

337. Kleine Abweichungen vom Gleichgewicht. — Mit Hülfe der Lagrange'schen Form der Bewegungsgleichungen, § 329, können wir jetzt, als Einleitung zur Betrachtung der Stabilität der Bewegung, die Bewegung eines Systems untersuchen, welches unendlich wenig aus einer Gleichgewichtslage herausgebracht ist und sich frei bewegen kann, während die Geschwindigkeiten seiner Theile anfänglich unendlich klein sind. Die Gleichungen, die sich ergeben, liefern die Werthe der unabhängigen Coordinaten für jede spätere Zeit, vorausgesetzt dass die Verschiebungen unendlich klein bleiben. Die mathematischen Ausdrücke für ihre Werthe müssen natürlich die Natur des Gleichgewichts zeigen und geben zu gleicher Zeit ein interessantes Beispiel der Coexistenz kleiner Bewegungen, § 89. Die Methode besteht einfach darin, zu finden, was aus den Bewegungsgleichungen und den Integralen derselben für Coordinaten, die unendlich wenig von den einer Gleichgewichtsconfiguration entsprechenden Werthen verschieden sind, und für eine anfängliche unendlich kleine kinetische Energie wird. Die Lösung dieser Differentialgleichungen ist immer leicht, da sie linear sind und constante Coefficienten haben. Wenn die Lösung zeigt, dass die Aenderungen in den Werthen der Coordinaten unendlich klein bleiben, so ist die Lage die eines stabilen Gleichgewichts; zeigt sie dagegen, dass eine oder mehrere jener Aenderungen unbegrenzt wachsen können, so kann eine unendlich kleine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage eine Entfernung von derselben zur Folge haben, die von endlicher Grösse ist, und das Gleichgewicht ist somit instabil.

Da das System eine Gleichgewichtslage inne hat, so müssen die kinematischen Relationen unveränderlich sein. Wie früher ist

$$(1)\qquad T = \tfrac{1}{2}\{(\psi,\psi)\dot{\psi}^2 + (\varphi,\varphi)\dot{\varphi}^2 + 2(\psi,\varphi)\dot{\psi}\dot{\varphi} + \text{u. s. w.}\},$$

und dieser Ausdruck kann für keine Werthe der Coordinaten negativ sein. Nun sind zwar die Werthe der Coefficienten in diesem Ausdruck im Allgemeinen nicht constant; wir haben sie aber in unserer approximativen Untersuchung als constant anzusehen, da ihre Variationen, die von den unendlich kleinen Variationen von ψ, φ, u. s. w. abhängen, nur Glieder mit unendlich kleinen Grössen der dritten Ordnung oder höherer Ordnungen enthalten können. Lagrange's Bewegungsgleichungen werden also einfach

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\psi}}\right) = \Psi,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) = \Phi,\ \text{u. s. w.},$$

und das erste Glied jeder dieser Gleichungen ist eine lineare Function von $\ddot{\psi}$, $\ddot{\varphi}$, u. s. w. mit constanten Coefficienten.

Da wir nun für die allgemeinen Coordinaten einen ganz beliebigen Anfangspunkt wählen können, so empfiehlt es sich, ψ, φ, ϑ, u. s. w. von der betrachteten Gleichgewichtslage aus zu messen, so dass die Werthe dieser Coordinaten beständig unendlich klein sind.

Wir erhalten also, wenn wir die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnungen vernachlässigen und voraussetzen, dass die Kräfte von den Geschwindigkeiten unabhängig sind, Ψ, Φ, u. s. w. als lineare Functionen von ψ, φ, u. s. w. ausgedrückt, die wir in folgender Weise schreiben können: —

$$(3)\qquad \begin{cases} \Psi = a\psi + b\varphi + c\vartheta + \cdots \\ \Phi = a'\psi + b'\varphi + c'\vartheta + \cdots \\ \text{u. s. w., u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) werden folglich lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten, und ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der zu bestimmenden Veränderlichen ψ, φ, u. s. w.

Die in den elementaren Lehrbüchern der Differentialgleichungen dargelegten gewöhnlichen Methoden führen natürlich, unabhängig von jeder besonderen Relation zwischen den Coefficienten, zu einer allgemeinen Form der Lösung (§ 343). Diese Form hat aber im Falle eines conservativen Systems sehr bemerkenswerthe charakteristische Eigenschaften, und daher wollen wir diesen Fall zuerst besonders untersuchen. In demselben ist

$$\Psi = -\frac{dV}{d\psi},\quad \Phi = -\frac{dV}{d\varphi},\ \text{u. s. w.},$$

wo V in unserer approximativen Untersuchung eine homogene quadratische Function von $\psi, \varphi, \ldots$ ist, wenn wir den Anfang oder die Gleichgewichtsconfiguration als die Configuration annehmen, von welcher aus (§ 273) die potentielle Energie gerechnet wird. Nun geht aus der Theorie der Transformation der quadratischen Functionen hervor*), dass wir

---

*) Denn erstens liefert jede Annahme, wie

$$\begin{aligned} \psi &= A\psi_{,} + B\varphi_{,} + \cdots, \\ \varphi &= A'\psi_{,} + B'\varphi_{,} + \cdots, \\ &\text{u. s. w., u. s. w.,} \end{aligned}$$

Gleichungen, welche $\dot\psi, \dot\varphi$, u. s. w. durch $\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}$, u. s. w. ausdrücken, und zwar haben die Glieder in $\dot\psi_{,}, \dot\varphi_{,}$, u. s. w. gleichfalls die Coefficienten A, B, u. s. w., wenn diese letzteren von t unabhängig sind. Danach möge (die Anzahl der Coordinaten wird gleich i vorausgesetzt) der aus Gliedern in $\dot\psi^2, \dot\varphi^2, \dot\psi\dot\varphi$, u. s. w. bestehende quadratische Ausdruck für $2T$, dadurch dass man den Coefficienten A, B, u. s. w. geeignete Werthe beilegt, auf die Form $\dot\psi^2_{,} + \dot\varphi^2_{,} + \cdots$ reducirt werden. Dies kann auf unendlich viele Arten geschehen, ohne dass man eine Gleichung von einem höheren als dem ersten Grade zu lösen hätte, wie man leicht erkennt, wenn man einen synthetischen Process nach Analogie der Aufgabe: — Die einem beliebig gewählten Durchmesser eines Ellipsoides conjugirte Diametralebene und darauf in dem elliptischen Schnitt dieser Ebene den Durchmesser zu finden, welcher einem beliebig gewählten Durchmesser dieser Ellipse conjugirt ist — algebraisch ausarbeitet. Es sei nun

durch eine ganz bestimmte lineare Coordinatentransformation den seiner Natur nach positiven Ausdruck für $2T$ auf eine Summe von Quadraten der allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten und zu gleicher Zeit V auf eine Summe von Quadraten der entsprechenden Coordinaten reduciren können, wobei jedes Quadrat des letzteren Ausdrucks mit einer positiven oder negativen, aber reellen Constanten multiplicirt sein wird. Es können folglich ψ, φ, u. s. w. so gewählt werden, dass

$$(4) \qquad \begin{cases} T = \frac{1}{2}(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \text{ u. s. w.}) \\ V = \frac{1}{2}(\alpha\psi^2 + \beta\varphi^2 + \text{u. s. w.}) \end{cases}$$

ist, wo α, β, u. s. w. positive oder negative reelle Constanten sind. Lagrange's Bewegungsgleichungen werden somit

$$(5) \qquad \ddot{\psi} = -\alpha\psi, \quad \ddot{\varphi} = -\beta\varphi, \text{ u. s. w.}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind

$$(6) \qquad \psi = A \sin(t\sqrt{\alpha} + \varepsilon), \quad \varphi = A' \sin(t\sqrt{\beta} + \varepsilon'), \text{ u. s. w.,}$$

wo $A, \varepsilon, A', \varepsilon', \ldots$ die willkürlichen Integrationsconstanten sind. Wi schliessen daraus, dass die Bewegung aus einer einfachen harmonisch Variation jeder Coordinate besteht, vorausgesetzt dass jede der Grös α, β, u. s. w. positiv ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn V in d Gleichgewichtsconfiguration ein wirkliches Minimum ist, was, wie w gesehen haben (§ 292), nothwendig bei einem stabilen Gleichgewicht d Fall ist. Wenn eine oder mehrere der Grössen α, β, u. s. w. verschwi den, so kann das Gleichgewicht stabil, unstabil oder neutral sein und, u

---

$$\begin{aligned} \psi_{,} &= l\psi_{,,} + m\varphi_{,,} + \cdots, \\ \varphi_{,} &= l'\psi_{,,} + m'\varphi_{,,} + \cdots, \\ &\text{u. s. w., u. s. w.,} \end{aligned}$$

wo $l, m, \ldots, l', m', \ldots$ den Gleichungen

$$l l' + m m' + \cdots = 0, \quad l' l'' + m' m'' + \cdots = 0, \text{ u. s. w.,}$$

und

$$l^2 + m^2 + \cdots = 1, \quad l'^2 + m'^2 + \cdots = 1, \text{ u. s. w.}$$

genügen. Wir werden dann offenbar noch dieselbe Form für $2T$ haben, nämli

$$2T = \dot{\psi}_{,,}^2 + \dot{\varphi}_{,,}^2 + \cdots,$$

und es lassen sich, wie wir aus der Theorie der Transformation der quadratisch Functionen wissen, $l, m, \ldots, l', m', \ldots$ so annehmen, dass die Producte der Co dinaten aus dem Ausdruck für V verschwinden und man

$$2V = \alpha\psi_{,,}^2 + \beta\varphi_{,,}^2 + \cdots$$

erhält, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die nothwendig reellen Wurzeln einer Gleichung [ten] Gi des sind, deren Coefficienten von den Coefficienten abhängen, welche die Grös $\psi_{,}^2, \varphi_{,}^2, \psi_{,}\varphi_{,}, \ldots$ in dem Ausdruck für V haben. Später [§ 343, (7) und (werden wir angeben, wie diese Untersuchung, wenn T und V als zwei belieb homogene quadratische Functionen gegeben sind, durch einen einzigen Proce ausgeführt werden kann.

seine Natur zu bestimmen, müssen Glieder höherer Ordnung in der Entwicklung von V nach aufsteigenden Potenzen und Producten der Coordinaten untersucht werden; wenn das Gleichgewicht stabil wäre, so würde die Periode einer unendlich kleinen Oscillation in dem Werthe der entsprechenden Coordinate oder der entsprechenden Coordinaten unendlich gross sein. Wenn die Grössen α, β, u. s. w. zum Theil oder sämmtlich negativ sind, so ist V kein Minimum und das Gleichgewicht (§ 292) unstabil. Die Form (6) der Lösung wird für jede Coordinate, für welche dies der Fall ist, imaginär und muss auf die Exponentialform reducirt werden. Ist z. B. $\alpha = -\alpha'$, wo α' positiv ist, so folgt

$$\psi = A e^{+t\sqrt{\alpha'}} + B e^{-t\sqrt{\alpha'}}, \tag{7}$$

welcher Ausdruck (ausser wenn die Störung des Gleichgewichts so gerichtet wird, dass die willkürliche Constante A verschwindet) eine unbegrenzte Zunahme der Abweichung von der Gleichgewichtslage anzeigt. Diese Form der Lösung drückt das Gesetz aus, nach welchem das System eine Configuration unstabilen Gleichgewichts näherungsweise verlässt. Im Allgemeinen wird die Annäherung natürlich immer ungenauer, je grösser die Abweichung wird.

Für jetzt wird ein Beispiel genügen. Ein in eine unendliche Flüssigkeit (§ 331) eingetauchter fester Körper werde verhindert, irgend eine rotirende Bewegung anzunehmen, und möge nur im Stande sein, sich parallel einer gewissen festen Ebene zu bewegen; er stehe unter dem Einfluss von Kräften, welche dem conservativen Gesetze unterworfen sind, und welche in einer besonderen Gleichgewichtslage verschwinden. Wir nehmen in dem Körper einen beliebigen Punkt an, wählen die Lage, die er inne hat, wenn der Körper im Gleichgewicht ist, als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten OX, OY und rechnen von ihm aus die potentielle Energie. Dann ist, wie im Allgemeinen,

$$2T = A\dot{x}^2 + B\dot{y}^2 + 2C\dot{x}\dot{y},$$
$$2V = ax^2 + by^2 + 2cxy,$$

da die oben in § 331 angegebenen Principien uns gestatten, das System als durch die Coordinaten x und y vollständig bestimmt anzusehen, unter der Voraussetzung, die wir immer machen, dass, wenn der Körper in Ruhe gegeben oder zur Ruhe gebracht wird, die ganze Flüssigkeitsmasse zu gleicher Zeit sich in Ruhe befindet. Lösen wir das offenbar ganz bestimmte Problem: — das Paar conjugirter Durchmesser zu finden, welches für die Ellipse

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy = const.$$

und für die Ellipse oder Hyperbel

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = const.$$

dieselben Richtungen hat — und wählen diese Richtungen als Axen schiefwinkliger Coordinaten (x_1, y_1), so werden wir

$$2T = A_1\dot{x}_1^2 + B_1\dot{y}_1^2 \text{ und } 2V = a_1x_1^2 + b_1y_1^2$$

erhalten. Da nun A_1 und B_1 ihrer Natur nach positiv sind, so können wir, zur Vereinfachung unserer Ausdrücke,

$$x_1 \sqrt{A_1} = \psi,\ y_1 \sqrt{B_1} = \varphi$$

setzen und erhalten

$$2\,T = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2,\ 2\,V = \alpha\,\psi^2 + \beta\,\varphi^2,$$

also Ausdrücke von der oben (4) angegebenen Form.

Die Interpretation der allgemeinen Lösung ist folgende: —

338. Wenn ein conservatives System unendlich wenig aus einer Configuration stabilen Gleichgewichts herausgebracht wird, so wird es hinterher beständig um diese Configuration vibriren und derselben unendlich nahe bleiben, indem jeder Punkt des Systems eine Bewegung vollführt, die aus einfachen harmonischen Vibrationen besteht. Wenn i Grade von Bewegungsfreiheit vorhanden sind, und wir ein beliebiges System allgemeiner Coordinaten (§ 202) betrachten, welche die Lage des Systems für jede Zeit ausdrücken, so wird die Abweichung einer jeden dieser Coordinaten von dem Werthe, den sie in der Gleichgewichtsconfiguration hat, einer zusammengesetzten harmonischen Function (§ 68) gemäss variiren, die im Allgemeinen aus i einfachen harmonischen Functionen von incommensurabelen Perioden besteht, und daher (§ 67) wird die ganze Bewegung des Systems nicht periodisch durch dieselbe Reihe von Configurationen hindurchgehen. Es giebt jedoch im Allgemeinen i verschiedene bestimmte Verschiebungen, die wir Normalverschiebungen nennen werden, und die der Bedingung genügen, dass, wenn irgend eine von ihnen allein erzeugt und das System darauf für einen Augenblick sich selbst in Ruhe überlassen wird, diese Verschiebung einer einfachen harmonischen Function der Zeit gemäss periodisch ab- und zunimmt, und dass folglich jeder Punkt des Systems eine einfache harmonische Bewegung in derselben Periode vollführt. Dieses Resultat umfasst, wie wir später sehen werden, Fälle, in denen unendlich viele Grade von Bewegungsfreiheit vorhanden sind, z. B. die Bewegungen einer gespannten Schnur, einer in einem geschlossenen Gefässe befindlichen Luftmasse; Wellen im Wasser oder Oscillationen in einem Gefäss mit Wasser, das von begrenzter Ausdehnung ist; Wellen in einem elastischen festen Körper. Auf diese Fälle angewandt liefert es die Theorie der sogenannten „Fundamentalvibration" und der successiven „harmonischen Bewegungen" der Saite, sowie der verschiedenen einfachen Vibrationsarten, die in den anderen Fällen möglich sind.

339. Wenn die Perioden der Vibrationen für zwei oder mehrere Normalverschiebungen gleich sind, wie es in besonderen Fällen vorkommen kann, so genügt jede aus denselben zusammengesetzte Verschiebung gleichfalls der Bedingung einer Normalverschiebung. Und wenn das System irgend einer solchen Normalverschiebung gemäss verschoben und seinen Punkten zugleich Geschwindigkeiten mitgetheilt werden, welche einer zweiten Normalverschiebung entsprechen, so wird es eine Bewegung vollführen, welche die Resultante zweier einfachen harmonischen Bewegungen von gleichen Perioden ist. Die graphische Darstellung der Variation der entsprechenden Coordinaten des Systems wird folglich (§ 65), wenn man dieselben als zwei rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene verzeichnet, ein Kreis oder eine Ellipse sein; dies wird natürlich auch die Gestalt der Bahn jedes Punktes des Systems sein, welcher für zwei der in Rede stehenden Verschiebungen eine verschiedene Bewegungsrichtung hat. Man vergesse aber nicht, dass einige der Hauptheile (wie z. B. der im Beispiel C des § 330 von der festen Axe getragene Körper) vielleicht nur einen Grad von Freiheit haben, ja dass vielleicht sogar jeder Theil des Systems nur einen Grad von Freiheit hat, wie z. B. wenn das System aus einer Reihe von materiellen Punkten besteht, deren jeder gezwungen ist, auf einer gegebenen Linie zu bleiben, oder wenn es aus starren Körpern auf festen Axen besteht, die vermittels elastischer Schnüre oder auf sonst eine Weise auf einander einwirken. In einem Falle, wie der letztere ist, kann sich kein Punkt des Systems anders als in einer Linie bewegen, und die Ellipse, der Kreis, oder die sonstige graphische Darstellung der Zusammensetzung der harmonischen Bewegungen des Systems ist dann nur ein Mittel zur Erleichterung des Verständnisses und nicht eine Darstellung einer Bewegung, die in irgend einem Theile des Systems wirklich stattfindet.

340. Dissipative Systeme. — In der Natur ist, wie schon oben (§ 278) gesagt wurde, jedes System, auf welches keine ausserhalb desselben befindliche Materie einwirkt, conservativ, wenn ausser den sichtbaren Bewegungen und den messbaren Kräften auch noch die Molecularbewegungen, welche als Wärme, Licht und Magnetismus erscheinen, sowie die potentielle Energie der chemischen Affinitäten in Rechnung gezogen werden. Praktisch sind wir aber in der abstracten Dynamik (§ 275) genöthigt, die Kräfte der Reibung und die Widerstände der anderen oben genannten Classen als die Ursache eines Verlustes von Energie in Rechnung zu ziehen, ohne dass wir dabei auf die Aequivalente in Form von Wärme oder anderer Molecularwirkun-

gen, die sie hervorbringen, Rücksicht nehmen. Wenn demnach solche Widerstände in Rechnung gezogen werden sollen, so müssen Kräfte, die den Bewegungen der verschiedenen Theile eines Systems entgegengesetzt gerichtet sind, in die Gleichungen eingeführt werden. Nach unserer auf experimentellem Wege erlangten approximativen Kenntniss sind diese Kräfte, wenn sie aus der Reibung fester Körper entspringen, von den Geschwindigkeiten unabhängig; sie sind einfach den Geschwindigkeiten proportional, wenn sie direct in der Zähigkeit der Flüssigkeiten, oder in elektrischen oder magnetischen Einwirkungen ihren Grund haben, wobei aber noch Correctionen anzubringen sind, die von den Aenderungen der Temperatur und von den Formänderungen des Systems abhängen. In Folge der letzterwähnten Ursache scheint der Widerstand einer realen Flüssigkeit (die immer mehr oder weniger zähe ist) gegen einen Körper, der sich sehr schnell durch sie hin bewegt und eine beträchtliche unregelmässige Bewegung, wie die „Wirbel“ in seinem Kielwasser zurücklässt, nahezu dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional zu sein, obgleich, wie Stokes gezeigt hat, der Widerstand bei sehr kleinen Geschwindigkeiten wahrscheinlich einfach der Geschwindigkeit proportional ist und für jede Geschwindigkeit wenigstens näherungsweise als die Summe zweier Glieder ausgedrückt werden kann, von denen das eine der Geschwindigkeit, das andere dem Quadrate derselben proportional ist.

341. Die Wirkung der Reibung zwischen zwei einander berührenden festen Körpern besteht einfach darin, dass sie die unendlich kleinen Vibrationen, mit denen wir es jetzt besonders zu thun haben, unmöglich macht, und jedem System, in welchem sie vorhanden ist, gestattet, in Ruhe zu bleiben, wenn es innerhalb gewisser endlicher Grenzen aus einer Configuration reibungslosen Gleichgewichts herausgebracht worden ist. In der Mechanik ist es leicht, ihre Wirkungen mit hinlänglicher Genauigkeit zu schätzen, wenn irgend ein praktischer Fall endlicher Vibrationen in Frage steht. Die anderen Classen dissipativer Ursachen dagegen rufen Widerstände hervor, welche, abgesehen von den erwähnten Correctionen, einfach den Geschwindigkeiten proportional sind, wenn die Bewegungen unendlich klein sind, und können nie das System in einer Configuration in Ruhe erhalten, die, wenn auch noch so wenig, von einer Configuration reibungslosen Gleichgewichts abweicht. In der Theorie der unendlich kleinen Vibrationen sind sie dadurch in Rechnung zu bringen, dass man zu den Ausdrücken für die verallgemeinerten Kräftecomponenten Glieder addirt, deren jedes das Product

aus einer Constanten in eine der verallgemeinerten Geschwindigkeitscomponenten ist, wodurch wir Gleichungen erhalten, die immer noch in bemerkenswerther Weise einer streng mathematischen Behandlung fähig sind. Das Resultat der Integration für den Fall eines einzigen Grades von Freiheit ist sehr einfach und sowohl für die Erklärung vieler Naturerscheinungen, als auch zum Gebrauch bei einer Menge experimenteller Untersuchungen von der grössten Bedeutung. Wir lassen einige partielle Folgerungen, die man aus ihm zieht, zunächst in Worten folgen: —

342. Wenn der Widerstand in irgend einem besonderen Falle eine gewisse Grenze nicht überschreitet, so ist die Bewegung eine einfache harmonische Oscillation, deren Amplitude in aufeinander folgenden gleichen Zeitintervallen um gleiche Bruchtheile abnimmt. Wenn aber der Widerstand über diese Grenze hinausgeht, so kehrt das System, wenn man es aus seiner Gleichgewichtslage herausbringt und darauf sich selbst überlässt, allmälig zu seiner Gleichgewichtslage zurück, ohne je durch sie hindurch nach der anderen Seite hin zu oscilliren, und erreicht dieselbe erst nach Ablauf einer unendlich grossen Zeit.

Es sei für die Einheit der Verschiebung n^2 die Grösse, welche die Beschleunigung haben würde, wenn kein Widerstand vorhanden wäre, so dass wir (§ 57) $T = \frac{2\pi}{n}$ haben; ferner sei k die Grösse der Verzögerung, welche der der Einheit der Geschwindigkeit entsprechende Widerstand herbeiführt. Dann ist die Bewegung oscillirend oder nicht, je nachdem $k < 2n$ oder $k > 2n$ ist. Im ersteren Falle wächst die Periode der Oscillation in Folge des Widerstandes von T auf $T\frac{n}{(n^2 - \frac{1}{4}k^2)^{1/2}}$, und der natürliche Logarithmus der Amplitude nimmt in der Zeiteinheit um $\frac{1}{2}k$ ab.

343. Unendlich kleine Bewegung eines dissipativen Systems. — Die allgemeine Lösung des Problems, die Bewegung eines Systems zu finden, welches eine beliebige Anzahl, i, Grade von Freiheit hat und, nachdem es unendlich wenig aus einer Gleichgewichtslage herausgebracht worden, freigelassen wird, so dass es sich nun unter dem Einfluss von Widerständen bewegt, welche den Geschwindigkeiten proportional sind, zeigt, dass die Gesammtbewegung im Allgemeinen auf bestimmte Weise in $2i$ verschiedene Bewegungen zerlegt werden kann, deren jede entweder einfach harmo-

nisch ist und dann eine nach dem oben angegebenen Gesetze (§ 342) abnehmende Amplitude hat, oder nicht oscillirend ist und dann darin besteht, dass die Verschiebungscomponenten in successiven gleichen Zeitintervallen Verminderungen um gleiche Bruchtheile erfahren.

Für den Fall eines Grades von Freiheit ist die Differentialgleichung der Bewegung

$$\ddot{\psi} + k\dot{\psi} + n^2\psi = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$\psi = \{A \sin n't + B \cos n't\}\, e^{-\frac{1}{2}kt},$$

wo $n' = \sqrt{(n^2 - \frac{1}{4}k^2)}$ ist, oder, was dasselbe ist,

$$\psi = (C e^{-n_, t} + C' e^{n_, t})\, e^{-\frac{1}{2}kt},$$

wo $n_, = \sqrt{(\frac{1}{4}k^2 - n^2)}$ ist; im ersteren Falle sind A und B, im zweiten C und C' die willkürlichen Integrationsconstanten. Es ergeben sich daraus die für diesen Fall in § 342 ausgesprochenen Sätze.

Die allgemeinsten Voraussetzungen, die wir hinsichtlich der unendlich kleinen Bewegungen eines Systems machen können, liefern als Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\psi}}\right) + \dfrac{d}{dt}(\mathfrak{A}\psi + \mathfrak{B}\varphi + \cdots) + a\psi + b\varphi + \cdots = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{d\dot{\varphi}}\right) + \dfrac{d}{dt}(\mathfrak{A}'\psi + \mathfrak{B}'\varphi + \cdots) + a'\psi + b'\varphi + \cdots = 0 \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

(Kräfte nicht conservativer Art, die von der Lage, nicht von der Bewegung abhängen, sind nicht ausgeschlossen, ausser wenn die Relationen $b = a'$, $c = a''$, u. s. w. gelten.)

Die Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten lehrt, dass die allgemeine Lösung für jede Coordinate die Summe besonderer Lösungen ist, und dass eine besondere Lösung die Form

$$(2)\quad \psi = l e^{\lambda t},\ \varphi = m e^{\lambda t},\ \text{u. s. w.}$$

hat. Nehmen wir an, die Ausdrücke (2) seien eine Lösung, und setzen sie in die Differentialgleichungen ein, so folgt

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda^2 \dfrac{d\mathfrak{T}}{dl} + \lambda(\mathfrak{A}l + \mathfrak{B}m + \cdots) + al + bm + \cdots = 0 \\ \lambda^2 \dfrac{d\mathfrak{T}}{dm} + \lambda(\mathfrak{A}'l + \mathfrak{B}'m + \cdots) + a'l + b'm + \cdots = 0 \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

wo $\mathfrak{T}$ dieselbe homogene quadratische Function von $l, m, \ldots$ bezeichnet, welche T von $\dot\psi, \dot\varphi, \ldots$ ist. Diese i Gleichungen bestimmen λ durch die Determinantengleichung

$$\text{4)}\qquad \begin{vmatrix} (\lambda^2 A + \lambda \mathfrak{A} + a), & (\lambda^2 B + \lambda \mathfrak{B} + b), \ldots \\ (\lambda^2 A' + \lambda \mathfrak{A}' + a'), & (\lambda^2 B' + \lambda \mathfrak{B}' + b'), \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

renn A, B, C, A', B', C', u. s. w. die Coefficienten von l, m, n, u. s. w. in $\frac{d\mathfrak{T}}{dl}, \frac{d\mathfrak{T}}{dm}$, u. s. w. bezeichnen, welche natürlich den Relationen

$$\text{5)}\qquad B = A',\ C = A'',\ C' = B'', \text{ u. s. w.}$$

nterworfen sind. Die Gleichung (4) ist vom Grade $2i$ in λ. Wird eine hrer Wurzeln für λ in die i linearen Gleichungen (3) eingesetzt, so wern dieselben in Einklang gebracht und liefern die $i - 1$ Verhältnisse $: m, l : n$, u. s. w.; wir haben dann in (2) eine besondere Lösung mit ner willkürlichen Constanten l. Wenn demnach die $2i$ Wurzeln von (4) ngleich sind, so ergeben sich $2i$ verschiedene besondere Lösungen, jede it einer willkürlichen Constanten, und die Addition dieser Lösungen liert, wie schon gesagt, die allgemeine Lösung. Fälle, in welchen gleiche Vurzeln vorhanden sind, lassen eine entsprechende Anzahl Grade von nbestimmtheit in den Verhältnissen $l : m, l : n, \ldots$ zurück und gestatn so, die erforderliche Anzahl der willkürlichen Constanten zu erinzen.

Wenn die nicht aus der Bewegung herrührenden Kräfte zur conservtiven Classe gehören, so haben wir

$$\text{)}\qquad b = a',\ c = a'',\ c' = b'',$$

a, b, u. s. w. so beschaffen sind, dass

$$V = \tfrac{1}{2}(a\psi^2 + 2b\psi\varphi + 2c\psi\vartheta + \cdots + b'\varphi^2 + 2c'\varphi\vartheta + \cdots)$$

Wenn die Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$, u. s. w. entweder sämmtlich positiv d, oder wenn diejenigen derselben, die negative Werthe haben, auf the Grössen beschränkt sind, die sie in der Natur haben könnten, so ssen die Wurzeln der Gleichung für λ, falls sie reell sind, negativ sein; s sie aber imaginär sind, so müssen ihre reellen Theile negativ sein. mach kann jede besondere Lösung aus Gliedern von einer der beiden men

$$C e^{-pt} \sin qt,\quad C e^{-pt}$$

mmengesetzt werden, wo p positiv ist. Wir ersehen dies daraus, dass drücke wie $C e^{pt} \sin qt$ eine Bewegung darstellen würden, welche mit ändig zunehmender Energie durch die Gleichgewichtsconfiguration hin l her gehen würde. Eine mathematische Untersuchung dieser Bedinng ist unseres Wissens noch nicht angestellt worden und verdient die merksamkeit der Mathematiker.

Wir kommen wieder zum Falle, in welchem kein Widerstand vorhanden ist, wenn wir

$$\mathfrak{A} = 0, \mathfrak{B} = 0, \ldots, \mathfrak{A}' = 0, \ldots$$

nehmen. Die Determinantengleichung wird dann

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} (\lambda^2 A + a), & (\lambda^2 B + b), \ldots \\ (\lambda^2 A' + a'), & (\lambda^2 B' + b'), \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom Grade i in λ^2. Ihre i Wurzeln sind für den Fall eines conservativen Systems natürlich die Werthe von α, β, u. s. w. in unserer ersten Untersuchung (§ 337), und wir schliessen aus dem, was wir dort bewiesen haben, dass sie in diesem Falle sämmtlich reell sind. Die Gleichungen (3) zur Bestimmung von $l, m, \ldots$ werden dann

$$(8) \qquad \begin{cases} (\lambda^2 A + a) l + (\lambda^2 B + b) m + \cdots = 0 \\ (\lambda^2 A' + a') l + (\lambda^2 B' + b') m + \cdots = 0 \\ \text{u. s. w. u. s. w.,} \end{cases}$$

und somit haben wir in (7) und (8) die oben versprochene Lösung in einem vollständig ausgedrückten Process. Die Eigenschaft der Determinantengleichung (7), dass ihre Wurzeln sämmtlich reell sind, wenn die Relationen (5) und (6) erfüllt werden, ist sehr bemerkenswerth. Sie scheint der Aufmerksamkeit der neueren Algebraisten entgangen zu sein *). Wenn diese Relationen nicht erfüllt sind [wie in der bekannten diagonalen kubischen Function § 181, (3)], so können alle Werthe von λ^2 reell sein; sie können aber auch sämmtlich oder zum Theil imaginär sein. Wenn sie nicht sämmtlich reell sind, so sei $\varrho \pm \sigma \sqrt{-1}$ ein Paar imaginärer Wurzeln. Die entsprechenden Werthe von λ, oder die Quadratwurzeln von $\varrho \pm \sigma \sqrt{-1}$ können mit $\pm (p \pm q \sqrt{-1})$ bezeichnet werden. Folglich werden in der allgemeinen Lösung Glieder von der Form

$$C e^{pt} \sin qt$$

vorkommen, d. h. es giebt unendlich kleine Verschiebungen aus einer Gleichgewichtslage, die harmonische Oscillationen nach sich ziehen würden, deren Amplituden nach dem logarithmischen Gesetz zunehmen, so lange die Verschiebung klein genug bleibt, dass wir unsere approximative Annahme festhalten können. Diese Art, eine Lage instabilen Gleichgewichts zu verlassen, ist natürlich unmöglich, ausser wenn man künstliche Anordnungen trifft, die nicht ein conservatives, sondern ein accumulatives Kraftsystem geben.

344. Künstliches oder imaginäres accumulatives System. — Wenn die Kräfte eines Systems, welche von der Configuration und nicht von der Bewegung abhängen, und welche wir der Kürze wegen die Positionskräfte nennen wollen, das Princip der

*) Ein etwas einfacherer Fall ist von Cauchy behandelt (Exercices de Mathématique, T. IV, p. 140. Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes); doch lässt sich der dort geführte Beweis, dass alle Wurzeln der Gleichung (7) reell seien, auch auf den hier vorliegenden Fall übertragen. (Anmerk. d. Herausg.)

Erhaltung der Energie verletzen, so kann aus demselben, wie wir in § 272 gesehen haben, unaufhörlich Energie gezogen werden, dadurch dass man es unaufhörlich durch eine geschlossene Reihe von Configurationen hindurchleitet. Wir haben daraus geschlossen, dass in jedem reellen System, welches nicht mit Energie von aussen versehen wird, die Positionskräfte dem Princip der Erhaltung der Energie genügen. Es ist aber leicht, ein System künstlich mit einer Quelle von Energie in Verbindung zu setzen, so dass seine Positionskräfte nicht conservativ sind, und die Betrachtung der kinetischen Wirkungen einer solchen Anordnung, besonders der Oscillationen oder der Bewegungen, die das System vollführt, wenn es unendlich wenig aus einer Gleichgewichtsconfiguration heraus gebracht wird, ist äusserst lehrreich wegen der Gegensätze zu den Erscheinungen eines natürlichen Systems. Die vorstehende Untersuchung liefert die allgemeine Lösung des Problems: — Die unendlich kleine Bewegung eines einer Gleichgewichtslage unendlich nahen Systems zu finden, wenn sowohl durch die Widerstände, als auch durch die Natur der Positionskräfte eine Abweichung vom Princip der Erhaltung der Energie stattfindet. Wenn kein Widerstand vorhanden ist, mit welchem Falle wir uns jetzt allein zu beschäftigen brauchen, wird die Frage, ob das Gleichgewicht stabil oder instabil sei, nach der Natur der Wurzeln einer algebraischen Gleichung entschieden, deren Grad gleich der Anzahl der Grade von Freiheit ist, die das System besitzt.

Wenn die Wurzeln (λ^2) der Determinantengleichung § 343, (7) sämmtlich reell und negativ sind, so ist das Gleichgewicht stabil; in jedem anderen Falle ist es instabil.

345. Obgleich es aber nicht möglich ist, einem solchen System, wenn sein Gleichgewicht stabil ist, unendlich kleine Verschiebungen und Geschwindigkeiten solcher Art zu ertheilen, dass das System, sich selbst überlassen, sich weiter und weiter bewegt, bis eine Verschiebung oder eine Geschwindigkeit von endlicher Grösse erreicht ist: so scheint es doch sehr merkwürdig, dass Stabilität hierbei möglich sein sollte, wenn man bedenkt, dass selbst im Falle der Stabilität, wie man leicht aus § 272 erkennt, eine endlose Zunahme der Geschwindigkeit dadurch allein erlangt werden kann, dass man das System zwingt, eine besondere geschlossene Bahn, oder eine besondere Reihe von Configurationen zu durchlaufen, die nirgends mehr als unendlich wenig von der Gleichgewichtsconfiguration abweichen, wobei man es anfangs ohne Geschwindigkeit irgendwo in gewissen Theilen dieses Umlaufs beginnen lässt. Dieses Resultat und die ver-

schiedenen Eigenthümlichkeiten, welche die Fälle von Stabilität und Instabilität darbieten, werden durch das einfachste mögliche Beispiel — die Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene — zur Genüge erläutert.

Der Punkt habe die Einheit der Masse, und die den rechtwinkligen Coordinatenaxen parallelen Kräftecomponenten seien, wenn der Punkt die Lage (x, y) hat, $a x + b y$ und $a' x + b' y$. Die Bewegungsgleichungen sind dann

(1) $$\ddot{x} = a x + b y, \quad \ddot{y} = a' x + b' y.$$

Wird $$\tfrac{1}{2}(a' + b) = c \text{ und } \tfrac{1}{2}(a' - b) = \varepsilon$$
angenommen, so werden die Kräftecomponenten
$$a x + c y - \varepsilon y \text{ und } c x + b' y + \varepsilon x,$$
oder $$-\frac{dV}{dx} - \varepsilon y \text{ und } -\frac{dV}{dy} + \varepsilon x,$$
wo $$V = -\tfrac{1}{2}(a x^2 + b' y^2 + 2 c x y)$$
ist. Die Glieder $-\varepsilon y$ und $+\varepsilon x$ sind offenbar die Componenten einer zum Radiusvector des materiellen Punktes senkrechten Kraft $\varepsilon (x^2 + y^2)^{1/2}$. Drehen wir also die Coordinatenaxen durch irgend einen Winkel, so sind die entsprechenden Glieder in den transformirten Ausdrücken der Componenten immer noch $-\varepsilon y$ und $+\varepsilon x$. Wenn wir daher die Axen so wählen, dass

(2) $$V = \tfrac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2)$$

ist, so gehen die Bewegungsgleichungen, ohne dass ihre Allgemeinheit beeinträchtigt würde, über in
$$\ddot{x} = -\alpha x - \varepsilon y, \quad \ddot{y} = -\beta y + \varepsilon x.$$
Um diese Gleichungen zu integriren, nehmen wir, wie im Allgemeinen [§ 343, (2)],
$$x = l e^{\lambda t}, \quad y = m e^{\lambda t}$$
an. Dann erhalten wir, wie früher [§ 343, (8)],
$$(\lambda^2 + \alpha) l + \varepsilon m = 0 \text{ und } -\varepsilon l + (\lambda^2 + \beta) m = 0.$$
Daraus folgt

(3) $$(\lambda^2 + \alpha)(\lambda^2 + \beta) = -\varepsilon^2,$$

und diese Gleichung liefert
$$\lambda^2 = -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \pm \{\tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 - \varepsilon^2\}^{1/2}.$$
Diese beiden Wurzeln λ^2 sind reell und negativ, d. h. das Gleichgewicht ist stabil, wenn jede der Grössen $\alpha\beta + \varepsilon^2$ und $\alpha + \beta$ positiv, und wenn $\varepsilon^2 < \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)^2$ ist [d. h. wenn ε zwischen den Werthen $\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)$ und $-\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)$ liegt]; in jedem anderen Falle ist das Gleichgewicht instabil.

Es werde jetzt aber der Punkt gezwungen, auf einem Kreise vom Radius r zu bleiben. Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Radiusvector des Punktes und der Axe OX mit ϑ und transformiren (§ 27) die Bewegungsgleichungen, so erhalten wir

(4) $$\ddot{\vartheta} = -(\beta - \alpha) \sin\vartheta \cos\vartheta + \varepsilon = -\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) \sin 2\vartheta + \varepsilon.$$

Hätten wir $\varepsilon = 0$ (Fall eines conservativen Kraftsystems), so würden die Gleichgewichtslagen in $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, $\vartheta = \pi$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ sein, und die Bewegung wäre die des Quadrantpendels. Wenn aber ε irgend einen endlichen Werth hat, der kleiner als $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ ist, und den wir der Kürze wegen als positiv voraussetzen, so giebt es Gleichgewichtslagen in

$$\vartheta = \theta,\ \vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta,\ \vartheta = \pi + \theta \text{ und } \vartheta = \frac{3\pi}{2} - \theta,$$

wo θ die Hälfte des spitzen Winkels ist, dessen Sinus den Werth $\frac{2\varepsilon}{\beta - \alpha}$ hat. In der ersten und dritten Lage findet stabiles, in der zweiten und vierten instabiles Gleichgewicht statt. Wir sehen somit, dass die Wirkung der constanten Tangentialkraft darin besteht, die Lagen des stabilen und des instabilen Gleichgewichts auf dem Kreise vor und zurück zu schieben, jede durch einen Winkel von der Grösse θ. Wird die Gleichung (4) mit $2\dot{\vartheta}\,dt$ multiplicirt und sodann integrirt, so erhalten wir als Integralgleichung der Energie

$$\dot{\vartheta}^2 = C + \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\cos 2\vartheta + 2\varepsilon\vartheta. \tag{5}$$

Hieraus sehen wir, dass der Werth von C, für welchen der materielle Punkt gerade die Lage des instabilen Gleichgewichts erreicht,

$$\begin{aligned} C &= -\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\cos(\pi - 2\theta) - \varepsilon(\pi - 2\theta) \\ &= \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{4} - \varepsilon^2} + \varepsilon\left(\pi - \arcsin\frac{2\varepsilon}{\beta - \alpha}\right) \end{aligned}$$

ist. Setzen wir den Ausdruck (5) für $\dot{\vartheta}^2$, nach Substitution dieses Werthes von C, gleich Null, so erhalten wir eine transcendente Gleichung in ϑ, deren kleinste negative Wurzel $\vartheta_{\prime}$ die Grenze liefert, von einer Lage stabilen Gleichgewichts aus rückwärts gerechnet, bis zu welcher die Bewegung oscillirend bleibt. Wenn der materielle Punkt in Ruhe an irgend eine Stelle des Kreises gesetzt wird, die sich vor einer Lage stabilen Gleichgewichts befindet und weniger als $\frac{\pi}{2} - 2\theta$ von derselben entfernt ist, oder die sich hinter einer solchen Lage in einem Abstande von derselben befindet, der kleiner als $\theta - \vartheta_{\prime}$ ist, so wird er vibriren. Wird er aber an irgend eine Stelle gesetzt, die sich ausserhalb dieser Grenzen befindet, und daselbst entweder in Ruhe gelassen oder mit einer beliebigen Geschwindigkeit nach einer der beiden Seiten hin gestossen, so wird er den Kreis rings herum nach vorwärts zu unaufhörlich durchlaufen; dabei nimmt seine Geschwindigkeit periodisch zu und ab; ihr Quadrat wird aber jede halbe Umdrehung um den nämlichen Betrag grösser.

Ist andererseits $\varepsilon > \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$, so sind die Lagen sowohl des stabilen, wie des instabilen Gleichgewichts imaginär, indem der Einfluss der Tangentialkraft in jeder Lage überwiegt. Wird der Punkt an irgend eine Stelle des Kreises in Ruhe hingesetzt, so wird er sich mit stetig wachsender Geschwindigkeit, aber periodisch zu- und abnehmender Beschleunigung herumbewegen.

346. Kinetische Stabilität und conservative Störung. — Es giebt kaum eine Frage in der Dynamik, die für die theoretische

Physik von grösserer Wichtigkeit ist, als die Stabilität oder Instabilität der Bewegung. Daher wollen wir, ehe wir dieses Capitel schliessen, einige allgemeine Erläuterungen und leitende Principien über diesen Gegenstand mittheilen.

Eine „conservative Bewegungsstörung" ist eine Störung in der Bewegung oder der Configuration eines conservativen Systems, welche die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie nicht ändert. Eine „conservative Störung der Bewegung durch eine besondere Configuration hindurch" ist eine Aenderung in den Geschwindigkeiten oder Geschwindigkeitscomponenten, welche die gesammte kinetische Energie ungeändert lässt. So z. B. ist eine conservative Störung der Bewegung eines materiellen Punktes durch irgend einen Punkt hindurch eine Aenderung in der Bewegungsrichtung, die von keiner Aenderung der Geschwindigkeit begleitet ist.

347. Die wirkliche Bewegung eines Systems aus irgend einer besonderen Configuration heisst stabil, wenn jede mögliche unendlich kleine conservative Störung der Bewegung durch diese Configuration aus conservativen Störungen zusammengesetzt werden kann, deren jede eine Aenderung der Bewegung herbeiführen würde, welche das System in endlicher Zeit und mit einer nur unendlich kleinen Abweichung wieder zu einer der ungestörten Bahn angehörenden Configuration brächte. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so heisst die Bewegung instabil.

348. **Beispiele.** — Es werde z. B. ein Körper A von einer festen verticalen Axe getragen, ein zweiter Körper B von einer dem ersten Körper angehörenden parallelen Axe; in derselben Weise werde ein dritter Körper C von B getragen, u. s. w. Wenn dann die Körper B, C, u. s. w. so gestellt werden, dass der Trägheitsmittelpunkt eines jeden so weit als möglich von der festen Axe entfernt ist, und das ganze System mit einer gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit um diese Axe in Bewegung gesetzt wird, so wird die Bewegung von jeder Configuration aus stabil sein, wie aus den später zu beweisenden Principien über die resultirende Centrifugalkraft bei einem starren Körper hervorgeht. Wenn z. B. jeder der Körper ein flaches, rechtwinkliges, am einen Rande eingelenktes Brett ist, so wird das ganze System offenbar durch die Centrifugalkraft stabil erhalten, wenn alle diese Bretter in einer Ebene und von der festen Axe soweit als möglich entfernt sind. Wenn aber A zum Theil aus einer Welle und einer Kurbel besteht, wie ein gewöhnliches Spinnrad oder das Schwungrad und die Kurbel einer Dampf-

maschine, und wenn B vom Kurbelstift als Axe getragen und einwärts gedreht wird (nach der festen Axe zu oder deren Verlängerung schneidend), so wird die Bewegung des Systems instabil sein, wenngleich die Körper $C, D,$ u. s. w. so gestellt sind, dass ihre Trägheitsmittelpunkte so weit von der festen Axe abstehen, als es bei dieser Lage von B möglich ist.

349. Wenn sich ein länglicher Körper in der Richtung seiner Länge, oder eine flache Scheibe seitwärts durch eine Flüssigkeit bewegt, so ist die Bewegung instabil. Bewegt sich dagegen einer dieser beiden Körper so, dass seine Länge oder seine Flachseite zur Bewegungsrichtung senkrecht ist, so ist die Bewegung stabil. Für den idealen Fall einer vollkommenen Flüssigkeit (§ 331) ist dies in § 332, Beispiel (2) bewiesen, und die in § 333 erläuterten Resultate zeigen für einen festen Rotationskörper ganz bestimmt den Charakter der Bewegung, welche eintritt, wenn der Körper unendlich wenig in seiner Bewegungsrichtung gestört wird, so dass er sich nicht mehr genau längs oder genau senkrecht zur Axe seiner Figur bewegt; wenn die geradlinige Bewegung stabil ist, so ist diese durch die Störung verursachte Bewegung eine unendlich kleine Oscillation in einer bestimmten Zeitperiode; wenn die geradlinige Bewegung aber instabil ist, so schwingt er herum bis in eine nahezu umgekehrte Lage. Die Beobachtung bestätigt diese Behauptung für die realen Flüssigkeiten Luft und Wasser und für die mannigfachsten, die Bewegung beeinflussenden Umstände. Einige erläuternde Beispiele haben wir schon in § 336 angeführt, und werden wir später auf den Gegenstand zurückkommen, da er nicht nur von grosser praktischer Wichtigkeit ist, sondern auch in theoretischer Beziehung hohes Interesse hat und durchaus keine Schwierigkeiten darbietet.

350. Die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes liefert uns einfachere und nicht weniger lehrreiche Erläuterungen der Stabilität und Instabilität. Wenn ein Gewicht, das mit einem gewichtlosen unausdehnbaren Faden an einem festen Punkte befestigt ist, so in Bewegung gesetzt wird, dass es um eine durch seine Gleichgewichtslage gehende Verticallinie einen Kreis beschreibt, so ist seine Bewegung stabil. Denn wenn ihm eine unendlich wenig abweichende Richtung gegeben wird, ohne dass ein Gewinn oder ein Verlust an Energie eintritt, so wird es, wie wir später sehen werden, eine Sinuslinie beschreiben, welche die Bahn der ungestörten Bewegung, den Kreis, successive in Punkten schneidet, deren Abstände auf dem Kreise in ganz bestimmter Weise von dem Neigungswinkel der Schnur gegen die verticale Richtung abhängen. Wenn dieser Winkel sehr klein

ist, so ist die Bewegung nicht merklich von derjenigen eines materiellen Punktes verschieden, der auf eine Ebene beschränkt ist und sich unter dem Einfluss einer nach einem festen Punkte zu anziehenden, dem Abstande einfach proportionalen Kraft bewegt, und die Bahn der gestörten Bewegung schneidet diejenige der ungestörten (den Kreis) viermal während einer Umdrehung. Oder wenn ein auf eine Ebene beschränkter materieller Punkt sich unter dem Einfluss einer ihn nach einem Punkte dieser Ebene hinziehenden Kraft bewegt, welche dem Quadrate seines Abstandes von diesem Punkte umgekehrt proportional ist, so wird die Bahn einer unendlich wenig von dem Kreise abgelenkten Bewegung den Kreis während einer Umdrehung zweimal schneiden. Wenn die Centralkraft allgemein der $n$ten Potenz des Abstandes proportional und $n + 3$ positiv ist, so schneidet die Bahn der gestörten Bewegung den Kreis in einer Reihe von Punkten, deren jeder von dem nächstfolgenden auf dem Kreise den Abstand $\frac{\pi}{\sqrt{n+3}}$ hat. Die Bewegung wird aber instabil sein, wenn n negativ und $-n > 3$ ist.

Kinetische Stabilität in einer kreisförmigen Bahn. — Das Kriterium für die Stabilität lässt sich für den Fall einer Bewegung im Kreise um einen Punkt herum, von dem aus eine Kraft wirkt, leicht herleiten, wenn wir die Differentialgleichung der allgemeinen Bahn (§ 36)

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2}$$

zu Grunde legen. h habe einen solchen Werth, dass eine Bewegung in einem Kreise vom Radius a^{-1} dieser Gleichung genügt, d. h. es $\frac{P}{h^2 u^2} = u$, wenn $u = a$ ist. Ist nun $u = a + \varrho$, wo ϱ unendlich klein ist, so werden wir

$$u - \frac{P}{h^2 u^2} = \alpha \varrho$$

haben, wenn α den Werth von $\frac{d}{du}\left(u - \frac{P}{h^2 u^2}\right)$ für $u = a$ bezeichnet, und folglich ist die Differentialgleichung der von der kreisförmigen unendlich wenig abweichenden Bewegung

$$\frac{d^2 \varrho}{d\vartheta^2} + \alpha \varrho = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung lässt sich am passendsten in folgender Weise schreiben: —

$$\varrho = A \sin (\vartheta \sqrt{\alpha} + \beta), \text{ wenn } \alpha \text{ positiv}$$

und

$$\varrho = C e^{\vartheta \sqrt{-\alpha}} + C' e^{-\vartheta \sqrt{-\alpha}}, \text{ wenn } \alpha \text{ negativ ist.}$$

Wir sehen daraus, dass die kreisförmige Bewegung im ersteren Falle stabil, im zweiten instabil ist.

Ist z. B. $P = \mu r^n = \mu u^{-n}$, so folgt

$$\frac{d}{du}\left(u - \frac{P}{h^2 u^2}\right) = 1 + (n + 2)\frac{P}{h^2 u^3},$$

und wenn wir hierin $\frac{P}{h^2 u^3} = u = a$ setzen, so erhalten wir $\alpha = n + 3$, woraus das oben ausgesprochene Resultat hervorgeht.

Oder nehmen wir das Beispiel (B) des § 330 und setzen $m P$ für P und $m h$ für h, so ist

$$\frac{P}{h^2 u^2} = \frac{m'}{m + m'}\left(\frac{g}{h^2} u^{-2} + u\right),$$

$$\frac{d}{du}\left(u - \frac{P}{h^2 u^2}\right) = \frac{m + \frac{2 m' g}{h^2 u^3}}{m + m'}.$$

Setzen wir hierin $u = a$ und machen $h^2 = \frac{g m'}{m a^3}$, damit eine Bewegung in einem Kreise vom Radius a^{-1} möglich sei, so finden wir

$$\alpha = \frac{3 m}{m + m'}.$$

Die kreisförmige Bewegung ist daher immer stabil, und die Periode der durch eine unendlich kleine Abweichung von derselben erzeugten Variation ist $2\pi \sqrt{\frac{m + m'}{3 m}}$.

351. Kinetische Stabilität eines sich auf einer glatten Oberfläche bewegenden Punktes. — Der Fall eines sich auf einer glatten festen Oberfläche bewegenden Punktes, auf welchen keine andere Kraft wirkt als diejenige, die ihn zwingt, auf der Oberfläche zu bleiben, und der sich deshalb längs einer geodätischen Linie der Oberfläche bewegt, bietet äusserst einfache Erläuterungen der Stabilität und Instabilität dar. So würde z. B. ein auf den inneren Kreis der Oberfläche eines Ankerringes gesetzter materieller Punkt, wenn er in der Ebene des Ringes einen Stoss erhielte, sich beständig in diesem Kreise bewegen; seine Bewegung würde aber instabil sein, da der Punkt offenbar bei der geringsten Störung diese Bahn verlassen und erst nach einem Umlauf um den äusseren Rand dieselbe wieder erreichen würde. (Wir setzen natürlich voraus, dass der Punkt an der Oberfläche des Ringes bleiben muss, wie wenn er sich in dem unendlich dünnen Raum zwischen dem massiven Ringe und einem darumgelegten hohlen Ringe befände.) Wenn der Punkt aber auf den äussersten oder grössten Kreis des Ringes gesetzt und in dessen Ebene fortgestossen wird, so wird eine un-

endlich kleine Störung bewirken, dass er eine Sinuslinie beschreibt, welche den Kreis in einer Reihe von Punkten schneidet, deren jeder von dem folgenden eine Entfernung hat, die dem Winkel $\pi\sqrt{\frac{b}{a}}$ oder dem Zeitraum $\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{b}{a}}$ entspricht, wo a den Radius jenes Kreises, ω die in demselben vorhandene Winkelgeschwindigkeit und b den Radius des kreisförmigen Querschnittes des Ringes bezeichnet. Dies zu beweisen, hat man nur zu beachten, dass ein unendlich schmaler Streifen des äussersten Theils des Ringes in jedem Punkte a und b zu Hauptkrümmungsradien, folglich (§ 150) zu geodätischen Linien die grössten Kreise einer Kugel vom Radius $\sqrt{ab}$ hat, an welche er (§ 152) durch Biegung sich anschmiegen kann.

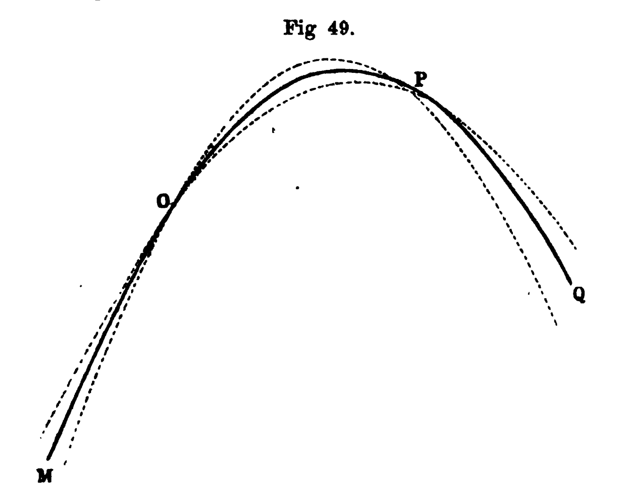
352. In allen diesen Fällen war die Bahn der ungestörten Bewegung kreisförmig oder geradlinig, und wenn die Bewegung stabil war, so war die Wirkung einer Ablenkung periodisch, d. h. sie kehrte in successiven gleichen Zeitintervallen mit denselben Phasen wieder. Ein Beispiel einer durchaus stabilen Bewegung, bei welcher die Wirkung einer Ablenkung nicht periodisch ist, liefert uns ein materieller Punkt, der unter der Wirkung der Schwere eine geneigte Rinne hinunter gleitet. Um den einfachsten Fall zu nehmen, wollen wir einen Punkt betrachten, der längs der tiefsten Geraden eines geneigten hohlen Cylinders hinunter gleitet. Lenken wir den Punkt ein wenig von dieser Geraden ab, so wird er bei seinem Niedergange beständig zu beiden Seiten derselben oscilliren; diese Bewegung wird aber keine gleichförmig periodische sein, obwohl die Excursionen zu jeder Seite der Geraden sämmtlich die nämliche Dauer haben.

353. Einen sehr merkwürdigen Fall stabiler Bewegung liefert ein materieller Punkt, welcher gezwungen ist, auf der Oberfläche eines in einer verticalen Ebene feststehenden Ankerringes zu bleiben, und welcher von irgend einem Punkte des grössten Kreises aus längs dieses Kreises mit einer beliebigen Geschwindigkeit fortgestossen wird. Eine unendlich kleine Ablenkung wird eine Bewegung hervorrufen, deren Bahn den verticalen Kreis unaufhörlich immer wieder in ungleichen Zeiträumen schneidet; auch die den Schnittpunkten entsprechenden Centriwinkel sind ungleich, und offenbar ist die Bewegung keine periodisch wiederkehrende, ausser bei bestimmten besonderen Werthen für die ganze Energie, von denen einige kleiner und eine unendlich grosse Anzahl grösser als die-

jenige Energie sind, welche gerade genügt, den Punkt in die höchste Stelle des Ringes zu bringen. Eine eingehende mathematische Untersuchung dieser Umstände würde eine gute Uebung in der Theorie der Differentialgleichungen sein, ist aber zur Erläuterung des vorliegenden Gegenstandes nicht erforderlich.

354. Oscillirende und beschränkte kinetische Stabilität. — Im vorhergehenden Falle, wie in allen bisher betrachteten Fällen stabiler Bewegung mit nur zwei Graden von Freiheit fand während der ganzen Bewegung Stabilität statt, und eine unendlich kleine Ablenkung von irgend einem Punkte der Bewegung lieferte eine gestörte Bewegung, deren Bahn die Bahn der ungestörten Bewegung in bestimmten Zeitintervallen wiederholt schnitt. Der Einfachheit wegen wollen wir uns auch jetzt noch auf zwei Grade von Freiheit beschränken. Wir haben dann einen Fall beschränkter Stabilität in der Bewegung eines Projectils, das keinen Widerstand erfährt, und welches der Bedingung der Stabilität nur in den Punkten des aufwärts gehenden Theils, nicht im abwärts gehenden Theile seiner Bahn genügt. Wenn $MOPQ$ die Bahn eines Projectils ist, und wenn dasselbe in O durch eine unendlich kleine Kraft gestört wird, die nach irgend einer Seite hin senkrecht zur augenblicklichen Bewegungsrichtung ist, so wird die Bahn der gestörten Bewegung diejenige der ungestörten unendlich nahe dem Punkte P schneiden, wo

Fig 49.



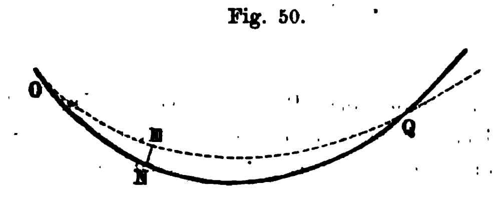
die Bewegungsrichtung senkrecht zu derjenigen in O ist. Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, dass die Verbindungslinie

zweier in dem nämlichen Augenblick von demselben Punkte aus mit gleichen Geschwindigkeiten in zwei beliebigen Richtungen geschleuderten materiellen Punkte beständig zu der Linie senkrecht bleibt, welche den Winkel zwischen diesen beiden Richtungen halbirt.

355. Allgemeines Kriterium. Beispiele. — Das Princip der variirenden Wirkung liefert in jedem Bewegungsfalle ein mathematisches Kriterium für die Stabilität oder Instabilität. Zunächst ist klar und wird unten bewiesen werden (§§ 358, 361), dass die Bewegung eines Systems durchaus instabil ist, wenn die Wirkung in der Bewegung von einer beliebigen Configuration zu der in irgend einem anderen, beliebig viel späteren Augenblick erreichten Configuration ein wirkliches Minimum ist. In der Bewegung eines materiellen Punktes z. B., der gezwungen ist, auf einer glatten festen Oberfläche zu bleiben, und der nicht der Einwirkung der Schwere unterworfen ist, ist die Wirkung einfach das Product aus der Länge des Weges in die constante Geschwindigkeit. Folglich ist in dem oben betrachteten besonderen Falle eines materiellen Punktes, der sich, ohne eine Einwirkung von der Schwere zu erleiden, auf dem inneren Kreise in der Ebene eines Ankerringes bewegt, die Wirkung oder die Länge des Weges von einem beliebigen Punkte bis zu dem in irgend einem späteren Augenblick erreichten Punkte ein Minimum. (Die Wirkung ist nicht bloss ein Minimum, sondern sogar das kleinste Minimum, welches zwischen zwei beliebigen Punkten des Kreises auf dem Bogen möglich ist, dessen Länge weniger als die halbe Peripherie beträgt.) Andererseits ist zwar der Weg zwischen zwei beliebigen Punkten des grössten Kreises des Ringes deren Abstand auf dem Kreise kleiner als $\pi\sqrt{ab}$ ist, offenbar längs der Peripherie am kleinsten; bei zwei Punkten aber, deren Abstand auf dem Kreise mehr als $\pi\sqrt{ab}$ beträgt, ist der absolut kürzeste Weg nicht der längs der Peripherie, und ist in diesem Falle der Weg längs der Peripherie überhaupt kein Minimum. Auf jeder überall anticlastischen Oberfläche oder längs einer durch einen anticlastischen Theil einer beliebigen Oberfläche hindurchgehenden geodätischen Linie ist die Bewegung durchaus instabil. Denn wäre sie von irgend einem Punkt O aus stabil, so würden wir die gegebene Bahn der ungestörten Bewegung und die Bahn der in O gestörten Bewegung haben, welche die erstere in irgend einem Punkte Q schnitte; es wären dies zwei verschiedene geodätische Linien zwischen zwei Punkten, die es auf einer anticlastischen Oberfläche nicht geben kann, insofern die Summe der Aussenwinkel jede

durch geodätische Linien gebildeten geschlossenen Figur grösser als vier rechte Winkel ist (§ 136), wenn die Gesammtkrümmung der eingeschlossenen Fläche negativ ist, und dies ist (§§ 138, 128) für jeden Theil einer durchaus anticlastischen Oberfläche der Fall. Andererseits lässt sich leicht darthun, dass, wenn in der Mitte eines geschlossenen starren Streifens einer überall synclastischen krummen Oberfläche eine geodätische Linie gezogen ist, und wir einen materiellen Punkt längs dieser Linie in Bewegung setzen, seine Bewegung durchaus stabil sein wird, und dass eine unendlich kleine Ablenkung eine neue Bahn liefern wird, welche die gegebene Bahn der ungestörten Bewegung unablässig in Punkten schneidet, deren Abstände von einander je nach der Verschiedenheit der specifischen Krümmungen der zwischenliegenden Oberflächentheile verschieden sind. Wird in irgend einem Punkte N der Bahn der ungestörten Bewegung eine Senkrechte gezogen, welche die unendlich nahe liegende Bahn der gestörten Bewegung in E schneidet, so ist die Summe der Winkel OEN und NOE grösser (§ 138) als ein rechter Winkel, und zwar um die Gesammtkrümmung der Fläche EON. Mit Rücksicht hierauf können wir unmittelbar die Differentialgleichung der Bahn der gestörten Bewegung erhalten.

Fig. 50.



Es sei $\measuredangle EON = \alpha$, $ON = s$, $NE = u$ und θ, eine bekannte Function von s, die specifische Krümmung (§ 136) der Oberfläche in der Nähe des Punktes N. Ferner bezeichne für einen Augenblick φ das Complement des Winkels OEN. Dann haben wir

$$\alpha - \varphi = \int_0^s \theta u \, ds,$$

folglich

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\theta u.$$

Offenbar ist aber

$$\varphi = \frac{du}{ds},$$

also

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \theta u = 0.$$

Wenn θ constant ist (wie in dem oben, § 351, betrachteten Falle des Aequators einer Rotationsfläche), so liefert diese Gleichung

$$u = A \cos(s \sqrt{\theta} + E),$$

was mit dem in § 351 durch Abwicklung auf eine Kugeloberfläche erhaltenen Resultate übereinstimmt.

Der Fall zweier oder mehrerer Körper, die in der oben angegebenen Weise von parallelen Axen getragen werden und um eine Axe rotiren, von welcher ihr gemeinschaftlicher Trägheitsmittelpunkt den kleinsten möglichen Abstand hat, liefert auch eine gute Erläuterung dieses Satzes, deren Bearbeitung wir wohl dem Leser als Uebungsaufgabe überlassen können.

356. Allgemeine Untersuchung der Bahn der gestörten Bewegung. — Die Erforschung der Wirkung einer unendlich kleinen conservativen Störung, die zu irgend einem Augenblick in der Bewegung eines beliebigen conservativen Systems erzeugt wird, lässt sich, vorausgesetzt dass die ungestörte Bewegung vollständig bekannt ist, auf ein Problem der mathematischen Analysis zurückführen, das zwar viele und complicirte Arbeit erfordern kann, sich aber immer lösen lässt.

Allgemeine Gleichung der Bewegung mit zwei Graden von Freiheit. — (a.) Für ein System, das nur zwei Grade von Bewegungsfreiheit hat, sei

$$2T = P\dot{\psi}^2 + Q\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\psi}\dot{\varphi}, \tag{1}$$

wo P, Q, R von der wirklichen Bewegung unabhängige Functionen der Coordinaten sind. Dann ist

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dT}{d\dot{\psi}} = P\dot{\psi} + R\dot{\varphi}, \quad \dfrac{dT}{d\dot{\varphi}} = Q\dot{\varphi} + R\dot{\psi} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{dT}{d\dot{\psi}} = P\ddot{\psi} + R\ddot{\varphi} + \dfrac{dP}{d\psi}\dot{\psi}^2 + \left(\dfrac{dP}{d\varphi} + \dfrac{dR}{d\psi}\right)\dot{\psi}\dot{\varphi} + \dfrac{dR}{d\varphi}\dot{\varphi}^2, \end{cases}$$

und die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen [§ 329, (10)] sind

$$(3) \quad \begin{cases} P\ddot{\psi} + R\ddot{\varphi} + \tfrac{1}{2}\left\{\dfrac{dP}{d\psi}\dot{\psi}^2 + 2\dfrac{dP}{d\varphi}\dot{\psi}\dot{\varphi} + \left(2\dfrac{dR}{d\varphi} - \dfrac{dQ}{d\psi}\right)\dot{\varphi}^2\right\} = \Psi \\ R\ddot{\psi} + Q\ddot{\varphi} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(2\dfrac{dR}{d\psi} - \dfrac{dP}{d\varphi}\right)\dot{\psi}^2 + 2\dfrac{dQ}{d\psi}\dot{\psi}\dot{\varphi} + \dfrac{dQ}{d\varphi}\dot{\varphi}^2\right\} = \Phi. \end{cases}$$

Wir setzen voraus, das Coordinatensystem sei so gewählt, dass keine der Functionen P, Q, R und keiner ihrer Differentialquotienten $\dfrac{dP}{d\varphi}$, u. s. w. jemals unendlich werden kann.

(b.) Um die Wirkungen einer unendlich kleinen Störung zu erforschen, können wir eine Bewegung betrachten, in welcher zu irgend einer Zeit t die Coordinaten $\psi + p$ und $\varphi + q$ sind, wo p und q unendlich

kleine Grössen bezeichnen. Nehmen wir dann auf die gewöhnliche Weise einfach die Variationen der Gleichungen (3), so gelangen wir zu zwei simultanen Differentialgleichungen zweiten Grades, die in Beziehung auf

$$p, q, \dot{p}, \dot{q}, \ddot{p}, \ddot{q}$$

linear sind, aber variabele Coefficienten haben, welche wir, wenn die ungestörte Bewegung ψ, φ völlig bekannt ist, als bekannte Functionen von t ansehen dürfen. In diesen Gleichungen kann offenbar keiner der Coefficienten jemals unendlich werden, wenn die Data einem wirklichen dynamischen Problem entsprechen, vorausgesetzt dass das Coordinatensystem passend gewählt ist (a). Die Coefficienten von $\ddot{p}$ und $\ddot{q}$ sind die Werthe, welche beziehungsweise P, R und R, Q zur Zeit t haben, in der Reihenfolge, in der sie in (3) erscheinen, da P, Q, R die Coefficienten einer homogenen quadratischen Function (1) sind, welche ihrer Natur nach positiv ist. Mit Bezugnahme auf diese Eigenschaften lässt sich zeigen, dass in keinem Falle ein unendlich kleiner Zeitraum die Lösung des folgenden Problems sein kann, auf welches uns die Frage nach der kinetischen Stabilität oder Instabilität (§ 347) führt: —

(c.) Die Geschwindigkeitscomponenten $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$ sind in irgend einem Augenblick in $\dot{\psi} + \alpha$, $\dot{\varphi} + \beta$ übergegangen, welche Aenderung der Bedingung unterworfen ist, dass sie den Werth von T ungeändert lässt. Man soll, α und β als unendlich klein angenommen, den Zeitraum bestimmen, nach dessen Ablauf $\frac{q}{p}$ zum ersten Male gleich $\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}$ wird.

(d.) Die Differentialgleichungen in p und q reduciren dieses Problem und thatsächlich auch die vollständige Erforschung der Störung in der Bewegung, wenn die ungestörte Bewegung gegeben ist, auf eine Form, die mathematischer Behandlung fähig ist. Wenn es sich aber bloss um den Beweis des Satzes, dass die Bahn der gestörten Bewegung die der ungestörten nicht vor Ablauf einer endlichen Zeit treffen kann, und um Ermittlung eines Grenzwerthes handelt, den diese Zeit in jedem besonderen Falle überschreiten muss, so ist es einfacher, in folgender Weise zu verfahren: —

(e.) Um t aus den allgemeinen Gleichungen (3) zu eliminiren, transformiren wir dieselben erst so, dass sie nicht t zur unabhängig Veränderlichen haben. Wir müssen

$$(4)\qquad \ddot{\psi} = \frac{dt\,d^2\psi - d\psi\,d^2t}{dt^3},\quad \ddot{\varphi} = \frac{dt\,d^2\varphi - d\varphi\,d^2t}{dt^3}$$

setzen und erhalten aus der Gleichung der Energie, das System als conservativ vorausgesetzt,

$$(5)\qquad dt = \frac{(P\,d\psi^2 + Q\,d\varphi^2 + 2\,R\,d\psi\,d\varphi)^{1/2}}{\{2\,(E - V)\}^{1/2}}.$$

Wird mittels dieser Gleichung aus den beiden Gleichungen (3) dt und d^2t eliminirt, so erhalten wir eine Differentialgleichung zweiten Grades zwischen ψ und φ, welche die Differentialgleichung der Bahn ist. Der Einfachheit wegen wollen wir eine der beiden Coordinaten, etwa φ, zur un-

abhängig Veränderlichen nehmen, d. h. $d^2\varphi = 0$ voraussetzen. Dann folgt aus (4)

$$d^2 t = -\ddot{\varphi}\frac{d t^2}{d\varphi}, \text{ mithin } \ddot{\psi}\, d t^2 = d^2\psi + \frac{d\psi}{d\varphi}\ddot{\varphi}\, d t^2,$$

und das Resultat der Elimination wird

$$(6)\quad (PQ - R^2)\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + F\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right) = \frac{\left(P\frac{d\psi^2}{d\varphi^2} + 2R\frac{d\psi}{d\varphi} + Q\right)\left[\left(Q + R\frac{d\psi}{d\varphi}\right)\Psi - \left(R + P\right.\right.}{2(E - V)}$$

wo $F\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)$ eine Function dritten Grades von $\frac{d\psi}{d\varphi}$ bezeichnet, deren Coefficienten variabel sind und nicht unendlich werden können, so lange die kinetische Energie $E - V$ endlich ist.

(f.) Nehmen wir unter der Voraussetzung, dass ψ in $\psi + p$ übergeht, wo p eine unendlich kleine Grösse ist, die Variation der Gleichung (6), so erhalten wir

$$(7)\qquad (PQ - R^2)\frac{d^2 p}{d\varphi^2} + L\frac{dp}{d\varphi} + Mp = 0;$$

darin bezeichnen L und M bekannte Functionen von φ, von denen keine einen unendlich grossen Werth hat. Hierdurch ist die Abweichung p von der Bahn bestimmt. Da die quadratische Function (1) ihrer Bedeutung nach stets positiv ist, so muss auch $PQ - R^2$ immer positiv sein. Wenn demnach p für einen besonderen Werth von φ verschwindet und $\frac{dp}{d\varphi}$ einen gegebenen Werth hat, welcher die in irgend einem Augenblick vorausgesetzte Abweichung definirt, so muss φ um eine endliche Grösse wachsen (es muss also eine endliche Zeit verstreichen), ehe der Werth von p wieder Null sein, d. h. ehe die Bahn der gestörten Bewegung die der ungestörten wieder schneiden kann.

(g.) Dieser Satz behält seine Gültigkeit auch für ein System mit beliebig vielen Graden von Freiheit. Denn der im Vorhergehenden gegebene Beweis zeigt, dass er für das System gilt, wenn es einer beliebigen reibungslosen Beschränkung unterworfen ist, die ihm nur zwei Grade von Freiheit lässt; es kann dies auch jene besondere reibungslose Beschränkung sein, welche entweder die Bahn der ungestörten, oder die der gestörten Bewegung nicht ändern würde. Die ganz allgemeine Untersuchung der gestörten Bewegung für Fälle, in denen mehr als zwei Grade von Freiheit vorhanden sind, führt zu einer nothwendiger Weise verwickelten Form; aber die Principien, nach denen sie auszuführen ist, sind im Vorhergehenden zur Genüge angedeutet worden.

(h.) Wenn wir für das Verhältniss $\frac{L}{PQ - R^2}$ eine Constante 2α, welche, abgesehen vom Zeichen, kleiner als dessen kleinster Werth ist, und für $\frac{M}{PQ - R^2}$ eine Constante β substituiren, welche algebraisch grösser als dessen grösster Werth ist, so erhalten wir eine Gleichung

$$(8)\qquad \frac{d^2 p}{d\varphi^2} + 2\alpha\frac{dp}{d\varphi} + \beta = 0.$$

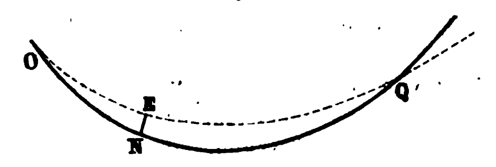
Hier verschwindet der Werth von p für eine Reihe von Werthen von φ, deren jeder den folgenden um $\frac{\pi}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$ übertrifft, und dies ist offenbar kleiner als die Zunahme, welche φ in dem wirklichen Problem erhalten muss, ehe p zum zweiten Male verschwindet. Wir ersehen hieraus auch, dass die wirkliche Bewegung instabil ist, wenn $\alpha^2 > \beta$ ist. Die Bewegung könnte natürlich auch instabil sein, wenn $\alpha^2 < \beta$ ist, und man hätte mittels der geeigneten analytischen Methoden entweder die exacte oder eine praktisch ausreichende annähernde Lösung der Gleichung (7) zu ermitteln, um das Kriterium der Stabilität oder Instabilität endgültig aufzustellen und die Störung der Bahn vollständig zu bestimmen.

(i.) **Differentialgleichung der gestörten Bahn eines auf eine Ebene beschränkten materiellen Punktes.** — Wenn das System nur ein einzelner auf eine Ebene beschränkter materieller Punkt ist, so lässt sich die Differentialgleichung der Ablenkung auf eine merkwürdig einfache Form bringen, die für viele praktische Probleme von Nutzen ist. In irgend einem Augenblick sei für die Einheit der Masse N die normale Kraftcomponente, v die Geschwindigkeit und ϱ der Krümmungsradius der Bahn. Dann haben wir (§ 259)

$$N = \frac{v^2}{\varrho}.$$

Es stelle nun in Fig. 51 ON die Bahn der ungestörten, OE die der gestörten Bewegung dar, und es werde die Linie EN, welche auf ON senkrecht steht, mit u und ON mit s bezeichnet. Bezeichnen wir ferner den

Fig. 51.



Krümmungsradius in der Bahn der gestörten Bewegung mit ϱ' und bedenken, dass u unendlich klein ist, so finden wir leicht

$$(9) \qquad \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{u}{\varrho^2}.$$

Bedienen wir uns daher des Buchstabens δ, um die Variationen von N nach E zu bezeichnen, so ist

$$(10) \qquad \delta N = \delta \frac{v^2}{\varrho} = \frac{\delta (v^2)}{\varrho} + v^2\left(\frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{u}{\varrho^2}\right).$$

Nach der Gleichung der Energie ist aber

$$v^2 = 2(E - V),$$

folglich

$$\delta (v^2) = -2\delta V = 2 N u = \frac{2 v^2}{\varrho} u,$$

und die Gleichung (10) verwandelt sich in

$$\frac{d^2 u}{d s^2} + \frac{3 u}{\varrho^2} - \frac{\delta N}{v^2} = 0, \tag{11}$$

oder, wenn wir mit ζ die Grösse der Variation von N für die Einheit des Abstandes vom Punkte N in der Richtung der Normalen bezeichnen, so dass $\delta N = \zeta u$ ist, in

$$\frac{d^2 u}{d s^2} + \left(\frac{3}{\varrho^2} - \zeta\right) u = 0. \tag{12}$$

Hierin ist die Gleichung der oben (§ 350) untersuchten Abweichung von einer kreisförmigen Bahn als besonderer Fall enthalten.

357. Kinetische Brennpunkte. — Wenn zwei von einer beliebigen Configuration ausgehende einander unendlich nahe liegende Bahnen wieder eine Configuration gemeinschaftlich haben, so wird diese letztere in Beziehung auf die erstere ein kinetischer Brennpunkt genannt, oder diese beiden Configurationen heissen (der Umkehrbarkeit der Bewegung wegen) conjugirte kinetische Brennpunkte. Wenn wir für einen Augenblick die Emanationstheorie des Lichtes adoptiren, so sind die optischen Brennpunkte als ein besonderer Fall in dieser Definition der allgemeinen kinetischen Brennpunkte enthalten. Aus § 356 (g.) sehen wir, dass in jeder Bewegung eines jeden Systems zwischen zwei conjugirten Brennpunkten endliche Raum- und Zeitintervalle liegen müssen, wenn nur die kinetische Energie nicht verschwindet.

358. Satz von der kleinsten Wirkung. — Nun ist klar, dass die Wirkung, falls nur ein hinreichend kurzer Lauf betrachtet wird, bei jeder natürlichen Bewegung eines Systems kleiner ist, als wenn irgend ein anderer Weg zwischen denselben Endconfigurationen durchlaufen würde. Wir werden alsbald (§ 361) beweisen, dass die erste Configuration, bis zu welcher die von einer beliebigen Anfangsconfiguration aus gerechnete Wirkung aufhört ein Minimum zu sein, der erste kinetische Brennpunkt ist, und umgekehrt, dass, sobald der erste kinetische Brennpunkt passirt ist, die von der Anfangsconfiguration aus gerechnete Wirkung aufhört, ein Minimum zu sein, und daher natürlich nie wieder ein Minimum sein kann, da für einen Theil der natürlichen Bahn ein von ihr unendlich wenig abweichender Weg gefunden werden kann, für welchen die Wirkung kleiner ist, ohne dass der übrige Theil geändert würde.

359. Bezeichnungen der Configurationen, der Bahnen und der Wirkung. — In Sätzen dieser Art wird es oft zweckmässig sein,

besondere Configurationen des Systems durch einzelne Buchstaben, wie O, P, Q, R, zu bezeichnen. Irgend einen besonderen Lauf, in welchem sich das System durch die so ausgedrückten Configurationen bewegt, werden wir den Lauf $O \ldots P \ldots Q \ldots R$ nennen. Die Wirkung in jedem natürlichen Laufe soll einfach durch den ersten und den letzten Buchstaben bezeichnet werden, die wir in der Reihenfolge schreiben, in welcher das System die entsprechenden Configurationen erreicht. So bezeichnet OR die Wirkung von O bis R, und es ist folglich $OR = - RO$. Wenn es mehr als einen reellen natürlichen Weg von O bis R giebt, so wird der analytische Ausdruck für OR mehr als einen reellen Werth haben, und es kann nöthig sein, anzugeben, für welchen dieser Wege die Wirkung gerechnet wird. So können wir

$$OR \text{ für } O \ldots E \ldots R,$$
$$OR \text{ für } O \ldots E' \ldots R,$$
$$OR \text{ für } O \ldots E'' \ldots R$$

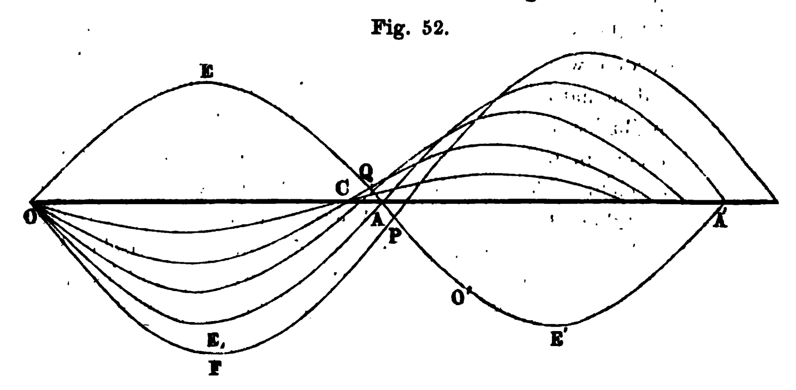
haben, drei verschiedene Werthe eines irrationalen algebraischen Ausdrucks.

360. Mit Hülfe dieser Bezeichnung kann der vorhergehende Satz (§ 358) in folgender Weise ausgedrückt werden: — Wenn sich ein conservatives System auf einem gewissen Wege $O \ldots P \ldots O' \ldots P'$ bewegt und O' der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt ist, so ist die Wirkung OP in dieser Bahn kleiner, als die Wirkung längs jeder unendlich wenig von ihr abweichenden Bahn; andererseits ist aber OP' grösser, als die Werthe der Wirkung in einigen Bahnen von O nach P', welche unendlich wenig von der durch $O \ldots P \ldots O' \ldots P'$ ausgedrückten natürlichen Bahn abweichen.

361. Möglichkeit zweier oder mehrerer Bahnen kleinster Wirkung. — Man darf nicht annehmen, dass die Wirkung längs OP nothwendig die kleinste sei, die von O nach P überhaupt möglich ist. Es giebt in der That Fälle, in denen die Wirkung schon bei einer Configuration, bis zu welcher noch kein kinetischer Brennpunkt erreicht ist, aufhört, die kleinste von allen möglichen zu sein. Ist $OEAPO'E'A'$ eine wellenförmige geodätische Linie, welche den äusseren Kreis eines Ankerringes oder den Aequator eines abgeplatteten Sphäroids in einer Reihe von Punkten O, A, A' schneidet, so sieht man leicht, dass O', der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt, etwas über A hinaus liegen muss. Die Länge $OEAP$ ist nun zwar ein Minimum (eine stabile Lage für eine

gespannte Schnur), aber nicht der kürzeste Abstand von O bis P auf der Oberfläche, da dieser offenbar eine ganz zu einer Seite des

Fig. 52.



grössten Kreises liegende Linie sein muss. Von O zu einem beliebigen vor A liegenden Punkte Q ist der Abstand längs der geodätischen Linie $OEQA$ offenbar der kleinste mögliche; wenn aber Q hinlänglich nahe an A, d. h. zwischen A und dem Punkte liegt, in welchem die einhüllende Curve der von O aus gezogenen geodätischen Linien OEA schneidet, so wird es noch zwei andere geodätische Linien von O nach Q geben. Die Länge einer derselben wird ein Minimum sein, die der anderen nicht. Wird Q vorwärts nach A bewegt, so wird die erstere Linie $OE_{,}A$ und congruent OEA; beide liegen aber zu verschiedenen Seiten des grössten Kreises; die letztere jener beiden Linien wird der grösste Kreis von O bis A. Wird Q weiter über A hinaus nach P bewegt, so hört die geodätische Linie $OEAP$ auf, das kleinere der beiden Minima zu sein, und die ganz auf der anderen Seite des grössten Kreises liegende geodätische Linie OFP wird die kleinste auf der Oberfläche von O nach P mögliche Linie. Aber so lange P nicht über den Punkt O' hinausgerückt ist, in welchem die geodätische Linie $OEAP$ von einer anderen von O ausgehenden ihr unendlich nahe liegenden geodätischen Linie geschnitten wird, bleibt die Länge $OEAP$ ein Minimum, nach dem allgemeinen Satze des § 358, zu dessen Beweis wir uns jetzt wenden.

Differenz zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten Seite eines kinetischen Dreiecks. — (a.) Mit Bezugnahme auf die Bezeichnung des § 360 sei $P_{,}$ eine beliebige Configuration, welche unendlich wenig von P abweicht, aber nicht auf der Bahn $O \dots P \dots O' \dots P'$ liegt. Ferner sei S eine Configuration dieses Laufes, welche eine gewisse

endliche Zeit, nachdem P passirt worden ist, erreicht wird. Sind dann $\psi, \varphi, \ldots$ die Coordinaten von P und $\psi_{,}, \varphi_{,}, \ldots$ diejenigen von $P_{,}$ und ist

$$\psi_{,} - \psi = \delta\psi, \quad \varphi_{,} - \varphi = \delta\varphi, \ldots,$$

so haben wir nach dem Taylor'schen Satze

$$OP_{,} + P_{,}S = OS + \left\{\frac{d(OP+PS)}{d\psi}\delta\psi + \frac{d(OP+PS)}{d\varphi}\delta\varphi + \cdots\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d^2(OP+PS)}{d\psi^2}(\delta\psi)^2 + 2\frac{d^2(OP+PS)}{d\psi\, d\varphi}\delta\psi\,\delta\varphi + \cdots\right\} + \text{u. s. w.}$$

Bezeichnen aber $\xi, \eta, \ldots$ die Componenten der Bewegungsgrösse in P bei dem Laufe $O \ldots P$, die mit den Componenten der Bewegungsgrösse in P bei der Fortsetzung dieses Laufes, $P \ldots S$, übereinstimmen, so haben wir [§ 322, (18)]

$$\xi = \frac{d\,OP}{d\psi} = -\frac{d\,PS}{d\psi}, \quad \eta = \frac{d\,OP}{d\varphi} = -\frac{d\,PS}{d\varphi}, \ldots$$

Folglich fallen aus dem vorhergehenden Ausdruck die Glieder, welche vom ersten Grade in $\delta\psi, \delta\varphi, \ldots$ sind, weg, und wir erhalten

$$(1)\quad \begin{cases} OP_{,} + P_{,}S - OS = \tfrac{1}{2}\left\{\dfrac{d(OP+PS)}{d\psi^2}\delta\psi^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + 2\dfrac{d^2(OP+PS)}{d\psi\, d\varphi}\delta\psi\,\delta\varphi + \cdots\right\} + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

(b.) Nach der bekannten Methode der linearen Transformationen nehmen wir jetzt

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1\delta\psi + \beta_1\delta\varphi + \cdots \\ x_2 = \alpha_2\delta\psi + \beta_2\delta\varphi + \cdots \\ \text{u. s. w.} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

an und wählen $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ so, dass die vorhergehende quadratische Function auf die Form

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_i x_i^2$$

reducirt wird, wo i die Gesammtzahl der Grade von Freiheit ist.

Dies kann auf unendlich viele Arten geschehen, und um eine specielle Art ins Auge zu fassen, können wir $\alpha_i = \dot{\psi}$, $\beta_i = \dot{\varphi}$, u. s. w. nehmen und die übrigen Grössen $\alpha, \beta, \ldots$ den Bedingungen

$$\dot{\psi}\alpha_1 + \dot{\varphi}\beta_1 + \cdots = 0, \quad \dot{\psi}\alpha_2 + \dot{\varphi}\beta_2 + \cdots = 0, \text{ u. s. w.}$$

unterwerfen. Dann wird $A_i = 0$ werden; denn wenn wir für einen Augenblick voraussetzen, $P_{,}$ liege auf dem Laufe $O \ldots P \ldots O'$, so erhalten wir

$$\frac{\delta\psi}{\dot{\psi}} = \frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}} = \cdots,$$

folglich

$$x_i = \frac{\dot{\psi}}{\delta\psi}(\delta\psi^2 + \delta\varphi^2 + \cdots), \; x_{i-1} = 0, \cdots, \; x_2 = 0, \; x_1 = 0.$$

In diesem Falle ist aber $OP_{,} + P_{,}S = OS$, und mithin muss der Werth des quadratischen Ausdrucks Null sein, d. h. wir müssen $A_i = 0$ haben. Es ist also

$$(3)\quad OP_{,} + P_{,}S - OS = \tfrac{1}{2}(A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_{i-1} x_{i-1}^2) + R,$$

wo R einen Rest bezeichnet, dessen Glieder vom dritten und von höheren Graden in $\delta\psi$, $\delta\varphi$, u. s. w., oder in x_1, x_2, u. s. w. sind.

(c.) Wir können demselben Ausdruck noch eine andere Form geben, die unten ihre Anwendung finden wird. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, $(\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}, \ldots)$ und $(\xi_{,}', \eta_{,}', \zeta_{,}', \ldots)$ seien beziehungsweise in den Bahnen $OP_{,}$ und $P_{,}S$ die Componenten der Bewegungsgrösse in $P_{,}$. Nach § 322, (18) haben wir

$$\xi_{,} = \frac{d\,OP_{,}}{d\psi_{,}},$$

folglich ist nach dem Taylor'schen Satze

$$\xi_{,} = \frac{d\,OP}{d\psi} + \frac{d^2\,OP}{d\psi^2}\delta\psi + \frac{d^2\,OP}{d\psi\, d\varphi}\delta\varphi + \cdots + \text{u. s. w.}$$

Ebenso ergiebt sich

$$-\xi_{,}' = \frac{d\,PS}{d\psi} + \frac{d^2\,PS}{d\psi^2}\delta\psi + \frac{d^2\,PS}{d\psi\, d\varphi}\delta\varphi + \cdots + \text{u. s. w.}$$

Da nun $\frac{d\,OP}{d\psi} = -\frac{d\,PS}{d\psi}$ ist, so folgt

$$(4)\quad \xi_{,}' - \xi_{,} = -\left\{\frac{d^2(OP+PS)}{d\psi^2}\delta\psi + \frac{d^2(OP+PS)}{d\psi\, d\varphi}\delta\varphi + \cdots\right\} + \text{u. s. w.}$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für $\eta_{,}' - \eta_{,}$, u. s. w., folglich ist (1) dasselbe wie

$$(5)\quad OP_{,} + P_{,}S - OS = -\tfrac{1}{2}\{(\xi_{,}' - \xi_{,})\delta\psi + (\eta_{,}' - \eta_{,})\delta\varphi + \cdots\} + R,$$

wo R einen Rest bezeichnet, dessen Glieder vom dritten und von höheren Graden sind. Auch liefert die Transformation von $\delta\psi$, $\delta\varphi$, ... auf $x_1, x_2, \ldots$ offenbar

$$(6)\quad \begin{cases} \xi_{,}' - \xi_{,} = -(A_1\alpha_1 x_1 + A_2\alpha_2 x_2 + \cdots + A_{i-1}\alpha_{i-1} x_{i-1}) \\ \eta_{,}' - \eta_{,} = -(B_1\beta_1 x_1 + B_2\beta_2 x_2 + \cdots + B_{i-1}\beta_{i-1} x_{i-1}) \\ \text{u. s. w. u. s. w.} \end{cases}$$

(d.) Nun bleiben für jeden unendlich kleinen Zeitraum die Geschwindigkeiten nahezu constant; dasselbe ist mit den Coefficienten (ψ, ψ), (ψ, φ), u. s. w. in dem Ausdruck [§ 313, (2)] für T der Fall. Folglich erhalten wir für die Wirkung

$$\int 2\,T dt = \sqrt{2T}\int\sqrt{2T}\,dt$$
$$= \sqrt{2T}\{(\psi,\psi)(\psi - \psi_0)^2 + 2(\psi,\varphi)(\psi - \psi_0)(\varphi - \varphi_0) + \text{u. s. w.}\}^{\frac{1}{2}},$$

wo $(\psi_0, \varphi_0, \ldots)$ die Coordinaten der Configuration sind, von welcher aus die Wirkung gerechnet wird. Wenn also P, P', P'' drei beliebige einander unendlich nahe liegende Configurationen sind und wir die Quadratwurzeln aus quadratischen Functionen, wie sie der vorhergehende Ausdruck ent-

hält, mit dem Buchstaben Q bezeichnen, hinter welchen die entsprechenden Coordinatendifferenzen geschrieben werden, so ist

$$(7)\quad \begin{cases} PP' = \sqrt{2T}\,.\,Q\,\{(\psi - \psi'), (\varphi - \varphi'), \ldots\} \\ P'P'' = \sqrt{2T}\,.\,Q\,\{(\psi' - \psi''), (\varphi' - \varphi''), \ldots\} \\ P''P = \sqrt{2T}\,.\,Q\,\{(\psi'' - \psi), (\varphi'' - \varphi), \ldots\}. \end{cases}$$

In dem besonderen Falle eines einzelnen freien materiellen Punktes werden diese Ausdrücke einfach den Abständen PP', $P'P''$, $P''P$ proportional, und die Planimetrie lehrt, dass

$$P'P + PP'' > P'P''$$

ist, ausser wenn P auf der Geraden $P'P''$ liegt.

Diesen Satz mittels der vorhergehenden Ausdrücke (7) zu bewahrheiten, läuft darauf hinaus, ihn analytisch-geometrisch mit Benutzung eines schiefwinkligen geradlinigen Coordinatensystems zu beweisen, und ist nothwendig etwas complicirt. Wenn $(\psi, \varphi) = (\varphi, \vartheta) = (\vartheta, \psi) = 0$ ist, so werden die Coordinaten rechtwinklig, und der algebraische Beweis bietet keine Schwierigkeit. Auf ganz analoge Weise lässt sich leicht zeigen, dass für jede beliebige Anzahl von Coordinaten ψ, φ, u. s. w.

$$P'P + PP'' > P'P''$$

ist, ausser wenn

$$\frac{\psi - \psi'}{\psi'' - \psi'} = \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi'' - \varphi'} = \frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta'' - \vartheta'} = \cdots$$

ist (d. h. wenn P auf der Bahn von P' nach P'' liegt), in welchem Falle man

$$P'P + PP'' = P'P''$$

hat, wo $P'P$, u. s. w. durch (7) gegeben sind. Ferner ist es leicht, mit Hülfe von (1) den genauen Ausdruck von $P'P + PP'' - P'P''$ zu finden, wenn P nicht auf der Bahn von P' nach P'', aber derselben unendlich nahe liegt. Es ist aber nicht nöthig, hier auf solche rein algebraische Untersuchungen einzugehen.

(e.) Es leuchtet ein, dass, wie wir schon in § 358 bemerkten, die Wirkung längs irgend eines natürlichen Laufes die **kleinste zwischen seinen Endconfigurationen mögliche** ist, wenn nur ein hinlänglich kurzer Lauf betrachtet wird. Für alle Fälle, in denen die Zeit von O bis S kleiner als eine gewisse Grösse ist, muss daher das in dem Ausdruck (3) von $OP_{,} + P_{,}S - OS$ enthaltene quadratische Glied für alle Werthe von x_1, x_2, u. s. w. positiv sein, und somit ist jede der Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ positiv.

(f.) Es werde jetzt S immer weiter von O auf dem bestimmten Laufe $O \ldots P \ldots O'$ fortbewegt, bis es O' wird. Ist das geschehen, so werde $P_{,}$ auf einem durch O und O' gehenden natürlichen Lauf angenommen, der unendlich wenig von dem Laufe OPO' abweicht. Da nun $OP_{,}O'$ ein natürlicher Lauf ist, so ist

$$\xi_{,}' - \xi_{,} = \eta_{,}' - \eta_{,} = \cdots = 0,$$

folglich geht (5) über in

$$OP_{,} + P_{,}O' - OO' = R,$$

und dies beweist, dass auch in dem Ausdruck (3) für dieselbe Grösse das quadratische Glied verschwinden muss. Es muss also wenigstens einer der Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ verschwinden, und wenn wir nur z. B. $A_{i-1} = 0$, haben, so muss

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_{i-2} = 0$$

sein. Diese Gleichungen drücken die Bedingung aus, dass P_i auf einem natürlichen Laufe von O nach O' liege.

(g.) Wenn umgekehrt einer oder mehrere der Coefficienten A_1, A_2, u. s. w. verschwinden, wenn wir z. B. $A_{i-1} = 0$ haben, so muss S ein kinetischer Brennpunkt sein. Denn wenn wir P_i so annehmen, dass

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_{i-2} = 0$$

ist, so haben wir nach (6)

$$\xi_i' - \xi_i = \eta_i' - \eta_i = \cdots = 0.$$

(h.) Wir haben also bewiesen, dass in einem O conjugirten kinetischen Brennpunkt die Wirkung von O aus kein Minimum erster Ordnung *) ist, und dass die letzte Configuration, bis zu welcher die Wirkung von O aus ein Minimum erster Ordnung ist, ein O conjugirter kinetischer Brennpunkt sein wird.

(i.) Es bleibt noch zu beweisen, dass die Wirkung von O aus aufhört, ein Minimum zu sein, wenn der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt überschritten wird. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, $O \ldots P \ldots O' \ldots P'$ sei, wie in § 360, ein über O', den ersten O conjugirten kinetischen Brennpunkt, hinausgehender natürlicher Lauf, und P, P' liegen einander so nahe, dass weder P noch P' zwischen P und P' einen conjugirten kinetischen Brennpunkt hat. Ist dann $O \ldots P_i \ldots O'$ ein natürlicher Lauf von O nach O', der von $O \ldots P \ldots O'$ unendlich wenig abweicht, so unterscheidet sich nach dem, was wir in (e.) bewiesen haben, die Wirkung $O\,O'$ längs der Bahn $O \ldots P_i \ldots O'$ von der Wirkung $O\,O'$ längs der Bahn $O \ldots P \ldots O'$ nur durch eine unendlich kleine Grösse dritter Ordnung R. Es ist folglich

$$\begin{aligned} \text{Wirkung } (O \ldots P \ldots O' \ldots P') &= \text{Wirkung } (O \ldots P_i \ldots O') + O'P' + R \\ &= OP_i + P_iO' + O'P' + R. \end{aligned}$$

Durch Anwendung von (e.) ergiebt sich aber, dass

$$P_iO' + O'P' = P_iP' + Q$$

ist, wo Q eine ihrer Natur nach positive unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung bezeichnet. Wir erhalten somit

$$\text{Wirkung } (O \ldots P \ldots O' \ldots P') = OP_i + P_iP' + Q + R,$$

und, da R im Vergleich mit Q unendlich klein ist,

$$\text{Wirkung } (O \ldots P \ldots O' \ldots P') > OP_i + P_iP'.$$

---

*) Ein Maximum oder ein Minimum „erster Ordnung" einer Function einer oder mehrerer Veränderlichen ist ein solches, bei welchem das Differential ersten Grades, nicht aber dasjenige zweiten Grades verschwindet.

Danach entspricht dem gebrochenen Lauf $O \ldots P_{\prime\prime} P_{\prime} \ldots P'$ eine kleinere Wirkung, als dem natürlichen Lauf $O \ldots P \ldots O' \ldots P'$, und da beide einander unendlich nahe liegen, so ist die Wirkung im letzteren kein Minimum.

362. Wir haben bewiesen, dass die Wirkung von irgend einer Configuration aus im ersten derselben conjugirten kinetischen Brennpunkt aufhört ein Minimum zu sein. Daraus geht unmittelbar hervor, dass, wenn O' der erste O conjugirte kinetische Brennpunkt ist, der nach dem Durchgang durch O erreicht wird, es auf diesem Lauf zwischen O und O' nicht zwei Configurationen geben kann, die einander conjugirte Brennpunkte wären. Denn da die Wirkung von O aus gerade dann aufhört ein Minimum zu sein, wenn O' erreicht wird, so muss sie zwischen irgend zwei Configurationen desselben Laufs, die zwischen O und O' liegen, nothwendig ein Minimum sein.

363. Anzahl der kinetischen Brennpunkte. — Wenn i Grade von Bewegungsfreiheit vorhanden sind, so giebt es im Allgemeinen auf jedem natürlichen Laufe von einer beliebigen besonderen Configuration O aus wenigstens $i - 1$ kinetische Brennpunkte, die O conjugirt sind. Wenn z. B. ein Lichtstrahl von einem leuchtenden Punkte O aus durch den Mittelpunkt einer convexen Linse hindurchgeht, die schräg gegen seine Bahn gehalten wird, so giebt es im Sinne unserer obigen Definition zwei O conjugirte kinetische Brennpunkte; es sind dies die Punkte, in welchen die Richtung des Centralstrahls durch die sogenannten „Focallinien" *) eines von O ausgehenden divergirenden Büschels von Strahlen geschnitten wird, welche der Durchgang durch die Linse convergent macht. Diese kinetischen Brennpunkte können auch theilweise oder sämmtlich auf dem vor O befindlichen Theile der Bahn liegen; das ist z. B. bei einem Projectil der Fall, wenn sein Lauf schräg abwärts durch O geht. Sie können auch zum Theil oder sämmtlich verloren gehen, wie z. B. wenn in dem eben angeführten Beispiel aus der Optik die Linse nur stark genug ist, in einer der Hauptebenen Convergenz zu erzeugen, oder wenn sie zur Erzeugung von Convergenz überhaupt zu schwach ist. Auch im Falle der ungestörten geradlinigen Bewegung eines Punktes, oder der Bewegung eines von keiner Kraft beeinflussten Punktes auf einer anticlastischen Oberfläche (§ 355) giebt es keine reellen kinetischen Brennpunkte. In der Bewegung eines Projectils (das

*) Im zweiten Bande dieses Werkes hoffen wir alle erforderlichen elementaren Erklärungen über diesen Gegenstand zu geben.

nicht auf eine Verticalebene beschränkt ist) kann es auf jeder Bahn nur einen kinetischen Brennpunkt geben, der einem gegebenen Punkte conjugirt ist, obschon drei Grade von Freiheit vorhanden sind. Weiter kann es aber auch auf einer Bahn mehr als $i - 1$ Brennpunkte geben, die sämmtlich einer Configuration conjugirt sind. Das ist z. B. auf der Bahn eines durch keine Kraft beeinflussten materiellen Punktes der Fall, welcher sich um die Oberfläche eines Ankerringes herum längs des äusseren grössten Kreises oder längs einer wellenförmigen geodätischen Linie, wie wir sie in § 361 betrachtet haben, bewegt: In diesem Falle giebt es für jeden Punkt der Bahn offenbar eine unendliche Anzahl conjugirter Brennpunkte, die in gleichen Abständen von einander liegen.

Mit Bezugnahme auf die Bezeichnung des § 361 (f.) lassen wir S sich allmälig weiter bewegen, bis zuerst einer der Coefficienten, etwa A_{i-1}, darauf ein anderer, etwa A_{i-2}, u. s. w. verschwindet. Wir haben gesehen, dass jede dieser Lagen von S ein kinetischer Brennpunkt ist, und erhalten auf diese Weise durch das successive Verschwinden der $i - 1$ Coefficienten $i - 1$ Brennpunkte. Wenn keiner der Coefficienten jemals Null werden kann, so ist kein kinetischer Brennpunkt vorhanden. Wenn einer oder mehrere derselben nach dem Verschwinden zu einem Minimumwerth gelangen und, wenn sich S weiter bewegt, aufs Neue Null werden, so können mehr als $i - 1$ Brennpunkte vorhanden sein, deren jeder derselben Configuration O conjugirt ist.

364. Satz vom Maximum der Wirkung. — Wenn von einer Configuration O $i - 1$ verschiedene*) Bahnen ausgehen, von denen jede von einer gewissen natürlichen Bahn $O..E..O_1..O_2.....O_{i-1}..Q$ unendlich wenig abweicht und letztere in den Configurationen $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_{i-1}$ schneidet, und wenn es auf derselben zwischen O und Q ausser $O_1, \ldots, O_{i-1}$ keine anderen O conjugirten kinetischen Brennpunkte und zwischen E und Q keinen einzigen E conjugirten Brennpunkt giebt, so ist die Wirkung auf dieser natürlichen Bahn von O bis Q grösser, als die Wirkung auf irgend einer anderen Bahn $O\ldots P_{\prime\prime} P_{\prime}\ldots Q$, wo $P_{\prime}$ eine Configuration ist, welche von einer beliebigen zwischen E und O_1 auf der Hauptbahn $O..E..O_1..O_2.....O_{i-1}..Q$ liegenden Configuration nur unendlich wenig abweicht, und wo $O\ldots P_{\prime\prime} P_{\prime}\ldots Q$ die von dieser Hauptbahn unendlich wenig verschiedenen natürlichen Bahnen von O nach $P_{\prime}$ und von $P_{\prime}$ nach Q bezeichnen.

---

*) Zwei Bahnen heissen nicht verschieden, wenn sie sich nur in der absoluten Grösse ihrer Abweichungen von der Hauptbahn, nicht in den Proportionen der Componenten dieser Abweichungen unterscheiden.

In § 361 (i.) sei O' irgend einer der Brennpunkte $O_1, O_2, \ldots, O_{i-1}$, etwa O_1, und P_i werde in diesem Falle P_1 genannt. Der dort gegebene Beweis zeigt, dass

$$O\,Q > O\,P_1 + P_1\,Q$$

ist. Folglich giebt es $i - 1$ verschiedene gebrochene Bahnen

$$O \ldots P_1,\ P_1 \ldots Q;\quad O \ldots P_2,\ P_2 \ldots Q;\ \text{u. s. w.},$$

in deren jeder die Wirkung kleiner als in der Hauptbahn von O nach Q ist. Welches aber auch die Abweichung von P_i sein möge, sie lässt sich offenbar aus den Abweichungen von P nach P_1, von P nach P_2, von P nach $P_3, \ldots$, von P nach P_{i-1} zusammensetzen, welche beziehungsweise diesen $i - 1$ Fällen entsprechen, und man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} O\,P_i + P_i\,Q - O\,Q = (O\,P_1 + P_1\,Q - O\,Q) \\ + (O\,P_2 + P_2\,Q - O\,Q) + \cdots \end{aligned}$$

ist. Daraus folgt

$$O\,P_i + P_i\,Q < O\,Q, \text{ was zu beweisen war.}$$

365. Anwendungen auf zwei Grade von Freiheit. — Der Einfachheit wegen wollen wir jetzt nur Fälle betrachten, in denen nur zwei Grade (§§ 195, 204) von Bewegungsfreiheit vorhanden sind. Wenn ein System beim Durchgang durch eine gewisse Configuration eine beliebige unendlich kleine conservative Störung erfährt, so sehen wir, dass die Bahn der gestörten Bewegung mit derjenigen der ungestörten erst in der ersten Configuration der letzteren wieder zusammentrifft, in welcher die Wirkung in der ungestörten Bewegung aufhört ein Minimum zu sein. Im Falle eines materiellen Punktes z. B., der auf einer Oberfläche bleiben muss und einem beliebigen conservativen Kraftsystem unterworfen ist, bringt eine unendlich kleine conservative Störung der Bewegung durch einen Punkt O eine gestörte Bahn hervor, welche die Bahn der ungestörten Bewegung in dem ersten Punkte O' schneidet, in welchem die Wirkung von O aus in der ungestörten Bahn aufhört ein Minimum zu sein. Oder wenn von einem Punkte O aus nach allen Richtungen einer Verticalebene hin Projectile mit gleichen Geschwindigkeiten geschleudert werden, die nur der Wirkung der Schwere ausgesetzt sind, so liegen, wie man leicht beweisen kann, die Punkte, in denen jede Bahn von der nächstfolgenden geschnitten wird, in einer Parabel, deren Brennpunkt O und deren Scheitel der von dem direct nach oben geschleuderten Projectil erreichte Punkt ist. In der wirklichen Bahn jedes Projectils von O aus ist die Wirkung bis zu einem Punkte P, der vor der einhüllenden Parabel erreicht wird, die kleinste mögliche; sie ist aber auf dieser

Bahn kein Minimum bis zu einem Punkte Q, der **nach** dem Durchgange durch die einhüllende Curve erreicht wird.

366. Wenn ferner ein materieller Punkt längs des grössten Kreises der glatten inneren Fläche eines hohlen Ankerringes hingleitet, so wird die „Wirkung“ oder einfach die Länge des Weges von Punkt zu Punkt die kleinste mögliche für jede Länge sein, die kleiner als $\pi\sqrt{ab}$ ist (§ 351). Wenn daher eine Schnur um den grössten Kreis eines vollkommen glatten Ankerringes gelegt wird, so wird sie abgleiten, wenn man sie nicht in ihrer Lage durch Haken oder durch Bänder irgend einer Art festhält, die um den Kreis herum in Punkten sich befinden, deren Entfernungen von einander kleiner als $\pi\sqrt{ab}$ sind. Man vergleiche hier auch § 361.

Oder wenn ein materieller Punkt eine geneigte cylindrische Rinne hinuntergleitet, so wird die Wirkung von irgend einem Punkte an bis zu einem anderen Punkte längs der geradlinigen Bahn die kleinste mögliche sein, wenn dieser Punkt in einer Zeit erreicht wird, die kleiner als diejenige ist, in welcher ein einfaches Pendel, dessen Länge gleich dem Radius der Rinne ist, und das anstatt von der ganzen Schwerkraft g von einer Kraft $g \cos i$ beeinflusst wird, seine grösste Abweichung nach einer Seite zu erreicht. Von irgend einem Punkte an bis zu einem anderen Punkte wird aber die Wirkung in der geraden Bahn kein Minimum sein, wenn die Zeit, in welcher dieser Punkt erreicht wird, grösser als die angegebene Grösse ist. Der Fall, in welchem die Rinne horizontal ($i = 0$) ist und der materielle Punkt dieselbe entlang geschleudert wird, ist besonders einfach und lehrreich; man kann ihn leicht eingehend bearbeiten, ohne einen der allgemeinen Sätze über die Wirkung voraussetzen zu müssen.

367. Hamilton's zweite Form seiner charakteristischen Function. — In unserer früheren Darstellung des Hamilton'schen Princips und der Entwicklungen und Anwendungen, die dasselbe erhalten hat, haben wir ein Verfahren befolgt (§§ 321, 323), in welchem die anfänglichen und die Endcoordinaten, sowie die constante Summe der potentiellen und der kinetischen Energie die Elemente sind, als deren Function die Wirkung vorausgesetzt wird. Hamilton hat noch ein zweites Verfahren eingeschlagen, nach welchem die Wirkung durch die anfänglichen und die Endcoordinaten und die für die Bewegung vorgeschriebene Zeit ausgedrückt wird; auf diese Weise sind eine Reihe von Ausdrücken hergeleitet, welche den von uns entwickelten ganz analog sind. Für praktische An-

wendungen ist diese Methode im Allgemeinen nicht so zweckmässig, wie die erstere, und die analytischen Beziehungen zwischen beiden sind so einleuchtend, dass wir auf dieselben hier nicht einzugehen brauchen.

368. Satz von Liouville. — Zum Schluss wollen wir noch auf eine neuere analytische Untersuchung der Bewegung eines conservativen Systems von Liouville (Comptes Rendus, 1856) aufmerksam machen, welche unmittelbar zu dem Princip der kleinsten Wirkung und zu dem Hamilton'schen Princip mit den von Jacobi und Anderen gegebenen Entwicklungen führt, welche aber auch einen bemerkenswerthen und absolut neuen Satz über die Grösse der Wirkung längs eines beliebigen gezwungenen Laufs liefert. Der Kürze wegen beschränken wir uns darauf, diesen Satz für einen einzelnen freien materiellen Punkt zu geben, und verweisen den Leser in Betreff der vollständigen Untersuchung Liouville's auf dessen Originalarbeit, in welcher allgemeine für jedes beliebige conservative System passende Coordinaten zu Grunde gelegt sind.

Es seien (x, y, z) die Coordinaten eines beliebigen Punktes, durch welchen sich der materielle Punkt hindurch bewegen möge, V seine potentielle Energie in dieser Lage, E die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie der in Rede stehenden Bewegung und A die Wirkung von einer beliebigen Lage (x_0, y_0, z_0) längs einer willkürlich gewählten Bahn bis zum Punkte (x, y, z). (Wir können z. B. annehmen, der materielle Punkt werde diese Bahn entlang durch eine Röhre geleitet, welche keine Reibung hervorruft.) Wird dann die Masse des Punktes als die Einheit angenommen, so ist (§ 318)

$$A = \int v\,ds = \int \sqrt{2(E-V)}\,\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

Bezeichnet nun θ eine Function von x, y, z, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{d\theta^2}{dy^2} + \frac{d\theta^2}{dz^2} = 2(E - V)$$

genügt, so haben wir

$$A = \int \sqrt{\left(\frac{d\theta^2}{dx^2} + \frac{d\theta^2}{dy^2} + \frac{d\theta^2}{dz^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

$$= \int \sqrt{\left[\left(\frac{d\theta}{dx}dx + \frac{d\theta}{dy}dy + \frac{d\theta}{dz}dz\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dz}dy - \frac{d\theta}{dy}dz\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dx}dz - \frac{d\theta}{dz}dx\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dy}dx - \frac{d\theta}{dx}dy\right)^2\right]}.$$

Es ist aber

$$\frac{d\theta}{dx}dx + \frac{d\theta}{dy}dy + \frac{d\theta}{dz}dz = d\theta$$

und wenn $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die wirklichen Geschwindigkeitscomponenten längs der willkürlichen Bahn und $\dot{\theta}$ die Grösse der in dieser Bewegung während der Zeiteinheit erfolgenden Zunahme von θ bezeichnen,

$$dx = \dot{x}\,dt,\ dy = \dot{y}\,dt,\ dz = \dot{z}\,dt,\ d\theta = \dot{\theta}\,dt.$$

Der vorhergehende Ausdruck verwandelt sich daher in

$$A = \int d\theta \sqrt{\left\{1 + \frac{\left(\dot{y}\frac{d\theta}{dz} - \dot{z}\frac{d\theta}{dy}\right)^2 + \left(\dot{z}\frac{d\theta}{dx} - \dot{x}\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + \left(\dot{x}\frac{d\theta}{dy} - \dot{y}\frac{d\theta}{dx}\right)^2}{\dot{\theta}^2}\right\}}.$$

Drittes Capitel.

Erfahrung.

369. Beobachtung und Experiment. — Mit dem Ausdruck Erfahrung bezeichnen wir in der Physik, nach Herschel's Vorgang, unsere Mittel, mit der materiellen Welt und den sie regelnden Gesetzen bekannt zu werden. Im Allgemeinen sind die Erscheinungen, die wir um uns her vor sich gehen sehen, zusammengesetzt, d. h. Ergebnisse des Zusammenwirkens vieler Ursachen. Wenn wir, wie in der Astronomie, diese Ursachen dadurch zu bestimmen suchen, dass wir einfach ihre Wirkungen überwachen, so beobachten wir; wenn wir dagegen, wie in unseren Laboratorien, nach Belieben in die Ursachen oder Umstände einer Erscheinung eingreifen, so sagt man, wir experimentiren.

370. Beobachtung. — So z. B. können wir unter der Voraussetzung, dass wir im Besitz von Instrumenten zur Zeit- und Winkelmessung sind, durch eine Reihe von Beobachtungen die relative Lage erforschen, welche Sonne und Erde in verschiedenen Augenblicken zu einander einnehmen, und aus den Variationen in dem scheinbaren Durchmesser der ersteren liessen sich (die Methode lässt sich durchaus nicht mit Genauigkeit anwenden; wir führen sie hier nur der Erläuterung wegen an) die Verhältnisse unserer Abstände von derselben für jene Augenblicke berechnen. Wir würden auf diese Weise zu einer Reihe von Beobachtungen gelangen, in denen die Zeit, die angulare Lage in Beziehung auf die Sonne und die Verhältnisse der Abstände von derselben enthalten wären, und diese Beobachtungen würden (wenn ihre Anzahl gross genug wäre) uns in den Stand setzen, die Gesetze zu entdecken, welche den Zusammenhang jener Bestimmungsstücke ausdrücken.

Aehnliche Methoden könnte man ersinnen für die Betrachtung der Bewegung irgend eines Planeten um die Sonne, eines Trabanten um seinen Planeten, oder eines Sternes einer Doppelgruppe um den anderen.

371. Im Allgemeinen werden alle Data der Astronomie auf diesem Wege bestimmt, und dasselbe gilt von solchen Gegenständen, wie Ebbe und Fluth, oder Meteorologie. So sind die Linien gleicher Temperatur, gleicher magnetischer Neigung oder Intensität, die Linien ohne magnetische Abweichung, der Zusammenhang der Sonnenflecke mit dem Erdmagnetismus und eine Menge anderer Data und Erscheinungen, die im Verlaufe dieses Werkes in den betreffenden Capiteln behandelt werden müssen, nur aus der Beobachtung herzuleiten. In diesen Fällen findet sich der Apparat für diese ungeheuren Experimente in der Natur fertig aufgestellt vor, und der Forscher hat nichts zu thun, als ihren Verlauf bis in die letzten Einzelheiten zu überwachen und zu messen.

372. Auch in dem oben gewählten Beispiele, den planetarischen Bewegungen, sind die beobachteten Wirkungen zusammengesetzter Art; denn, ausser vielleicht im Falle eines Doppelsternes, haben wir kein Beispiel einer ungestörten Wirkung eines Himmelskörpers auf einen anderen. Aber wenn es sich um eine erste Annäherung handelt, so ergiebt sich, dass die Bewegung eines Planeten um die Sonne dieselbe ist, wie wenn ausser diesen beiden keine anderen Körper existirten. Die Annäherung reicht aus, das wahrscheinliche Gesetz ihrer Wechselwirkung anzudeuten, dessen volle Bestätigung erlangt wird, wenn wir, seine Wahrheit voraussetzend, die danach berechneten störenden Wirkungen in Anschlag bringen und finden, dass letztere die beobachteten Abweichungen von den Consequenzen der ersten Voraussetzung vollständig erklären. Dies mag dazu dienen, einen Begriff von der Art und Weise zu geben, wie man die Gesetze von Erscheinungen findet, die nur in zusammengesetzter Form beobachtet werden können; die Methode lässt sich immer direct anwenden, wenn man weiss, dass eine Ursache von überwiegendem Einflusse ist.

373. **Experiment.** — Wir wollen jetzt einen Fall der zweiten Art betrachten, d. h. einen Fall, in welchem die Wirkungen aus so verschiedenen Ursachen herrühren, dass wir die letzteren aus der Beobachtung von Combinationen, wie sie die Natur darbietet, nicht herleiten können, sondern suchen müssen, uns selbst andere Combinationen zu bilden, die uns in den Stand setzen, die Wirkungen jeder Ursache wo möglich einzeln, jedenfalls aber mit einer nur ge-

ringen, durch das Eingreifen anderer Ursachen herbeigeführten Modification zu studiren.

Wenn ein Stein losgelassen wird, so fällt er auf den Boden; wenn ein Ziegelstein und ein Kieselstein in demselben Augenblick von der Spitze einer Klippe fallen gelassen werden, so bleiben sie im Fallen neben einander und erreichen gleichzeitig den Boden. Bei einem Ziegelstein und einem Schiefer ist dies nicht der Fall, und während der erstere in einer nahezu verticalen Richtung fällt, beschreibt der letztere einen sehr verwickelten Weg. Ein Bogen Papier oder ein Stück Goldblatt zeigt sogar noch grössere Unregelmässigkeiten als ein Schieferstein. Aber durch eine geringe Modification der Umstände gewinnen wir eine tiefere Einsicht in die Natur der Frage. Werden das Papier und das Goldblatt in Kugeln zusammengerollt, so fallen sie in einer nahezu verticalen Linie. Es sind hier im Grunde offenbar zwei Ursachen thätig, von denen die eine bewirkt, dass alle Körper fallen und zwar in verticaler Richtung, während die zweite, die von der Gestalt und Substanz des Körpers abhängt, dessen Fall zu verzögern und die verticale Richtung zu ändern strebt. Wie können wir die Wirkungen, welche die erstere Ursache auf alle Körper hat, studiren, ohne merklich durch die letztere gestört zu werden? Die Wirkungen des Windes, u. s. w. zeigen ohne Weiteres an, was die zweite Ursache ist, nämlich die Luft (wir dürfen in der That annehmen, dass die Existenz der Luft durch solche Wirkungen entdeckt worden ist), und um die Natur der Wirkung der ersteren Ursache zu studiren, ist es nöthig, die Verwicklungen zu beseitigen, welche aus der Anwesenheit der Luft herrühren. Daraus ergiebt sich die Nothwendigkeit eines Experimentes. Mittels eines später zu beschreibenden Apparates entfernen wir aus dem Innern eines Gefässes den grösseren Theil der Luft, und in diesem Gefässe stellen wir sodann aufs Neue unsere Versuche über den Fall der Körper an. Dann tritt sofort ein allgemeines Gesetz zu Tage, das im höchsten Grade einfach und in seinen Folgen von ungeheurer Wichtigkeit ist, nämlich dass alle Körper, von welcher Grösse, Form und Substanz sie auch sein mögen, im luftleeren Raume stets neben einander bleiben, wenn man sie in demselben Moment neben einander hat fallen lassen. Bevor die Erscheinungen auf diese Weise experimentell getrennt waren, hatten sich zu hastige Philosophen in den Schluss gestürzt, dass einige Körper die Eigenschaft der Schwere, andere die der Leichtigkeit besitzen, u. s. w. Wäre dieser Zustand der Dinge geblieben, so würde das Gesetz der Gravitation, obgleich deren Wir-

kung sich durch das ganze Weltall äussert, vom menschlichen Geist nie als ein allgemeines Princip erkannt worden sein.

Eine blosse Beobachtung des Blitzes und seiner Wirkungen würde uns nie zur Entdeckung ihrer Beziehungen zu den Erscheinungen geführt haben, welche geriebener Bernstein zeigt. Es war dazu eine Modification des Laufes der Natur erforderlich; wir mussten die atmosphärische Elektricität bis in unsere Laboratorien leiten. Ohne Experiment hätten wir sogar niemals die Existenz des Erdmagnetismus erkennen können.

374. **Regeln zur Leitung von Experimenten.** — In allen Fällen, in denen ein besonderes Agens oder eine besondere Ursache erforscht werden soll, sollten Experimente in der Weise angestellt werden, dass sie wo möglich zu Resultaten führen, die von dieser Ursache allein abhängen; oder wenn sich dies nicht ausführen lässt, so sollten sie so angeordnet werden, dass die Wirkungen der zu untersuchenden Ursache verstärkt werden, bis sie die unvermeidlichen gleichzeitig vorhandenen übrigen Wirkungen so sehr überwiegen, dass letztere nur als Störungen, nicht als wesentliche Modificationen der Wirkungen der Hauptursache angesehen werden können.

So können wir, um die Natur der Wirkung eines galvanischen Stromes auf eine magnetisirte Nadel zu finden, jede dieser beiden Methoden anwenden. Wir können z. B. die störenden Einwirkungen des Erdmagnetismus auf die Nadel dadurch neutralisiren, dass wir einem Magnetstabe eine passende Lage in ihrer Nähe geben. Dies ist ein Beispiel der ersteren Methode.

Wir können auch durch Vergrösserung der Stromstärke oder dadurch, dass wir den Draht mehrmals um die Nadel führen (wie bei der Beschreibung des Galvanometers dargelegt werden wird), die Wirkungen des Stromes in einem solchen Grade verstärken, dass im Vergleich mit ihnen die Wirkungen des Erdmagnetismus vernachlässigt werden dürfen.

375. In einigen Fällen jedoch ist die letztere Art zu verfahren äusserst trügerisch — so z. B. bei der Anwendung von Condensatoren zur Entdeckung von sehr kleinen elektromotorischen Kräften. In diesem Falle erzeugt die Reibung zwischen den Theilen des Condensators oft mehr Elektricität, als diejenige ist, welche gemessen werden soll, so dass sich das richtige Resultat nicht herleiten lässt: Eine schwache positive Ladung z. B. kann verdreifacht, neutralisirt oder sogar in eine negative Ladung verwandelt werden, durch ver-

schiedene Vorgänge, die von so delicater Natur sind, dass sie nicht entdeckt und daher nicht vermieden werden können.

376. Wir sehen somit, dass es zweifelhaft ist, welche von diesen Methoden in einem besonderen Falle den Vorzug verdient, und in der That hat derjenige bei seinen Untersuchungen die meiste Aussicht auf Erfolg, der, nicht entmuthigt durch das Fehlschlagen einer Form des Experimentes, sorgfältig seine Methoden ändert und so in jeder denkbaren Weise den Gegenstand seiner Forschungen in Angriff nimmt.

377. Rückständige Erscheinungen. — Eine äusserst wichtige von Herschel herrührende Bemerkung betrifft die sogenannten rückständigen Erscheinungen. Wenn in einem Experiment alle bekannten Ursachen in Rechnung gezogen sind, so bleiben doch noch gewisse Wirkungen unerklärt zurück (die übrigens äusserst gering sein mögen). Diese Wirkungen müssen sorgfältig erforscht werden, und es ist jede denkbare Abänderung in der Anordnung des Apparates, u. s. w. zu versuchen, bis wir wo möglich dahin gelangen, die rückständige Erscheinung so zu vergrössern, dass wir ihre Ursache entdecken können. Auf diesem Wege haben wir vielleicht bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft die meiste Aussicht, unser Wissensgebiet zu erweitern; jedenfalls wird dies Verfahren durch die neueste Geschichte der Naturwissenschaften gerechtfertigt. So war, um nur einige wenige Beispiele zu geben, und die Entdeckung der Elektricität und des Magnetismus durch die Alten mit Stillschweigen zu übergehen, der eigenthümliche Geruch, den man in einem Zimmer beobachtet, in welchem eine Elektrisirmaschine in Thätigkeit erhalten wird, schon seit langer Zeit wahrgenommen worden; aber man nannte ihn „Geruch der Elektricität", und, hiermit zufrieden, liess man ihn unerklärt. Der Scharfsinn Schönbein's führte zu der Entdeckung, dass dieser Geruch von der Bildung des Ozons herrührt, eines ganz ungewöhnlichen Körpers von enormer chemischer Energie, dessen Natur noch unaufgeklärt ist, obwohl er seit Jahren die Aufmerksamkeit der Chemiker auf sich gezogen hat.

378. Geringe Anomalien in der Bewegung des Uranus führten Adams und Le Verrier zu der Entdeckung eines neuen Planeten, und die Thatsache, dass eine Magnetnadel schneller zur Ruhe kommt, wenn sie über einer Kupferplatte schwingt, als wenn letztere entfernt ist, führte Arago zu dem früher sogenannten „Rotationsmagnetismus", der seitdem erklärt, unendlich erweitert und zu den wichtigsten Zwecken angewandt worden ist. In der That leitete

diese zufällige Bemerkung über die Oscillation einer Nadel zu Thatsachen, aus denen sich unter Faraday's Händen die grosse Entdeckung der Induction elektrischer Ströme durch Magnete und durch andere Ströme entwickelte. Wir haben nicht nöthig, uns über diesen Punkt weiter auszulassen, da die Beweise für die Wahrheit und den Nutzen des Princips auf den folgenden Seiten beständig wiederkehren werden. Unser Zweck ist gewesen, nicht sowohl Anwendungen, als Methoden zu geben und zu zeigen, wie man eine neue Combination wo möglich anzugreifen hat, wenn man die verschiedenen Ursachen, durch deren Zusammenwirken die meisten beobachteten Erscheinungen, sogar die anscheinend einfachsten, hervorgebracht zu werden pflegen, trennen und einzeln studiren will.

379. Unerwartete Uebereinstimmung oder Abweichung in den Resultaten verschiedener Versuche. — Wenn ein Experiment bei mehrmaliger Wiederholung beständig verschiedene Resultate liefert, so ist es entweder sehr nachlässig angestellt worden, oder es muss eine nicht in Rechnung gezogene störende Ursache vorhanden sein. Andererseits hat man in Fällen, in denen es nicht wahrscheinlich ist, dass wiederholte Versuche zu sehr nahe übereinstimmenden Resultaten führen werden, einen unerwarteten Grad von Uebereinstimmung in den Resultaten verschiedener Versuche mit dem äussersten Misstrauen anzusehen, da dieselbe wahrscheinlich von einer unbeachteten Eigenthümlichkeit des angewandten Apparates herrührt. In jedem dieser beiden Fälle wird jedoch eine sorgfältige Beobachtung jedenfalls die Ursache der Abweichungen oder der unerwarteten Uebereinstimmung ans Licht bringen und möglicherweise zu Entdeckungen in einem Gebiete führen, an das man durchaus nicht gedacht hat. Wir könnten eine Menge Beispiele dieser Art anführen, wollen uns aber mit einem oder zweien begnügen.

380. So scheint ein Stern, durch ein sehr gutes achromatisches Teleskop betrachtet, eine merkliche Scheibe zu haben. Da wir aber beobachten, dass die Scheiben aller Sterne von gleichem angularen Durchmesser zu sein scheinen, so argwöhnen wir natürlich einen allen Beobachtungen gemeinschaftlichen Irrthum. Eine Verkleinerung der Oeffnung des Objectivglases vergrössert den erwähnten Schein, und bei gründlicher Untersuchung ergiebt sich, dass wir es gar nicht mit wirklichen Scheiben, sondern mit einer Diffractionserscheinung zu thun haben, die später in den Capiteln über das Licht ihre Erklärung finden wird.

Weiter fand man, als man zur Nachtzeit Experimente mit Kanonen anstellte, um die Geschwindigkeit des Schalles zu messen,

dass die auf der einen Station erhaltenen Resultate mit denjenigen der anderen Station niemals übereinstimmten. Oefters waren die Abweichungen sehr beträchtlich. Aber ein wenig Ueberlegung führte zu der Bemerkung, dass in solchen Nächten, in denen die Abweichung am grössten war, ein starker Wind annähernd in der Richtung von der einen Station zur anderen wehte. Als man den in die Augen springenden Einfluss des Windes in Rechnung zog oder vielmehr ganz eliminirte, stellte sich heraus, dass die mittleren Geschwindigkeiten an verschiedenen Abenden sehr nahe übereinstimmen.

381. Hypothesen. — Es ist vielleicht rathsam, hier einige wenige Worte über den Gebrauch der Hypothesen zu sagen, namentlich jener an Werth so verschiedenen Hypothesen, welche in der Form mathematischer Theorien verschiedener Zweige der Physik gelehrt werden.

382. Wo die betreffenden Kräfte vollständig bekannt sind, wie im Falle der Planeten-Bewegungen und Störungen, da ist die mathematische Theorie absolut wahr, und es ist weiter nichts erforderlich, als sie mittels der Analysis bis in ihre letzten Einzelheiten zu entwickeln. Sie ist auf diese Weise der Beobachtung im Allgemeinen weit voraus und berechtigt, Wirkungen vorherzusagen, die noch nie beobachtet worden sind, wie z. B. Mondungleichheiten, die von der Wirkung der Venus auf die Erde herrühren, u. s. w., Wirkungen, deren wahre Ursache wir niemals durch noch so viele Beobachtungen ohne Hülfe der Theorie hätten angeben können. Sie kann auch in Gegenständen wie die geometrische Optik zu Entwicklungen geführt werden, die über das Bereich des Experimentes weit hinausliegen; aber in dieser Wissenschaft sind die angenommenen Grundlagen der Theorie nur approximativ, und dieselbe kann nicht einmal so vergleichsweise einfache Erscheinungen, wie Höfe und Regenbogen, in allen ihren Eigenthümlichkeiten erklären, obgleich sie für die praktischen Zwecke der Herstellung von Mikroskopen und Teleskopen vollständig genügt und in diesen Fällen die Construction von Instrumenten zu einem Grade der Vollendung gebracht hat, der bei einem nur auf Versuche gestützten Verfahren nie hätte erreicht werden können.

383. Weiter ist eine andere Classe mathematischer Theorien, die bis zu einem gewissen Grade auf Experimente basirt sind, von Nutzen und hat sogar in gewissen Fällen auf neue und wichtige Resultate hingewiesen, die nachträglich experimentell bestätigt worden sind. Hierher gehören die dynamische Wärmetheorie, die Undulationstheorie des Lichtes, u. s. w. In der ersteren, welche auf

der experimentellen Thatsache beruht, dass Wärme Bewegung ist, sind viele Formeln für jetzt dunkel und nicht zu interpretiren, da wir nicht wissen, was sich bewegt, oder wie die Bewegung erfolgt. Resultate der Theorie, in denen das, was unbekannt bleibt, nicht in Betracht kommt, werden natürlich experimentell bewahrheitet. Dieselben Schwierigkeiten treten in der Theorie des Lichtes auf. Bevor aber diese Dunkelheit völlig aufgeklärt werden kann, müssen wir etwas über die letzte oder molekulare Constitution der Körper oder der Molekülgruppen wissen, die uns bis jetzt nur in ihrer Vereinigung bekannt sind.

384. Gute Repräsentanten einer dritten Classe von Hypothesen sind die mathematischen Theorien der Wärme (Leitung), der (ruhenden) Elektricität und des (permanenten) Magnetismus. Obschon wir nicht wissen, wie die Wärme sich durch die Körper verbreitet, und was ruhende Elektricität oder permanenter Magnetismus ist, so sind die Gesetze ihrer Kräfte doch so sicher wie das Gesetz der Schwere bekannt, und können daher wie letzteres durch Anwendung der mathematischen Analysis bis in alle ihre Consequenzen entwickelt werden. Die Werke von Fourier*), Green**) und Poisson***) sind bemerkenswerthe Beispiele solcher Entwicklungen. Ein anderes gutes Beispiel ist Ampère's Theorie der Elektrodynamik. Dies führt uns zu einer vierten Classe mathematischer Theorien, die, so geistreich sie auch sein mögen, in Wirklichkeit doch eher als schädlich, denn als nützlich angesehen werden müssen.

385. Ein guter Repräsentant einer solchen Theorie ist die von Weber, welche eine physikalische Grundlage für Ampère's Theorie der Elektrodynamik zu liefern verspricht, die wir soeben als bewundernswerth und in Wahrheit nützlich erwähnt haben. Ampère begnügt sich mit experimentellen Daten über die Wirkung geschlossener Ströme auf einander und leitet daraus mathematisch die Wirkung her, welche ein Element eines Stromes auf ein Element eines anderen Stromes ausüben sollte, wenn ein solcher Fall experimentell behandelt werden könnte. Dies kann keinen Irrthum herbeiführen. Aber Weber geht weiter. Er nimmt an, dass ein elektrischer Strom aus der Bewegung von Theilchen zweier Elektricitätsarten besteht, die den Leitungsdraht in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, und dass diese Theilchen, wenn sie in

*) Théorie Analytique de la Chaleur. Paris 1822.

**) Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham 1828. Abgedruckt in Crelle's Journal.

***) Mémoires sur le Magnétisme. Mém. de l'Acad. des Sciences. 1811.

relativer Bewegung sind, auf andere solche Elektricitätstheilchen Kräfte ausüben, die von denjenigen verschieden sind, welche sie im Zustande relativer Ruhe ausüben würden. Diese Annahme ist bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft auf keine Weise zu rechtfertigen, da wir uns die Hypothese, es existirten zwei elektrische Fluida, unmöglich als richtig denken können, und da die Schlüsse ausserdem im Widerspruch mit der „Erhaltung der Energie" stehen, die wir aus unzähligen experimentellen Gründen als ein allgemeines Naturprincip ansehen. Solche Theorien sind um so gefährlicher, wenn sie zufällig weitere Erscheinungen erklären, wie Weber's Theorie die inducirten Ströme erklärt. Ein anderes Beispiel dieser Art ist die Emissionstheorie des Lichtes, welche eine Zeit lang grosses Unheil stiftete und die sich nur hätte rechtfertigen lassen, wenn ein Lichtkörperchen wirklich wahrgenommen und untersucht worden wäre. Da solche Speculationen zwar gefährlich, aber interessant und (wie z. B. Weber's Theorie) oft sehr elegant sind, so werden wir darauf in den entsprechenden Capiteln zurückkommen.

386. Verschiedene Arten mathematisch-physikalischer Theorien. — Mathematische Theorien physikalischer Kräfte sind im Allgemeinen von einer der beiden folgenden Arten: Erstens giebt es solche, bei denen die Grundannahme weit allgemeiner ist, als nothwendig wäre. So enthält die Gleichung der Laplace'schen Functionen [Cap. I, Anhang B, (a)] die mathematische Begründung der Theorien der Gravitation, der statischen Elektricität, des permanenten Magnetismus, der permanenten Wärmeströmung, der Bewegung nicht zusammendrückbarer Flüssigkeiten, u. s. w. und muss daher, wenn man sie auf irgend einen dieser Gegenstände anwendet, von einschränkenden Betrachtungen begleitet werden.

Andererseits giebt es mathematische Theorien, die nur auf einige wenige Experimente oder auf einfache aber ungenaue Hypothesen aufgebaut sind und mehr auf dem Wege der Erweiterung, als auf dem der Beschränkung modificirt werden müssen. Als ein wichtiges Beispiel dieses Falles können wir die ganze abstracte Dynamik anführen, welche (wie im dritten Theile dargelegt werden wird) erweiternde Modificationen erfordert, ehe sie im Allgemeinen auf praktische Zwecke angewendet werden kann.

387. Herleitung des wahrscheinlichsten Resultates aus einer Anzahl von Beobachtungen. — Wenn man das wahrscheinlichste Resultat aus einer Anzahl nicht völlig übereinstimmender Beobachtungen derselben Grösse ermitteln will, so hat man mit Hülfe der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeiten eine

Methode zu suchen, mittels welcher man die Resultate der Erfahrung so combinirt, dass die Ungenauigkeiten der Beobachtung soweit als möglich eliminirt werden. Unter die Ungenauigkeiten der Beobachtung rechnen wir hier natürlich nicht solche Irrthümer, welche jede einzelne einer Reihe von Beobachtungen auf gleiche Weise beeinflussen, wie die ungenaue Bestimmung eines Nullpunktes oder der zu Grunde gelegten Zeit- und Raumeinheiten, die persönliche Gleichung des Beobachters, u. s. w. Das Verfahren, welches zur Elimination der Fehler zu benutzen ist, lässt sich, von welcher Art es auch sein mag, zwar auch auf diese Irrthümer anwenden, aber nur, wenn mehrere verschiedene Reihen von Beobachtungen angestellt worden sind, bei denen ein Wechsel des Instruments oder des Beobachters oder beider stattgefunden hat.

388. Wir verstehen unter Ungenauigkeiten der Beobachtung oder Beobachtungsfehlern die ganze Classe von Irrthümern, welche bei verschiedenen Versuchen mit derselben Wahrscheinlichkeit in der einen wie in der anderen Richtung liegen können, und von denen wir ruhig voraussetzen dürfen, dass sie sich im Durchschnitt bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen ganz und gar ausgleichen würden, so dass dieses Durchschnittsresultat weder nach der einen, noch nach der anderen Seite zu von der Wahrheit abwiche. Ueberdies betrachten wir nur solche Irrthümer, deren Wahrscheinlichkeit um so geringer ist, je grösser sie sind, so dass solche Irrthümer, wie ein zufälliges Ablesen einer falschen Anzahl ganzer Grade auf einer Kreistheilung (die im Allgemeinen durch Vergleichung mit anderen Beobachtungen wahrscheinlich berichtigt werden können) keine Berücksichtigung zu finden haben.

389. Mathematisch betrachtet ist der Gegenstand durchaus nicht leicht, und manche Autoritäten haben sich dahin ausgesprochen, dass das von Laplace, Gauss und Anderen angewandte Schlussverfahren nicht wohl begründet ist; aber die Resultate, zu denen letztere durch ihre Untersuchungen geführt wurden, sind allgemein angenommen. Da neuerdings eine treffliche Arbeit über den Gegenstand von Airy erschienen ist, so können wir uns damit begnügen, in ganz kursorischer Weise hier eine einfache und augenscheinlich befriedigende Methode zu skizziren, vermittels welcher wir zur sogenannten Methode der kleinsten Quadrate gelangen.

390. Unter der Voraussetzung, dass der Nullpunkt und die Graduirung eines Instrumentes (Mikrometer, Mauerquadrant, Thermometer, Elektrometer, Galvanometer, u. s. w.) absolut richtig sind, kann und wird man im Allgemeinen bei einer Reihe von Ablesungen

des Werthes einer Grösse (einer linearen Entfernung, der Höhe eines Sternes, einer Temperatur, der elektrischen Spannung eines Conductors, der Stärke eines elektrischen Stromes, u. s. w.) verschiedene Resultate erhalten. Welches ist mit der grössten Wahrscheinlichkeit der wahre Werth der beobachteten Grösse?

Wenn die Beobachtungen sämmtlich gleich zuverlässig sind, so ist der wahrscheinlichste Werth in allen solchen Fällen offenbar der einfache Mittelwerth aller Resultate. Sind aber die Beobachtungen nicht gleich zuverlässig, so hat man ihnen im Verhältniss zu der ihnen zugeschriebenen Genauigkeit Gewichte beizulegen, und dann erst ihren Mittelwerth zu nehmen. Wenn aber mehrere solche Mittelwerthe oder mehrere einzelne Beobachtungen genommen, und wenn diese Mittelwerthe oder Beobachtungen auf verschiedene Weise für die Bestimmung der gesuchten Grösse passend gemacht sind (indem einige derselben wahrscheinlich einen genaueren Werth als andere liefern werden), so müssen wir theoretisch die beste Methode angeben, nach welcher sie in der Praxis zu combiniren sind.

391. Beobachtungsfehler können im Allgemeinen mit derselben Wahrscheinlichkeit nach der Seite des zu viel, wie des zu wenig liegen. Auch ist es (wie oben bemerkt wurde) wahrscheinlicher, dass sie klein, als dass sie gross sind, und (praktisch) bedeutende Fehler sind ganz und gar nicht zu erwarten, da sie vermieden werden können. Danach muss bei einer Reihe von Beobachtungen derselben Grösse die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von der Grösse x begangen worden ist, von x^2 abhängen und durch irgend eine Function ausgedrückt werden, deren Werth bei wachsendem x sehr rasch abnimmt. Auch muss die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen x und $x + \delta x$ liegt, wo δx sehr klein ist, proportional δx sein.

Wir können mithin die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler von irgend einer in dem Intervall x bis $x + \delta x$ liegenden Grösse begangen ist, gleich

$$\varphi(x^2)\,\delta x$$

annehmen. Da nun der Fehler jedenfalls zwischen $+\infty$ und $-\infty$ liegt, so erhalten wir als erste Bedingung

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x^2)\,dx = 1.$$

Die Betrachtung eines sehr einfachen Falles liefert uns die Mittel, die Form der in diesem Ausdrucke enthaltenen Function φ zu bestimmen *).

*) Vergl. Boole, Trans. R. S. E.; 1857.

Nehmen wir an, man liesse einen Stein fallen, mit der Absicht, ei
bestimmte Stelle des Bodens zu treffen. Durch diese Stelle seien zw
Linien rechtwinklig zu einander gezogen, die wir beziehungsweise a
x und y Axe nehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Stein in ei
Entfernung von der y Axe fällt, die zwischen x und $x + \delta x$ liegt, ist

$$\varphi(x^2)\,\delta x;$$

die Wahrscheinlichkeit, dass er in eine Entfernung von der x Axe fäl
die zwischen y und $y + \delta y$ liegt, ist

$$\varphi(y^2)\,\delta y.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Flächenelement $\delta x\,\delta y$ getroffen wer
dessen Coordinaten x, y sind, ist daher (da diese Ereignisse von einand
unabhängig sind, eine Voraussetzung, auf welcher, was wohl zu beacht
ist, unsere ganze Untersuchung beruht)

$$\varphi(x^2)\,\varphi(y^2)\,\delta x\,\delta y, \text{ oder } \alpha\,\varphi(x^2)\,\varphi(y^2),$$

wenn α die um den Punkt (x, y) liegende unendlich kleine Fläche bezeichn

Wenn wir irgend ein anderes rechtwinkliges Axensystem mit de
selben Anfangspunkt genommen hätten, so würden wir für dieselbe Wah
scheinlichkeit den Ausdruck

$$\alpha\,\varphi(x'^2)\,\varphi(y'^2)$$

gefunden haben, wo x', y' die neuen Coordinaten von α sind.
muss also

$$\varphi(x^2)\,\varphi(y^2) = \varphi(x'^2)\,\varphi(y'^2)$$

sein, wenn $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ist. Aus dieser Functionengleichu
folgt leicht

$$\varphi(x^2) = A\,e^{mx^2},$$

wo A und m Constanten sind. Wir sehen auch leicht, dass m negativ s
muss (da die Wahrscheinlichkeit eines grossen Fehlers sehr klein ist), u
können dafür $-\frac{1}{h^2}$ schreiben, so dass h den Grad der Feinheit o
Plumpheit des angewandten Messungssystems bezeichnet. Durch Ei
setzung des Werthes von $\varphi(x^2)$ in (1) ergiebt sich

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,dx = 1;$$

es ist also $A = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$, und das Fehlergesetz, d. h. die Wahrschei
lichkeit, dass ein Fehler von der Grösse x begangen sei, ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,\frac{\delta x}{h}.$$

Wird nur die Entfernung von der zu treffenden Stelle des Bodens i
Auge gefasst und auf die Richtung, in welcher der Fehler begangen is
keine Rücksicht genommen, so ist das Fehlergesetz offenbar

$$\int\int \varphi(x^2)\,\varphi(y^2)\,dx\,dy,$$

lches Integral über den Raum zwischen den concentrischen Kreisen zu hmen ist, deren Radien r und $r + \delta r$ sind. Das Fehlergesetz ist her

$$\frac{2}{h^2} e^{-\frac{r^2}{h^2}} r \, \delta r,$$

d zur Bestätigung desselben ergiebt sich leicht, wie zu erwarten war,

$$\frac{2}{h^2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{h^2}} r \, dr = 1.$$

392. Wahrscheinlicher Fehler. — Der wahrscheinliche ehler einer Beobachtung ist eine numerische Grösse von der Beschaffenheit, dass der Fehler der Beobachtung mit derselben Wahrheinlichkeit grösser oder kleiner als diese Grösse sein kann.

Nehmen wir das eben gefundene Fehlergesetz an und nennen den ahrscheinlichen Fehler bei einem Versuch P, so ist

$$\int_0^P e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = \int_P^\infty e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx.$$

ie Lösung dieser Gleichung liefert den Näherungswerth

$$P = 0{,}477 \, . \, h.$$

393. Wahrscheinlicher Fehler einer Summe, einer Differenz oder eines Vielfachen. — Der wahrscheinliche Fehler eines liebigen gegebenen Vielfachen des Werthes einer beobachteten rösse ist offenbar dasselbe Vielfache des wahrscheinlichen Fehlers r Grösse selbst.

Der wahrscheinliche Fehler der Summe oder Differenz zweier rössen, welche mit von einander unabhängigen Fehlern behaftet nd, ist die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der einlnen wahrscheinlichen Fehler.

Dies zu beweisen, wollen wir das Fehlergesetz von

$$X \pm Y = Z$$

forschen, unter der Voraussetzung, dass die Fehlergesetze von X und Y ziehungsweise

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{a} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{b^2}} \frac{dy}{b}$$

nd. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in Z, dessen Grösse die Grenn $[z, z + \delta z]$ nicht überschreitet, ist offenbar

$$\frac{1}{\pi a b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \int_{z-x}^{z+\delta z-x} e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy.$$

Denn, welcher Werth auch x beigelegt wird, der Werth von y wird durch die Grenzen $z - x$ und $z + \delta z - x$ gegeben [oder durch $z + x$, $z + \delta z + x$; aber die Wahrscheinlichkeiten von $\pm x$ sind dieselben und liegen beide innerhalb der Grenzen ($\pm \infty$) der Integration nach x].

Führen wir die Integration nach y aus, so wird der Werth des obigen Integrals

$$\frac{\delta z}{\pi a b}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{b^2}} dx,$$

und dieser Ausdruck wird leicht auf

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{a^2+b^2}} \frac{\delta z}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

reducirt. Der wahrscheinliche Fehler ist danach $0{,}477 \sqrt{a^2 + b^2}$, unser Satz folglich bewiesen. Dieser Satz ist offenbar auch für jede beliebige Anzahl von Grössen richtig.

394. Praktische Anwendung. — Wie schon bemerkt wurde, besteht der Hauptnutzen dieser Theorie darin, aus einer grossen Reihe von Beobachtungen die Werthe der gesuchten Grössen in einer solchen Form herzuleiten, dass sie dem kleinsten wahrscheinlichen Fehler unterworfen sind. Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern: — Nach den Principien der Astronomie wird der Ort eines Planeten aus angenommenen Werthen der Elemente seiner Bahn berechnet und im Schiffskalender verzeichnet. Die beobachteten Orte stimmen mit den durch Rechnung vorher bestimmten nicht genau überein und zwar aus zwei Gründen: erstens sind die Data für die Berechnung nicht exact (und in der That ist die Hauptaufgabe der Beobachtung die, die angenommenen Werthe derselben zu corrigiren); zweitens ist die Beobachtung in einem gewissen unbekannten Grade fehlerhaft. Die Differenz zwischen den beobachteten und den berechneten Orten hängt von den Fehlern in den angenommenen Elementen und in der Beobachtung ab. Unsere Methoden dienen nun dazu, die zweite Art von Fehlern so weit als möglich zu eliminiren; die resultirenden Gleichungen geben dann die gesuchten Correctionen der Elemente.

Ist ϑ die berechnete Rectascension eines Planeten und sind $\delta a, \delta e, \delta \varpi$, u. s. w. die für die angenommenen Elemente erforderten Correctionen, so ist die wahre Rectascension

$$\vartheta + A\delta a + E\delta e + \Pi\delta\varpi + \text{u. s. w.},$$

wo A, E, Π, u. s. w. annähernd bekannt sind. Nehmen wir an, die beobachtete Rectascension sei Θ, so ist

$$\vartheta + A\delta a + E\delta e + \Pi\delta\varpi + \text{u. s. w.} = \Theta,$$

oder

$$A\delta a + E\delta e + \Pi\delta\dot{\omega} + \text{u. s. w.} = \Theta - \vartheta$$

eine dem Beobachtungsfehler unterworfene bekannte Grösse. Jede einzelne Beobachtung liefert uns eine Gleichung von dieser Form, und im Allgemeinen ist die Anzahl der Beobachtungen weit grösser als die der zu bestimmenden Grössen $\delta a, \delta e, \delta\dot{\omega}$, u. s. w. Es wird aber genügen, den einfachen Fall zu betrachten, in welchem nur eine Grösse gesucht wird.

Es sei eine Reihe von Beobachtungen derselben Grösse x angestellt, welche zu den Gleichungen

$$x = B_1, \quad x = B_2, \text{ u. s. w.}$$

führen, und deren wahrscheinliche Fehler E_1, E_2, u. s. w. sind. Wir multipliciren beide Glieder jeder Gleichung mit einer Zahl, welche dem entsprechenden wahrscheinlichen Fehler umgekehrt proportional ist; dadurch werden die wahrscheinlichen Fehler der zweiten Glieder aller Gleichungen die nämlichen, etwa ε. Die Gleichungen haben jetzt die allgemeine Form

$$a x = b,$$

und es handelt sich darum, ein System linearer Factoren zu finden, mit denen die Gleichungen der Reihe nach multiplicirt werden müssen, damit man durch Addition derselben eine Endgleichung erhalte, welche einen Werth von x liefert, dessen wahrscheinlicher Fehler ein Minimum ist. Sind f_1, f_2, u. s. w. diese Factoren, so ist die Endgleichung

$$(\Sigma af)x = \Sigma(bf),$$

folglich nach den Sätzen des § 393, wenn P den wahrscheinlichen Fehler von x bezeichnet,

$$P^2(\Sigma af)^2 = \varepsilon^2 \Sigma(f^2).$$

Es muss also $\frac{\Sigma(f^2)}{(\Sigma af)^2}$ ein Minimum, und der nach jedem einzelnen Factor f genommene Differentialquotient dieses Ausdrucks muss Null sein.

Dies liefert eine Reihe von Gleichungen, deren allgemeine Form

$$f\Sigma(af) - a\Sigma(f^2) = 0$$

ist, und woraus wir offenbar $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$, u. s. w. erhalten.

Wir gelangen somit zu der folgenden Regel, von der man leicht sieht, dass sie für eine beliebige Anzahl linearer Gleichungen gültig bleibt, welche eine kleinere Anzahl unbekannter Grössen enthalten: —

Man bewirke durch Anwendung eines geeigneten Factors, dass der wahrscheinliche Fehler des zweiten Gliedes jeder Gleichung derselbe sei, multiplicire jede Gleichung mit dem Coefficienten, den x in derselben hat, und addire alle Resultate, so erhält man eine der Endgleichungen; die übrigen ergeben sich, wenn man ebenso in Beziehung auf y, z, u. s. w. verfährt. Die wahrscheinlichen Fehler der sich aus diesen Endgleichungen ergebenden Werthe von x, y, u. s. w. werden kleiner als diejenigen

der Werthe sein, welche jede andere lineare Methode, die Gleichungen zu combiniren, liefern würde.

Man hat dies Verfahren die Methode der kleinsten Quadrate genannt, weil die dadurch gefundenen Werthe der unbekannten Grössen so beschaffen sind, dass sie die Summe der Quadrate der Fehler der anfänglichen Gleichungen zu einem Minimum machen.

In dem oben behandelten einfachen Falle ist

$$\Sigma(ax - b)^2 \text{ ein Minimum.}$$

Denn man erhält aus dieser Voraussetzung offenbar durch Differentiation nach x

$$\Sigma a(ax - b) = 0,$$

und dies ist das oben für die Bildung der Endgleichung angegebene Gesetz.

395. Methoden der Darstellung experimenteller Resultate. — Wenn eine Reihe von Beobachtungen derselben Grösse zu verschiedenen Zeiten oder unter verschiedenen Umständen angestellt worden ist, so kann das Gesetz, welches den Zusammenhang des Werthes der Grösse mit der Zeit oder mit einer beliebigen anderen Veränderlichen ausdrückt, aus den Resultaten auf verschiedene Arten hergeleitet werden, die sämmtlich mehr oder weniger approximativ sind. Zwei dieser verschiedenen Methoden werden aber so häufig angewandt, dass wir schon hier einer vorläufigen Betrachtung derselben eine oder zwei Seiten widmen wollen; detaillirte Beispiele ihrer Anwendung ersparen wir uns, bis wir zur Wärme, Elektricität, u. s. w. kommen werden. Sie bestehen in (1.) einer Curve, welche den Zusammenhang zwischen den Ordinaten und den Abscissen graphisch darstellt, und (2.) einer empirischen Formel, welche die Veränderlichen verbindet.

396. So können wir, wenn die Abscissen Zeitintervalle und die Ordinaten die entsprechenden Barometerhöhen darstellen, Curven construiren, welche die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Tageszeit auf einen Blick zeigen, u. s. w. Solche Curven können auf photographischem Wege mit grosser Genauigkeit auf ein Stück sensitives Papier gezogen werden, welches hinter die Quecksilbersäule gebracht und vermittels eines Uhrwerkes in eine gleichförmige horizontale Bewegung versetzt wird. Ein ähnliches Verfahren lässt sich auf die Temperatur und die Elektricität der Atmosphäre, sowie auf die Componenten des Erdmagnetismus anwenden.

397. Wenn die Beobachtungen nicht, wie im vorhergehenden Paragraphen, continuirlich sind, so liefern sie nur eine Anzahl von Punkten der Curve, mittels deren man sich jedoch im Allgemeinen mit grosser Genauigkeit dem Resultat einer continuirlichen Beobachtung dadurch nähert, dass man aus freier Hand eine Curve zieht, welche durch alle diese Punkte hindurchgeht. Dies Verfahren ist aber mit grosser Vorsicht anzuwenden, da, wenn nicht die Beobachtungen hinlänglich nahe an einander liegen, sehr wichtige Fluctuationen in der Curve unbemerkt bleiben können. Man kann sich desselben mit hinlänglicher Genauigkeit in allen Fällen bedienen, in denen sich die beobachtete Grösse sehr langsam ändert. So z. B. fand Forbes, dass wöchentliche Beobachtungen genügen, um mit grosser Genauigkeit das Gesetz zu finden, nach welchem sich die Temperatur in einer Tiefe von 6 bis 24 Fuss unter der Erdoberfläche ändert.

398. Als ein Beispiel der Verfahrungsarten, die man anwendet, um eine empirische Formel zu erhalten, erwähnen wir die Methoden der Interpolation, auf welche das Problèm immer zurückgeführt werden kann. So ist es eine gewöhnliche Aufgabe der Astronomie, aus Beobachtungen der Sonnenhöhe, die man in bekannten Intervallen mit dem Sextanten angestellt, zu bestimmen, in welchem Augenblick die Höhe am grössten, und welches diese grösste Höhe ist. Die Lösung der ersteren Aufgabe setzt uns in den Stand, an dem Beobachtungsorte die wahre Sonnenzeit zu finden, die der zweiten liefert mit Hülfe des „Nautical Almanac“ die Breite. Die Differentialrechnung und die Differenzenrechnung liefern uns Formeln für beliebige gesuchte Daten. Eine solche Formel, die von grossem Nutzen ist, hat Lagrange mit Hülfe der elementaren Algebra hergeleitet.

Ist $y = f(x)$, so haben wir nach dem Taylor'schen Satze

$$(1)\quad y = f(x_0 + \overline{x - x_0}) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}[x_0 + \vartheta(x - x_0)],$$

wo ϑ ein echter Bruch und x_0 eine ganz beliebige Grösse ist. Diese Formel ist nur dann von Nutzen, wenn die Werthe der successiven Differentialquotienten von $f(x_0)$ sehr rasch abnehmen.

In endlichen Differenzen haben wir

$$(2)\quad f(x+h) = D^h f(x) = (1 + \Delta)^h f(x) = f(x) + h \Delta f(x) + \frac{h(h-1)}{1.2} \Delta^2 f(x) + \cdots,$$

eine Formel, die sehr nützlich ist, wenn die höheren Differenzen sehr klein sind.

Die Formel (1) stellt den gesuchten Ausdruck in seiner genauen Form dar; aber nur in ganz seltenen Fällen lassen sich $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, u. s. w. direct aus der Beobachtung herleiten. Dagegen ist (2) von bedeutendem Nutzen, insofern sich die successiven Differenzen $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, u. s. w. leicht aus der Tabelle der Beobachtungsresultate berechnen lassen, vorausgesetzt dass diese für gleiche successive Zunahmen von x genommen worden sind.

Wenn eine Function für die Werthe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt, so giebt Lagrange für dieselbe den augenscheinlich richtigen Ausdruck

$$\left[\frac{y_1}{x-x_1}\,\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}\right.$$
$$\left.+\frac{y_2}{x-x_2}\,\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}+\cdots\right](x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Hier wird natürlich vorausgesetzt, dass die gesuchte Function eine rationale und ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x sei, und einer ähnlichen Beschränkung unterwirft man in der Praxis im Allgemeinen auch die anderen obigen Formeln; denn um den vollständigen Ausdruck für $f(x)$ in einer der beiden Formen zu finden, hat man bei Anwendung von (1) die Werthe von $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots$, bei Anwendung von (2) die Werthe von $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x), \ldots$ zu bestimmen. Sollen n von den Coefficienten, also n Glieder des allgemeinen Ausdrucks von $f(x)$ ermittelt werden, so müssen n simultane Werthe von x und $f(x)$ beobachtet sein; dann werden die Ausdrücke bestimmt und beziehungsweise vom Grade $n-1$ in $x-x_0$ und h.

In der Praxis reicht es gewöhnlich aus, höchstens drei Glieder jeder der beiden ersten Reihen anzuwenden. So können wir, um die Abhängigkeit der Länge l eines Metallstabes von der Temperatur t auszudrücken, nach (1)

$$l = l_0 + A(t-t_0) + B(t-t_0)^2$$

annehmen, wo l_0 die bei einer beliebigen Temperatur t_0 gemessene Länge des Stabes ist.

Diese Formeln sind mit Nutzen anzuwenden, wenn es sich darum handelt, die wahrscheinlichen Werthe einer beobachteten Grösse für Werthe der unabhängig Veränderlichen zu berechnen, welche innerhalb des Bereichs liegen, für welches die Beobachtung Werthe dieser Grösse ergeben hat. Aber ausser für Werthe der unabhängig Veränderlichen, welche entweder wirklich in diesem Bereich oder doch nicht weit darüber hinaus, sei es in Richtung der grösseren oder der kleineren Werthe, liegen, drücken diese Formeln Functionen aus, welche im Allgemeinen immer weiter von der Wahrheit abweichen, je weiter sie über das Bereich directer Beobachtung hinaus angewendet werden.

Bei einer grossen Classe von Untersuchungen ist die beobachtete Grösse ihrer Natur nach eine periodische Function der unabhängig Veränderlichen. In allen solchen Fällen ist die Theorie der harmonischen Functionen (§§ 75, 76) anwendbar. Wenn die Werthe der unabhängig

Veränderlichen, für welche die Function beobachtet worden ist, nicht gleich weit von einander abstehen, so bestimmen sich die Coefficienten bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate durch ein nothwendiger Weise sehr mühseliges Verfahren. Wenn diese Werthe aber gleich weit von einander abstehen, und besonders wenn ihre Differenz ein Submultiplum der Periode ist, so wird die vermittels der Methode der kleinsten Quadrate hergeleitete Gleichung sehr vereinfacht. So bezeichne ϑ einen Winkel, der während der Periode T der Erscheinung der Zeit t proportional von 0 bis 2π wächst, so dass

$$\vartheta = \frac{2\pi t}{T}$$

ist; ferner sei

$$f(\vartheta) = A_0 + A_1 \cos\vartheta + A_2 \cos 2\vartheta + \cdots$$
$$+ B_1 \sin\vartheta + B_2 \sin 2\vartheta + \cdots,$$

wo $A_0, A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots$ unbekannte Coefficienten sind, die so bestimmt werden sollen, dass $f(\vartheta)$ nicht bloss für Zeitpunkte, die zwischen den Beobachtungszeiten liegen, sondern für die ganze Zeit, für welche die Erscheinung genau periodisch ist, den wahrscheinlichsten Werth der zu bestimmenden Grösse ausdrücken möge. Nimmt man so viele dieser Coefficienten, als es verschiedene durch die Beobachtung gewonnene Daten giebt, so wird die Formel in genaue Uebereinstimmung mit diesen Daten gebracht. In den meisten Anwendungen der Methode lässt sich aber der periodisch wiederkehrende Theil der Erscheinung durch eine kleine Anzahl Glieder der harmonischen Reihe ausdrücken, und die aus einer grossen Anzahl von Daten berechneten höheren Glieder drücken entweder Unregelmässigkeiten der Erscheinung, von denen es nicht wahrscheinlich ist, dass sie sich wiederholen, oder Beobachtungsfehler aus. So kann, wenn die Beobachtungen zahlreich, aber nicht besonders genau sind, eine verhältnissmässig geringe Anzahl von Gliedern sogar für solche Zeitpunkte, für welche Beobachtungen vorliegen, Werthe geben, die wahrscheinlicher als die wirklich beobachteten und aufgezeichneten Werthe sind.

Wir empfehlen dem Studirenden, die Gleichungen zur Bestimmung von fünf oder sieben oder mehr Coefficienten nach der Methode der kleinsten Quadrate niederzuschreiben und dieselben durch geeignete Formeln der analytischen Trigonometrie auf ihre einfachsten und am leichtesten berechneten Formen zu reduciren, wo die Werthe von ϑ, für welche $f(\vartheta)$ gegeben ist, gleich weit von einander abstehen. Er wird dann sehen, dass, wenn die Differenz $\frac{2\pi}{i}$ ist, wo i irgend eine ganze Zahl bezeichnet, und wenn die Anzahl der Daten i oder ein beliebiges Multiplum von i ist, jede der Gleichungen nur eine der unbekannten Grössen enthält, so dass die Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Coefficienten durch die leichteste und directeste Elimination liefert.

Viertes Capitel.

Maasse und Messinstrumente.

399. Nothwendigkeit genauer Messungen. — Wir haben im vorhergehenden Capitel gesehen, dass wir zur Erforschung der Naturgesetze sorgfältig Experimente zu überwachen haben, seien es nun jene gigantischen Versuche, welche die Natur anstellt, oder diejenigen, welche zu speciellen Zwecken vom Menschen ersonnen und ausgeführt werden. In allen solchen Beobachtungen sind, wie wir sahen, genaue Messungen der Zeit, des Raumes, der Kraft, u. s. w. ganz unentbehrlich. Deshalb wollen wir jetzt einige der nützlicheren Instrumente, die man bei diesen Messungen anwendet, und die verschiedenen dabei gebrauchten Maasse oder Maasseinheiten kurz beschreiben.

400. Ehe wir auf Einzelheiten eingehen, werden wir eine kurze Uebersicht der wichtigsten Maasse und Instrumente geben, die in diesem Capitel beschrieben werden sollen. Die meisten derselben, wenn nicht alle, hängen von physikalischen Principien ab, die im Laufe dieses Werkes genau dargelegt werden; wir werden hier nicht bei der Feststellung solcher Principien verweilen, sondern dieselben anticipiren und die späteren Theile oder Capitel angeben, in denen die experimentellen Beweise ausführlicher auseinander gesetzt werden. Es wird dies Verfahren zwar einen unvermeidlichen, wenn auch unerheblichen Mangel an Ordnung nach sich ziehen — unerheblich, weil eine Uhr, eine Wage, eine Schraube, u. s. w. selbst denjenigen, die von der Physik nichts wissen, vertraute Begriffe sind; — unvermeidlich, weil es in der Natur unseres

Gegenstandes liegt, dass keiner seiner Theile für sich allein entwickelt werden kann, indem zur vollen Entwicklung eines jeden alle übrigen im höchsten Grade mitzuwirken haben. Wenn aber eine unserer Abtheilungen auf diese Weise von den übrigen borgt, so haben wir dafür die Genugthuung, dass sie durch den Einfluss, welchen ihr Fortschritt auf die übrigen Theile ausübt, das Geborgte mehr als zurückzahlt.

401. Eintheilung der Instrumente in vier Classen. — Unsere wichtigeren Fundamentalinstrumente lassen sich in vier Classen theilen: —

Instrumente zur Messung der Zeit,
„ „ „ des Raumes (linearer oder angularer Grössen),
„ „ „ der Kraft,
„ „ „ der Masse.

Andere Instrumente, die für besondere Zwecke eingerichtet sind, wie zur Messung der Temperatur, des Lichts, elektrischer Ströme, u. s. w. werden naturgemässer in den Paragraphen über die besonderen physikalischen Gegenstände behandelt, auf deren Messung sie sich anwenden lassen.

402. Wir werden jetzt der Reihe nach die bedeutendsten Instrumente jeder dieser vier Classen und einige ihrer wichtigsten Anwendungen betrachten, nämlich:

Uhr, Chronometer, Chronoskop, Anwendungen auf die Beobachtung und auf selbstregistrirende Instrumente.

Vernier und Schraubenmikrometer, Kathetometer, Sphärometer, Theilmaschine, Theodolit, Sextant.

Gemeine Wage, Bifilarwage, Torsionswage, Pendel, Dynamometer.

Von den Maasseinheiten erwähnen wir:

1. Zeit. Tag, Stunde, Minute, Secunde, und zwar siderische und Sonnenzeit.
2. Raum. Yard und Meter: Grad, Minute, Secunde.
3. Kraft. Gewicht eines Pfundes oder eines Kilogramms, u. s. w. an einem beliebigen besonderen Orte (Gravitationseinheit); kinetische Einheit.
4. Masse. Pfund, Kilogramm, u. s. w.

403. Obgleich es unmöglich ist, ohne Instrumente uns eine Maasseinheit zu verschaffen oder eine solche anzuwenden, so können wir doch, da kein Instrument uns, wenn wir keine Maasseinheit hätten, ein absolutes Maass geben könnte, die Maasseinheiten zuerst betrachten, und werden uns bei dieser Betrachtung auf die

Instrumente beziehen, als wenn uns ihre Principien und Anwendungen bereits bekannt wären.

404. Winkelmaass. — Die Maasseinheit der Winkelgrössen, den Grad oder neunzigsten Theil eines rechten Winkels, sowie seine successiven Unterabtheilungen, die Minute ($^1/_{60}$ Grad), die Secunde ($^1/_{60}$ Minute), u. s. w. brauchen wir nur zu erwähnen. Dies Eintheilungssystem ist äusserst unzweckmässig, hat sich aber so sehr in ganz Europa eingebürgert, dass die weit bessere von der französischen Republik zu derselben Zeit, wo dieselbe andere viel radicalere Aenderungen mit Erfolg einführte, beschlossene Decimaleintheilung des rechten Winkels nirgends Boden gewinnen konnte. Doch werden die Secunden allgemein in Decimaltheile getheilt.

Die Decimaltheilung wird natürlich angewandt, wenn man sich des Bogenmaasses bedient; die Einheit des Bogenmaasses ist der Winkel, dessen Schenkel aus einem um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kreis einen Bogen von der Länge des Radius ausschneiden. Danach haben zwei rechte Winkel im Kreismaass gemessen die Grösse π oder 3,14159, so dass π und 180^0 denselben Winkel darstellen, und die Winkeleinheit oder der Centriwinkel, dessen Bogen gleich dem Radius ist, ist $57^0,29578\ldots = 57^0\,17'\,44,8\ldots''$ (vergleiche § 41).

Bezeichnet n die Anzahl der Grade eines beliebigen Winkels, der, in Bogenmaass gemessen, die Grösse ϑ hat, so erhalten wir leicht die Gleichung $\frac{\vartheta}{\pi} = \frac{n}{180}$, und daraus folgt $n = \vartheta \times 57^0,29578\ldots = \vartheta \times 57^0\,17'\,44,8\ldots''$.

405. Zeitmaass. — Die in der Praxis benutzte Maasseinheit der Zeit ist der siderische Tag; es ist dies die nahezu constante Periode der Rotation der Erde um ihre Axe (§ 247). Man hat aus alten Sonnenfinsternissbeobachtungen berechnet, dass sich diese Periode seit 720 v. Chr. Geb. nicht um $\frac{1}{10,000,000}$ ihrer Länge geändert hat; in dieser Berechnung ist aber (§ 830) ein Fehler gefunden worden, und das berichtigte Resultat macht es wahrscheinlich, dass die Dauer der Erdrotation jetzt um $\frac{1}{2,700,000}$ länger als zu jener Zeit ist. Aus dem siderischen Tage leitet man leicht den mittleren Sonnentag her, d. i. die Zeit, welche durchschnittlich verstreicht zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Meridian irgend eines Ortes. Diese Einheit ist nicht in so hohem Grade wie die vorige absolut oder unveränder-

lich; sie wird, wenngleich in sehr geringem Grade, von den säcularen Aenderungen der Periode der Erdrotation um die Sonne beeinflusst. Der mittlere Sonnentag wird in 24 Stunden eingetheilt, eine Stunde in 60 Minuten, eine Minute in 60 Secunden. Die Secunden theilt man gewöhnlich nach dem Decimalsystem ein.

Man beachte, dass die Zeitgrössen, Minute und Secunde, anders als die gleichbenannten Winkelgrössen bezeichnet werden. So ist $13^h\ 43^m\ 27{,}58^s$ eine Zeitgrösse, $13^0\ 43'\ 27{,}58''$ eine Winkelgrösse.

Wenn lange Zeitperioden gemessen werden sollen, so können das mittlere Sonnenjahr, das aus 366,242203 siderischen oder 365,242242 mittleren Sonnentagen besteht, oder das Jahrhundert, welches 100 solche Jahre enthält, zweckmässig zur Einheit genommen werden.

406. Das definitive Normalmaass für genaueste Zeitmessung würde (falls nämlich das Menschengeschlecht einige Millionen Jahre auf der Erde leben sollte) auf die physikalischen Eigenschaften eines Körpers basirt werden müssen, der von einem constanteren Charakter als die Erde ist. Das ist z. B. eine in einem luftleeren gläsernen Gefässe hermetisch verschlossene Metallfeder. Die Zeit der Vibration einer solchen Feder würde nothwendig von einem zum anderen Tage viel constanter sein, als die Unruhe des besten Chronometers, da letztere durch das mit ihr verbundene Räderwerk gestört wird; sie würde höchst wahrscheinlich auch von Jahrhundert zu Jahrhundert constanter sein, als die Zeit der Rotation der Erde, die sich jedenfalls in einem solchen Grade abkühlt und zusammenzieht, dass in 50 Millionen Jahren die Dauer der Rotation schon eine recht beträchtliche Aenderung erleiden muss.

407. Längenmaass. — Das britische Längennormalmaass ist das Yard (Elle); es ist dies der Abstand zwischen zwei Marken auf einem im Tower zu London aufbewahrten Metallstab, wenn derselbe eine Temperatur von 60⁰ Fahrenheit hat. Dies Maass wurde nicht direct von einer unveränderlichen Grösse in der Natur hergeleitet; doch sind einige wichtige Beziehungen desselben zu solchen Grössen mit grosser Genauigkeit ausgemessen worden. Es ist sorgfältig mit der Länge eines an einer gewissen Stelle in der Nähe von London schwingenden Secundenpendels verglichen worden; wenn es also noch einmal zerstört werden sollte, wie es im Jahre 1834 beim Brande des Parlamentshauses geschah, und wenn zugleich alle exacten Copien desselben, deren mehrere an verschiedenen Orten aufbewahrt werden, verloren gingen, so könnte man es durch Pendelbeobachtungen wieder herstellen. Ein weniger genaues, aber

(ausser im Falle einer durch Erdbeben verursachten Störung) immer noch gutes Mittel, es wieder herzustellen, liefern die von der „Ordnance-Survey“ ausgemessenen Linien und die daraus berechneten Entfernungen zwischen bestimmten Stationen der britischen Inseln; diese Entfernungen sind mit solcher Genauigkeit durch jenes Maass ausgedrückt, dass der Fehler zuweilen nicht einmal ein Zoll per Meile (engl.), d. h. nicht einmal $^1/_{60000}$ ausmacht.

408. In wissenschaftlichen Untersuchungen bemühen wir uns so viel als möglich, immer nur eine Einheit fest zu halten, und für britische Messungen ist im Allgemeinen der Fuss, d. i. der dritte Theil des Yards, am passendsten. Unglücklicherweise hat man manchmal den Zoll, d. i. den zwölften Theil des Fuss, anzuwenden; doch wird derselbe weiter nach dem Decimalsystem eingetheilt. Wenn grosse Längen betrachtet werden, hat man leider oft die englische Meile (gleich 1760 Yards) zu benutzen. Es erhellt sonach, dass die britische Längenmessung in ihren verschiedenen Benennungen unzweckmässiger ist, als die europäische Zeit- oder Winkelmessung.

409. Ein weit vollkommneres Maasssystem ist das französische, in welchem ausschliesslich die Decimaleintheilung angewendet wird. In diesem System ist das Normalmaass der Meter. Derselbe ist ursprünglich theoretisch als der zehnmillionte Theil der Länge eines Erdmeridians vom Pol bis zum Aequator, jetzt aber praktisch durch die genauen Normalmeter definirt, die in verschiedenen europäischen Staaten sorgfältig aufbewahrt werden. Er ist etwas länger als das Yard, wie die nachstehende Tabelle zeigt. Seine grosse Zweckmässigkeit beruht auf der Decimaleintheilung. In jedem Ausdruck stellen die Einer Meter, die Zehner Decameter, u. s. w., die Zehntel Decimeter, die Hundertel Centimeter, die Tausendstel Millimeter, u. s. w. dar. Den Zusammenhang zwischen dem französischen und dem englischen Längenmaass liefert die folgende Tabelle: —

ein Zoll	= 25,39954 Millimeter,	ein Millimeter	= 0,03937079 Zoll,
ein Fuss	= 3,047945 Decimeter,	ein Decimeter	= 0,3280899 Fuss,
eine Meile	= 1609,315 Meter,	ein Kilometer	= 0,6213824 Meile.

410. Flächenmaass. — Die Einheit des Flächenmaasses ist in Grossbritannien das Quadratyard, in Frankreich der Quadratmeter. Natürlich können wir Quadratzoll, Quadratfuss oder Quadratmeilen; wie auch Quadratmillimeter, Quadratkilometer, u. s. w., oder die Hektare = 10,000 Quadratmeter anwenden. Es ist:

ein Quadratzoll = 6,451367 Quadratcentimeter,
ein Quadratfuss = 9,28997 Quadratdecimeter,
ein Quadratyard = 83,60971 Quadratdecimeter,
ein Acre = 0,4046711 Hektare,
eine Quadratmeile = 258,9895 Hektare,
eine Hektare = 2,471143 Acres.

411. Raummaass. — Aehnliches gilt von dem Kubikmaass beider Länder, für welches wir die folgende Tabelle erhalten: —

ein Kubikzoll = 16,38618 Kubikcentimeter,
ein Kubikfuss = 28,315312 Kubikdecimeter oder Liter,
eine Gallon (4 Quart) = 4,54346 Liter,
eine Gallon (4 Quart) = 277,274 Kubikzoll,
ein Liter = 0,035317 Kubikfuss.

412. Massenmaass. — Die britische Masseneinheit ist das Pfund (das nur durch Normalgewichte definirt wird), die französische das Kilogramm, ursprünglich als ein Liter Wasser von der Temperatur der grössten Dichtigkeit, jetzt aber praktisch durch Normalkilogramme definirt.

ein Gran = 64,79896 Milligramm,	ein Gramm = 15,43235 Gran,
ein Pfund = 453,5927 Gramm,	ein Kilogramm = 2,20462125 Pfund.

W. H. Miller findet (Phil. Trans. 1857), dass das „Kilogramme des Archives" an Masse gleich 15432,34874 Gran und das im Ministerium des Inneren zu Paris als Normalgewicht für den französischen Handel niedergelegte „Kilogramme type laiton" gleich 15432,344 Gran ist.

413. Kraftmaass. — Wie man eine Kraft misst, sowohl vermittels des Gewichtes, welches eine festgesetzte Masse an einem festgesetzten Orte hat, als auch vermittels der absoluten oder kinetischen Einheit, ist im zweiten Capitel dargelegt worden (s. §§ 220 bis 226). Aus dem Maasse der Kraft und demjenigen der Länge leiten wir unmittelbar das Maass der Arbeit oder des mechanischen Effects her. Das von den Ingenieuren hierfür praktisch angewandte Maass beruht auf dem Maass der Kraft, welches die Gravitation liefert. Wenn wir den Unterschied zwischen der Schwerkraft in London und Paris vernachlässigen, so ersehen wir aus den obigen Tabellen, dass folgender Zusammenhang zwischen dem Londoner und dem Pariser Arbeitsmaass besteht:

ein Fusspfund = 0,13825 Kilogrammmeter,
ein Kilogrammmeter = 7,2331 Fusspfund.

414. Uhren. — Eine Pendeluhr ist im Wesentlichen ein Instrument, welches vermittels eines Räderwerks die Anzahl der von einem Pendel ausgeführten Vibrationen verzeichnet. Ein Chronometer oder eine Taschenuhr leistet dasselbe für die Oscillationen einer flachen Spiralfeder, gerade so wie das Räderwerk in einer Gasuhr die Anzahl der durch den Durchgang des Gases durch die Maschine hervorgebrachten Umdrehungen der Hauptwelle zählt. Da es aber unmöglich ist, die Reibung, den Widerstand der Luft, u. s. w. zu vermeiden, so würde ein Pendel oder eine Feder, sich selbst überlassen, nicht lange fortschwingen und auch, während die Bewegung noch andauert, jede Oscillation in um so kürzerer Zeit ausführen, je mehr der Vibrationsbogen abnimmt. Dies zu vermeiden, wird dem Instrument durch das Herabfallen eines Gewichtes oder durch die Abwickelung einer starken Feder beständig ein Zuschuss an Energie geliefert. Das Gewicht oder die Feder sind mit dem Pendel oder dem Schwungrad der Unruhe durch das Räderwerk und durch eine mechanische Vorrichtung, die man Hemmung nennt, so verbunden, dass die Oscillationen eine nahezu gleichförmige Weite behalten und deshalb von nahezu gleichförmiger Dauer sind. Die Construction der Hemmungen, sowie der Räderwerke ist eine Aufgabe der Mechanik, deren Einzelheiten wir hier übergehen können, obwohl sie leicht zum Gegenstande mathematischer Untersuchung gemacht werden können. Die Mittel zur Vermeidung von Fehlern, welche der Wechsel der Temperatur erzeugen würde, nämlich die Compensations-Pendel und Unruhen werden besser in unseren Capiteln über die Wärme behandelt. Wir bemerken noch, dass es wenig schadet, wenn der Gang einer Uhr regelmässig beschleunigt oder verzögert wird; dies kann leicht in Rechnung gezogen werden; dagegen machen unregelmässige Aenderungen das Instrument unbrauchbar.

415. Elektrische Uhren. — Eine neuere Anwendung der Elektricität, die später beschrieben werden soll, besteht darin, vermittels einer guten Uhr, die von Zeit zu Zeit sorgfältig regulirt wird, so dass sie mit astronomischen Beobachtungen übereinstimmt, eine beliebige Anzahl anderer weniger gut construirter Uhren zu regeln, so dass ihre Pendel gezwungen werden, Schlag für Schlag mit dem Pendel der Normaluhr zu vibriren, ohne dass dadurch letztere einen nachtheiligen Einfluss erleidet.

416. Chronoskop. — Bei astronomischen Beobachtungen wird die Zeit bis auf Zehntel einer Secunde von einem geübten Beobachter abgeschätzt, der, während er die Erscheinungen überwacht,

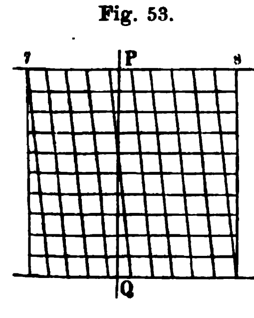
die Schläge der Uhr zählt. Für die sehr genaue Messung kurzer Intervalle sind viele Instrumente erdacht worden. Wenn sich z. B. in einem grossen mit Quecksilber angefüllten Gefäss eine kleine Oeffnung befindet, und wir durch den Versuch das Gewicht des etwa in fünf Minuten ausströmenden Metalls bestimmt haben, so liefert uns eine einfache Proportion den während des Herausströmens eines beliebigen Gewichts verstrichenen Zeitraum. Es ist leicht, eine Vorrichtung anzubringen, durch welche beim Eintritt zweier beliebigen successiven Ereignisse ein Gefäss unter den herausfliessenden Strom gesetzt und von demselben wieder weggezogen wird.

417. Zu demselben Zwecke bedient man sich noch anderer hinlänglich bekannter Vorrichtungen, so der Uhren mit auszulösendem Secundenzeiger, der Chronoskope, u. s. w., deren Stellung abgelesen wird, wenn sie sich noch in Ruhe befinden, die beim Eintritt eines Ereignisses ihre Bewegung beginnen, beim Eintritt eines zweiten Ereignisses wieder stillstehen und sodann wieder abgelesen werden können. Man wendet auch Vorrichtungen an, die es gestatten, in dem Augenblick, wo jedes dieser Ereignisse eintritt, auf ein sich mit gegebener Geschwindigkeit drehendes Zifferblatt (durch einen Druck auf einen Knopf) ein schwaches Zeichen mit Tinte zu machen, u. s. w. In neuerer Zeit haben aber alle diese Apparate fast gänzlich dem elektrischen Chronoskop Platz gemacht, einem Instrument, das wir eingehend beschreiben werden, wenn wir später Gelegenheit finden, Versuche anzuführen, bei denen es mit Nutzen angewendet worden ist.

418. Wir kommen jetzt zur Messung von Linien und Winkeln. Die wichtigsten Instrumente, die dazu dienen, sind der Vernier und die Schraube.

419. Der verjüngte Maassstab. — Die Elementargeometrie liefert uns zwar die Mittel, eine beliebige gerade Linie in eine beliebig vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen; doch ist diese Methode in der Praxis durchaus nicht genau und wenig zuverlässig. Sie wurde früher beim sogenannten verjüngten Maassstabe angewandt, dessen Construction aus der Figur erhellt. Das Ablesen erfolgt vermittels eines Schiebers, dessen Rand senkrecht zur Länge des Stabes ist. Nehmen wir an, man solle die Lage, welche die Linie PQ auf dem Maassstabe hat, bestimmen. Dieselbe kann offenbar nur

Fig. 53.



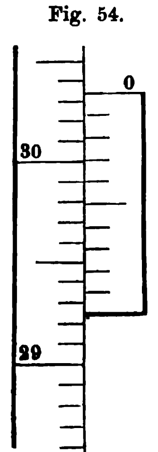
eine der Querlinien schneiden (in der Figur die vierte), und wir erhalten dadurch die Anzahl der Zehntel eines Zolls. Die unmittelbar über dem Durchschnittspunkt liegende Horizontallinie liefert, wie man leicht erkennt, die Hundertel (im vorliegenden Falle vier). Die Länge der in Rede stehenden Linie ist danach 7,44. Um zu zeigen, wie mangelhaft diese Methode im Vergleich zu den folgenden ist, erwähnen wir, dass ein nach ihr am Rande eingetheilter Quadrant von drei Fuss Radius, welcher Napier von Merchiston gehörte, die Theile eines Grades nur bis auf Minuten genau lieferte, eine Genauigkeit, die man jetzt mit den von Troughton und Simms construirten Taschensextanten erreichen kann, deren Bogenradius wenig mehr als ein Zoll beträgt. Das letztere Instrument wird mit Hülfe eines Vernier gelesen.

420. Der Vernier oder Nonius. — Der Vernier wird gewöhnlich bei Instrumenten, wie dem Barometer, Sextanten und Kathetometer, die Schraube dagegen bei feineren Instrumenten, wie bei den getheilten Kreisen der Astronomen, beim Mikrometer und dem Sphärometer angewandt.

421. Der Vernier besteht aus einem Metallstreifen, welcher an einer eingetheilten Scala entlang gleitet, so dass beider Ränder zusammenfallen. Wenn man ihn also an einem getheilten Kreise anbringt, so ist sein Rand kreisförmig, und er bewegt sich um eine durch den Mittelpunkt des getheilten Kreisbogens gehende Axe.

In Fig. 54 seien **0, 1, 2, . . ., 10** die Theilpunkte auf dem Vernier, **O, 1, 2,** u. s. w. eine beliebige Reihe aufeinander folgender Theilpunkte des Maassstabes, dessen Rand entlang der Vernier gleitet. Wenn nun, falls **0** und **O** zusammenfallen, auch **10** und **11** auf einander zu liegen kommen, so sind 10 Theile des Vernier von derselben Länge wie 11 Theile des Maassstabes, also jeder Theil des Vernier gleich $^{11}/_{10}$ oder $1^{1}/_{10}$ eines Theils des Maassstabes. Wird dann der Vernier fortbewegt, bis **1** mit **1** zusammenfällt, so liegt **0** um $^{1}/_{10}$ eines Theils des Maassstabes über **O** hinaus; wenn **2** mit **2** zusammenfällt, so liegt **0** um $^{2}/_{10}$ über **O** hinaus, u. s. w. Um also den Vernier in irgend einer Lage abzulesen, hat man sich zuerst den **0** zunächst und zwar unterhalb liegenden Theilpunkt des Maassstabes zu merken. Dadurch erhält man die Anzahl der ganzen Theile

Fig. 54.



Um den Bruchtheil zu bestimmen, sehe man nach, welcher Theilpunkt des Vernier mit einem Theilpunkt des Maassstabes zusammenfällt; ist es (wie in Fig. 54) der vierte, so zeigt dies an, dass man der erhaltenen ganzen Zahl $^4/_{10}$ eines Theils des Maassstabes hinzuzufügen hat, u. s. w. Wenn demnach die Figur eine in Zoll und Zehntelzoll eingetheilte Barometerscala darstellt, und der Nullpunkt des Vernier genau auf die Höhe des Quecksilbers gebracht ist, so ist der zu ermittelnde Stand des Barometers 30,34 Zoll.

422. Wenn der Rand eines Sextanten, wie es gewöhnlich geschieht, in Drittelgrade eingetheilt ist und der Vernier dadurch gebildet wird, dass man 21 dieser Theile in 20 gleiche Theile theilt, so kann man mit dem Instrument noch Zwanzigstel eines Theils der Scala des Sextanten, d. h. Minuten bestimmen.

Wenn kein Theilstrich des Vernier mit einem Theilstrich auf dem Sextantenbogen zusammenfällt, so wird einer der letzteren zwischen zwei Theilstriche des Vernier fallen, da die Theile des Vernier die grösseren sind. Man pflegt dann in der Praxis das Mittel der Resultate zu nehmen, die man erhalten würde, wenn jedes Paar der Grenzlinien zusammenfiele.

423. In Fig. 54 und in der obigen Darstellung ist vorausgesetzt, dass die Theile der Scala und des Vernier nach entgegengesetzten Richtungen hin gezählt werden. Dies ist bei britischen Instrumenten gewöhnlich der Fall. Sonst werden die Theile der Scala und des Vernier auch nach derselben Richtung hin gezählt, und in diesem Falle erkennt man leicht, dass, wenn Längen bis zu Zehnteln eines Theils der Scala bestimmt werden sollen, zehn Theile des Vernier gleich neun Theilen der Scala sein müssen; daher der Namen Nonius.

Allgemein müssen, wenn die Bestimmung von Längen bis zu $n$teln eines Theils der Scala erfolgen soll, n Theile des Vernier gleich $n + 1$ oder gleich $n - 1$ Theilen der Scala sein, je nachdem diese in entgegengesetzter oder in derselben Richtung wie jene gelesen werden.

424. Die Schraube. — Das Princip der Schraube ist schon erwähnt worden (§ 102). Dieselbe kann auf zwei Arten angewandt werden: Es kann nämlich erstens die Mutter fest sein und die Spindel sich hindurch bewegen, oder es kann zweitens die Spindel durch ein festes Zapfenlager verhindert werden, sich longitudinal zu bewegen, in welchem Falle die Mutter, wenn man sie verhindert zu rotiren, sich in der Richtung der ihr und der Spindel gemeinschaftlichen Axe bewegen wird. Die Grösse der fortschreitenden Bewe-

gung ist in jedem Falle offenbar dem Winkel proportional, durch welchen sich die Spindel um ihre Axe gedreht hat, und dieser Winkel kann vermittels einer an einem Ende der Spindel auf derselben senkrecht feststehenden eingetheilten Kreisscheibe gemessen werden, deren Theile durch einen Zeiger oder einen am Gestell des Instruments angebrachten Vernier abgelesen werden. Die Schraubenmutter trägt entweder einen zeichnenden Punkt mit sich (wie in der Theilmaschine), oder einen Draht, einen Faden oder das halbe Objectivglas eines Teleskops (wie im Heliometer), und zwar sind der Faden oder Draht, oder die Bewegungsrichtung des zeichnenden Punktes rechtwinklig zur Axe der Spindel.

425. Nehmen wir an, man solle eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen. Die Linie wird der Axe der Spindel parallel mit einem Ende genau unter den zeichnenden Punkt oder unter den festen Faden eines von der Mutter getragenen Mikroskops gelegt und sodann der Schraubenkopf abgelesen. Durch Umdrehung des Schraubenkopfes wird der zeichnende Punkt oder der Mikroskopfaden an das andere Ende der Linie gebracht, und die Anzahl der ganzen Umdrehungen und der Bruchtheile einer Umdrehung für die ganze Linie bestimmt. Wird das so erhaltene Resultat durch die Anzahl der verlangten gleichen Theile dividirt, so ergiebt sich die Anzahl der ganzen Umdrehungen und der Bruchtheile einer Umdrehung, welche e i n e m der geforderten Theile entsprechen. Um jetzt die geforderte Theilung auszuführen, hat man nur die Spindel wiederholt um diesen Betrag zu drehen und nach jeder Rotation einen Strich zu ziehen.

426. Im Mikrometer ist der von der Mutter getragene bewegliche Faden einem festen Faden parallel. Bringt man dieselben in optische Berührung, so lernt man den Nullpunkt des Schraubenkopfes kennen. Wenn man also eine andere Ablesung gemacht hat, so ergiebt sich die Anzahl der Umdrehungen, welche der Länge des zu messenden Objectes entsprechen, durch Subtraction. Der absolute Werth einer Umdrehung der Schraube wird aus der Anzahl der Windungen in einem Zoll oder auch durch Anwendung des Mikrometers auf einen Gegenstand von bekannten Dimensionen berechnet.

427. Sphärometer. — Zur Messung der Dicke einer Platte oder der Krümmung einer Linse bedient man sich des Sphärometers. Dasselbe besteht aus einer cylindrischen Säule, durch deren Axe sich eine gut gearbeitete Schraubenspindel bewegt. Die Säule wird von drei Füssen getragen, die gleichweit von

einander abstehen, und deren Enden in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Wenn der unterste Punkt der Spindel bis in diese Ebene hinabgedreht ist, so hat er von den Füssen der Mutter gleiche Abstände. Die Enden der Füsse und der Spindel laufen in sehr feine Spitzen aus. Die Anzahl der ganzen Umdrehungen und der Bruchtheile einer Umdrehung, welche die Spindel vollführt, wird durch einen am Kopf der Spindel angebrachten horizontalen Kreis, dessen Umfang getheilt ist, und durch einen auf der Mutter befestigten verticalen Maassstab bestimmt. Angenommen, man solle die Dicke einer Glasplatte messen, so werden die drei Füsse des Instrumentes auf eine genau flache Oberfläche gesetzt und die Spindel langsam gedreht, bis ihre Spitze gerade die Fläche berührt. Diese Stellung der Spindel lässt sich mit äusserster Genauigkeit bestimmen; denn in dem Augenblick, wo die Spitze der Spindel unter die Ebene der Füsse hinabgeht, beginnt der ganze Apparat zu wackeln, wenn er auch nur leise berührt wird. Es hat dies natürlich darin seinen Grund, dass es geometrisch unmöglich ist, dass ein vollkommen starrer Körper mit vier Füssen auf einer Ebene stehe, wenn die Endpunkte der Füsse nicht genau in einer Ebene liegen. In dem Augenblick, in welchem dieses Wackeln (welches für das Gefühl und selbst für das Ohr äusserst vernehmlich ist) beginnt, ist die Spitze der Spindel eben unter der Ebene der Füsse des Instruments. Jetzt liest man die Stellung des Schraubenkopfs ab und dreht dann die Spindel so lange zurück, bis man die Platte, deren Dicke bestimmt werden soll, unter die Spitze einschieben kann. Darauf wird die Spindel wieder vorwärts gedreht, bis das Wackeln gerade wieder beginnt. Dann leuchtet ein, dass, wenn die Schraubenspitze noch um eine der Dicke der Platte gleiche Länge hinabgedreht würde, sie sich wieder gerade unter der Ebene der Füsse befinden würde. Wir können daher aus der Differenz der Stellungen des Schraubenkopfes mit Leichtigkeit die Dicke der Platte berechnen, wenn der Betrag einer Umdrehung der Spindel ein- für allemal bestimmt ist.

428. Wenn die Krümmung einer Linse gemessen werden soll, so stellt man das Instrument zuerst, wie vorher, auf eine ebene Fläche und bestimmt, bei welcher Stellung das Wackeln beginnt. Dieselbe Operation führt man mit der sphärischen Fläche aus. Die Differenz der erhaltenen Stellungen des Schraubenkopfes ist offenbar die grösste Dicke des Glaskörpers, welchen eine durch die drei Füsse gehende Ebene abschneiden würde. Diese Dicke und der Abstand zwischen jedem Fusspaar reichen aus, den Radius der sphärischen Fläche zu berechnen.

Ist a der Abstand zwischen jedem Fusspaar, l die den beiden Stellungen des eingetheilten Kreises entsprechende Schraubenlänge und R der Radius der Kugelfläche, so erhalten wir leicht

$$2R = \frac{a^2}{3l} + l,$$

oder, da l im Vergleich zu a gewöhnlich sehr klein ist, so ist der Durchmesser der Kugelfläche ganz nahezu gleich $\frac{a^2}{3l}$.

429. Kathetometer. — Das Kathetometer wird zur genauen Bestimmung von Höhenunterschieden gebraucht, z. B. zur Messung der Höhe, bis zu welcher sich die Flüssigkeit in einer Capillarröhre über die äussere freie Fläche erhebt. Es besteht aus einem eingetheilten Metallstabe, der (vermittels der in seinen drei Füssen angebrachten Schrauben) möglichst genau vertical gestellt werden kann. Auf diesem Stabe gleitet ein Metallschlitten, der ein Fernrohr trägt, dessen Axe mit Hülfe eines Nivellirinstrumentes horizontal gemacht wird. Das Fernrohr steht natürlich senkrecht auf dem Maassstabe und beschreibt eine Horizontalebene, wenn der letztere auf seiner Unterlage gedreht wird. Das Adjustiren des Instruments ist etwas langweilig, bietet aber sonst keine Schwierigkeit dar. Will man dasselbe benutzen, so hat man das Fernrohr erst auf einen der beiden Gegenstände zu richten, deren Höhendifferenz bestimmt werden soll, und es dann (m[illegible] dem Schlitten, der es trägt) vermittels einer feinen Schraube am [illegible]ssstabe auf oder ab zu bewegen, bis ein im Brennpunkt des ([illegible], angebrachter horizontaler Faden mit dem Bilde des Gegenstandes zusammenfällt. Auf einem mit dem Fernrohr verbundenen Vernier wird jetzt die Stellung desselben abgelesen. Wird dieselbe Operation mit dem zweiten Gegenstande vorgenommen, so erhält man durch eine einfache Subtraction die gesuchte Höhendifferenz.

430. Die Wage. — Das Princip der Wage ist allgemein bekannt. Wir wollen hier einige der Vorsichtsmaassregeln anführen, die in den besten Wagen zur Beseitigung der verschiedenen Fehler angewandt werden, denen das Instrument unterworfen ist; auch werden wir die Hauptpunkte kurz besprechen, die man bei der Construction einer Wage zu beachten hat, um Sicherheit und Schnelligkeit beim Wägen zu erzielen.

Der Wagebalken muss so steif als möglich und doch nicht sehr schwer sein. Deshalb besteht er gewöhnlich entweder aus Röhren, oder aus einer Art Gitterwerk. Um die Reibung zu vermeiden, nimmt man zur Axe, um die der Wagebalken sich dreht, die Schneide

eines aus hartem Stahl gemachten Keils; wenn die Wage benutzt wird, so ruht diese Schneide auf einer gut polirten Achatplatte. Bei sehr feinen Wagen ist eine ähnliche Vorrichtung in den Punkten des Wagebalkens angebracht, in welchen die Wagschalen aufgehängt werden. Wenn die Wage nicht gebraucht wird, sowie unmittelbar vor dem Gebrauch wird der Balken mit der Schneide durch eine Hebelvorrichtung von der Achatplatte emporgehoben. Hat man ihn auf diese Weise festgestellt, so belastet man ihn mit Gewichten, die so weit als möglich einander gleich sind (was man unter Umständen zuvor mit Hülfe eines weniger feinen Instruments bewirken kann); die genaue Bestimmung des gesuchten Gewichtes bietet dann keine Schwierigkeit dar. Der letzte Bruchtheil des Gewichtes wird vermittels eines gewöhnlich aus einem Draht bestehenden sehr kleinen Laufgewichts (oder Reiterchen) ermittelt, dem (durch einen Hebel) von ausserhalb des die Wage umgebenden Glaskastens her verschiedene Stellungen auf einem Arm des Wagebalkens ertheilt werden können. Dieser Arm ist in Zehntel, u. s. w. eingetheilt und zeigt so ohne Weiteres den Werth, welchem das Gewicht des Reiterchen in jedem Falle entspricht, da ja dieser Werth (§ 232) von dem Moment abhängt.

431. Die wichtigsten Eigenschaften einer guten Wage sind folgende:

1. Empfindlichkeit. — Der Wagebalken sollte durch die kleinste Differenz [illegible] den in die Wagschalen gelegten Gewich-[illegible] schon merklich au[s] seiner horizontalen Lage abgelenkt werden. Das genaue Maass der Empfindlichkeit ist der Winkel, durch welchen der Balken abgelenkt wird, wenn die Differenz zwischen den Belastungen der Wagschalen ein festgesetzter Procentsatz des Gesammtgewichtes ist.

2. Stabilität. — Hiermit ist die Schnelligkeit der Oscillation gemeint, nach welcher wieder die Geschwindigkeit in der Ausführung einer Wägung sich bestimmt. Die Stabilität hängt hauptsächlich von der Tiefe, in der der Schwerpunkt des ganzen Instruments unter der Schneide liegt, und ferner von der Länge des Wagebalkens ab.

3. Beharrlichkeit. — Successive Wägungen desselben Körpers müssen dasselbe Resultat liefern, nachdem alle von der Temperatur, dem Barometerstande, u. s. w. abhängigen Correctionen (die später beschrieben werden sollen) in Rechnung gezogen sind.

In dem Capitel, in welchem wir die Statik behandeln, werden wir beschreiben, wie die Grösse jeder dieser drei Eigenschaften für

jede gegebene Form und für beliebig gegebene Dimensionen des Instruments bestimmt wird.

Eine feine Wage sollte bei ungefähr $\frac{1}{500,000}$ des grössten Gewichts, welches ohne Beschädigung derselben in eine Schale gelegt werden kann, einen Ausschlag geben. In der That sind wenig Messungen irgend einer Art bis zu mehr als sechs Decimalstellen correct.

Die Methode der Doppelwägung, welche darin besteht, dass man den abzuwägenden Körper durch Schrot oder Sand oder feine Drahtstücke äquilibrirt, ihn dann entfernt, und in die Wagschale, in der er gelegen, so lange Gewichte legt, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt ist, ist etwas mühseliger, aber correcter als die Methode der einfachen Wägung, da sie alle Irrthümer eliminirt, welche aus der ungleichen Länge der Arme, u. s. w. entspringen.

432. Die Torsionswage. — Bei der von Coulomb erfundenen und mit grossem Erfolge angewandten Torsionswage wird eine Kraft durch die Torsion eines Seiden- oder Glasfadens oder eines Metalldrahtes gemessen. Der Faden oder Draht wird an seinem oberen Ende oder, je nach den Umständen, an beiden Enden befestigt. Er trägt im Allgemeinen einen sehr leichten horizontalen Stab oder eine horizontale Nadel, an deren einem Ende der Körper angebracht ist, auf welchen die zu messende Kraft wirkt, während das andere Ende ein Gegengewicht trägt. Das obere Ende des Fadens ist an einem Zeiger befestigt, welcher durch den Mittelpunkt eines an der Peripherie eingetheilten Kreises geht, so dass der Winkel, durch welchen sich dieses obere Ende dreht, direct gemessen wird. Wenn man zugleich den Winkel misst, durch welches sich die Nadel gedreht hat, oder wenn man einfacher den Zeiger so lange dreht, bis die Nadel eine bestimmte Lage annimmt, die durch ein auf dem Gehäuse des Instruments angebrachtes Zeichen gegeben ist, so erhält man die Grösse der Torsion des Fadens, und es ist dann ein einfaches statisches Problem, aus der letzteren die zu messende Kraft zu bestimmen, da ihre Richtung, ihr Angriffspunkt und die Dimensionen des Apparates bekannt sind. Coulomb fand, dass die Torsionskraft innerhalb der Grenzen der vollkommenen Elasticität dem Torsionswinkel einfach proportional ist, wie sich aus dem Hooke'schen Gesetz (siehe das Capitel über die Eigenschaften der Materie) erwarten liess, und es erübrigt nur noch, die Grösse der Torsion für einen besonderen Winkel in absolutem Maass zu bestimmen. Diese Bestimmung ist theoretisch im Allgemeinen ziem-

lich einfach; ihre praktische Ausführung erfordert aber bedeutende Sorgfalt und Genauigkeit. Da jedoch die Torsionswage hauptsächlich bei vergleichenden, nicht bei absoluten Messungen gebraucht wird, so ist diese Bestimmung oft unnöthig. Wir werden die Torsionswage eingehender besprechen, wenn wir zu ihren Anwendungen kommen.

433. Die gewöhnlichen Spiralfederwagen, welche dazu dienen, kleine oder grosse Gewichte oder Kräfte roh zu vergleichen, sind genau genommen nur eine modificirte Form *) der Torsionswage, da ihre Wirkung fast ganz auf der Torsion des Drahtes und nicht auf einer longitudinalen Ausdehnung oder einer Biegung desselben beruht. Wenn Federwagen mit Sorgfalt construirt sind, so können sie sich unseres Erachtens mit den gewöhnlichen Wagen an Genauigkeit messen, während sie dieselben bei einigen Anwendungen an Empfindlichkeit und Bequemlichkeit weit übertreffen. Sie messen direct die Kraft, nicht die Masse, und daher muss, wenn man sie zur Bestimmung von Massen an verschiedenen Theilen der Erde benutzt, der Variation der Schwerkraft wegen eine Correction vorgenommen werden. Diese, sowie die Correction, welche die Temperatur nöthig macht, können durch Anwendung der Methode der Doppelwägung vermieden werden.

434. Das Pendel. — Das feinste aller Instrumente zur Messung einer Kraft ist wohl das Pendel. In der Kinetik (s. Theil II) wird bewiesen, dass für jedes Pendel, mag es nun unter dem Einfluss der Schwerkraft um eine mittlere verticale Lage, oder unter dem Einfluss einer magnetischen oder einer Torsionskraft in einer horizontalen Ebene oscilliren, das Quadrat der Anzahl der in einer gegebenen Zeit vollführten kleinen Oscillationen der Grösse der diese Oscillationen hervorrufenden Kraft proportional ist.

Zur Abschätzung der relativen Grösse, welche die Schwerkraft an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche hat, ist das Pendel bei Weitem das vollkommenste Instrument. Die Methode der Coincidenzen, durch welche dies Verfahren so ausserordentlich correct gemacht wird, soll später beschrieben werden.

In der That ist das kinetische Maass der Kraft nicht nur das wahre, sondern auch das vollkommenste Maass, und es lässt sich auf ein absolutes Maass leicht reduciren.

435. Bifilare Aufhängung eines Stabes. — Bei der Construction von Apparaten zu Beobachtungen des Erdmagnetismus

*) J. Thomson, Cambridge and Dublin Math. Journal (1848).

suchten Weber und Gauss es so einzurichten, dass man dieselben aus einiger Entfernung ablesen könnte. Zu diesem Zwecke trug jeder der damals zu schwer gemachten Stäbe einen ebenen Spiegel. Vermittels einer nach der Reflexion im Spiegel gesehenen und mit Hülfe eines Fernrohrs sorgfältig abgelesenen Scala war es natürlich leicht, die Ablenkungen zu berechnen, welche der Spiegel erfahren hatte. Aus vielen Gründen wurde es aber für nöthig befunden, dass die Ablenkungen selbst bei der Einwirkung einer beträchtlichen Kraft nur sehr klein seien. Deshalb führte man die bifilare Aufhängung ein. Der Magnetstab wird horizontal an zwei verticalen Drähten oder Fäden von gleicher Länge aufgehängt, die so angebracht sind, dass sich das Gewicht des Stabes zwischen beide gleichmässig vertheilt. Wenn sich der Stab dreht, so werden die Aufhängefäden gegen die verticale Richtung geneigt, und daher muss sich der Stab in die Höhe heben. Sehen wir also von der Torsion der Fäden ab, so wird bei Anwendung der bifilaren Aufhängung eine Kraft dadurch gemessen, dass man sie mit dem Gewicht des aufgehängten Magneten vergleicht.

Es sei a die Hälfte der zwischen den Anknüpfungspunkten der Fäden enthaltenen Stablänge, ϑ der Winkel, durch welchen der Stab sich (in einer horizontalen Ebene) von seiner Gleichgewichtslage aus gedreht hat, l die Länge eines der Fäden und ι die Neigung desselben gegen die Verticale.

Dann ist $l \cos \iota$ die Höhendifferenz der Enden jedes Fadens, und es ergiebt sich leicht, dass bei der gegebenen Aufhängungsweise

$$\tfrac{1}{2} l \sin \iota = a \sin \tfrac{1}{2} \vartheta.$$

Ist nun Q das Kräftepaar, welches den Stab zu drehen strebt, und W das Gewicht des letzteren, so liefert das Princip des mechanischen Effects

$$\begin{aligned} Q\, d\vartheta &= -\, W d (l \cos \iota) \\ &= W l \sin \iota \, d\iota. \end{aligned}$$

Wegen der Aufhängungsweise ist aber

$$l^2 \sin \iota \cos \iota \, d\iota = a^2 \sin \vartheta \, d\vartheta,$$

folglich

$$\frac{Q}{a^2 \sin \vartheta} = \frac{W}{l \cos \iota},$$

oder

$$Q = \frac{W a^2}{l} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{4 a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}},$$

und dadurch wird das Kräftepaar Q durch die Ablenkung ϑ ausgedrückt.

Wir wollen noch zeigen, wie man die Torsion der Fäden in Rechnung zieht. Dieselbe wird sich nicht merklich von ϑ unterscheiden (da die grösste Neigung gegen die verticale Richtung sehr klein ist); das aus die-

ser Torsion resultirende Kräftepaar wird demnach $E\vartheta$ sein, wo E eine Constante bezeichnet. Dies hat man zu dem eben gefundenen Werthe von Q zu addiren, um das ganze ablenkende Kräftepaar zu erhalten.

436. Dynamometer. — Dynamometer sind Instrumente zur Messung der von einer Kraft geleisteten Arbeit. White's Bremsdynamometer misst die Grösse der von einer Dampfmaschine oder einem anderen Motor während einer beliebigen Zeit wirklich verrichteten Arbeit, indem es gestattet, dass alle Arbeit während der Zeit, die der Versuch dauert, zur Ueberwindung der Reibung verwendet werde. Morin's Dynamometer misst die Arbeit, ohne dass ein Theil derselben verloren ginge, während sie von dem Motor auf die Maschinen übertragen wird, in denen sie nützliche Verwendung findet. Dies Instrument besteht aus einer einfachen Zusammensetzung von Spiralfedern, welche in jedem Augenblick das Kräftepaar misst, mit welchem der Motor den seine Kraft übertragenden Schaft dreht, und aus einer integrirenden Maschine, von welcher die von diesem Kräftepaar während einer beliebigen Zeit geleistete Arbeit abgelesen werden kann.

Es sei in irgend einem Augenblick L das Kräftepaar und φ der ganze Winkel, durch welchen sich der Schaft von dem Augenblick an gedreht hat, in welchem man zu beobachten anfängt. Die letzterwähnte Maschine zeigt in jedem Augenblick den Werth von $\int L\,d\varphi$, und dies ist (§ 240) die ganze verrichtete Arbeit.

437. Bremsdynamometer. — White's Bremsdynamometer besteht aus einem an dem Schaft befestigten Hebel, der sich aber mit demselben nicht drehen darf. Das Product aus dem Moment der Kraft, die erfordert wird, um den Hebel zu hindern, sich mit dem Schafte zu drehen, in den ganzen Winkel, durch welchen sich der Schaft dreht, ist das Maass der zur Ueberwindung der Reibung zwischen Hebel und Schaft verbrauchten Gesammtarbeit. Dasselbe Resultat wird viel leichter dadurch erhalten, dass man ein Seil oder eine Kette mehrmals um den Schaft wickelt und an beiden Enden in geeigneten Richtungen Kräfte von bekannter Grösse anbringt, so dass das Seil nahezu in Ruhe bleibt und an der Drehung des Schaftes nicht Theil nimmt. Das Product aus der Differenz der Momente dieser beiden Kräfte in Beziehung auf die Axe in den Winkel, durch welchen sich der Schaft dreht, ist das Maass der zur Ueberwindung der Reibung gegen das Seil verbrauchten Gesammtarbeit. Wenn wir den Schaft von jedem anderen Widerstande befreien und an jedem Ende des Seils oder der Kette eine hinlänglich

grosse Kraft anbringen (was in der Praxis leicht geschehen kann), so bewegt sich der Motor mit der für den Versuch passenden Geschwindigkeit weiter, und während dieser Zeit wird alle seine Arbeit zur Ueberwindung der Reibung verbraucht und zugleich gemessen.

HANDBUCH

DER

THEORETISCHEN PHYSIK.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

HANDBUCH

DER

'HEORETISCHEN PHYSIK

VON

W. THOMSON UND P. G. TAIT.

AUTORISIRTE DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

VON

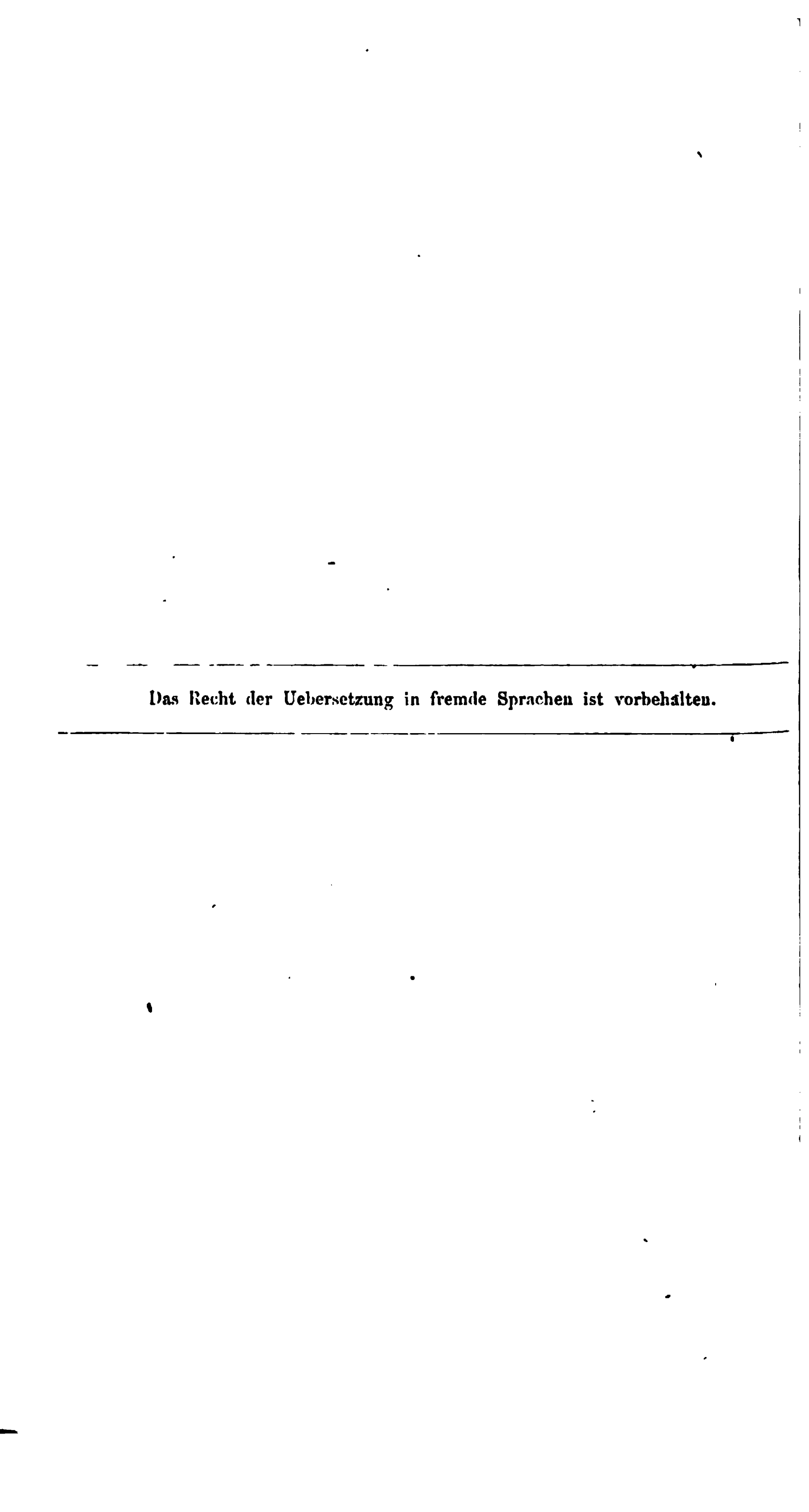
DR. H. HELMHOLTZ UND G. WERTHEIM.

ERSTER BAND.

ZWEITER THEIL.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1874.



VORREDE

ZUM

ZWEITEN THEILE DES ERSTEN BANDES.

Kritisches.

Seitdem die Uebersetzung des ersten Theils dieses Bandes veröffentlicht wurde, ist sowohl die ganze wissenschaftliche Richtung desselben, als insbesondere auch eine Reihe einzelner Stellen daraus von Herrn J. C. F. Zöllner in seinem Buche „über die Natur der Kometen" einer mehr als lebhaften Kritik unterzogen worden. Auslassungen gegen die persönlichen Eigenschaften der englischen Autoren oder meiner selbst zu beantworten, halte ich nicht für nöthig. Auf eine Kritik wissenschaftlicher Sätze und Principien zu erwiedern, habe ich der Regel nach nur dann für nöthig gehalten, wenn neue Thatsachen beizubringen oder Missverständnisse aufzuklären waren, in der Erwartung, dass, wenn alle Data gegeben sind, die wissenschaftlichen Fachgenossen schliesslich sich ihr Urtheil zu bilden wissen auch ohne die weitläufigen Auseinandersetzungen oder sophistischen Künste der streitenden Gegner. Wäre das vorliegende Handbuch nur für reif ausgebildete Sachverständige bestimmt, so hätte der Zöllner'sche Angriff unbeantwortet bleiben können. Es ist aber auch wesentlich für Lernende berechnet, und da jüngere Leser durch die überaus grosse Zuversichtlichkeit und den Ton sittlicher Entrüstung, in welchem

unser Kritiker seine Meinungen vorzutragen sich berechtigt glaubt, vielleicht irre gemacht werden könnten, halte ich es für nützlich, die gegen die beiden englischen Autoren gerichteten sachlichen Einwendungen so weit zu beantworten, als nöthig ist, damit der Leser sich durch eigene Ueberlegung zurecht zu finden wisse.

Unter den Naturforschern, welche ihr Streben vorzugsweise darauf gerichtet haben, die Naturwissenschaft von allen metaphysischen Erschleichungen und von allen willkürlichen Hypothesen zu reinigen, sie im Gegentheil immer mehr zum reinen und treuen Ausdruck der Gesetze der Thatsachen zu machen, nimmt Sir W. Thomson eine der ersten Stellen ein, und er hat gerade dieses Ziel vom Anfange seiner wissenschaftlichen Laufbahn an in bewusster Weise verfolgt. Eben dies erscheint mir als ein Hauptverdienst des vorliegenden Buches, während es in Herrn Zöllner's Augen seinen fundamentalen Mangel bildet. Letzterer möchte statt der „inductiven“ Methode der Naturforscher eine überwiegend „deductive“ eingeführt sehen. Wir alle haben bisher das inductive Verfahren gebraucht, um neue Gesetze, beziehlich Hypothesen, zu finden, das deductive, um deren Consequenzen zum Zwecke ihrer Verificirung zu entwickeln. Eine deutliche Auseinandersetzung, wodurch sich sein neues Verfahren von dem allgemein eingehaltenen unterscheiden solle, finde ich in Herrn Zöllner's Buche nicht. Dem von ihm in Aussicht genommenen letzten Ziele nach läuft es auf Schopenhauer'sche Metaphysik hinaus. Die Gestirne sollen sich einander lieben und hassen, Lust und Unlust empfinden und sich so zu bewegen streben, wie es diesen Empfindungen entspricht. Ja in verschwommener Nachahmung des Gesetzes der kleinsten Wirkung wird (S. 326, 327) der Schopenhauer'sche Pessimismus, welcher diese Welt zwar für die beste unter den möglichen Welten, aber für schlechter als gar keine erklärt, zu einem angeblich allgemeingültigen Principe von der kleinsten Summe der Unlust formulirt, und dieses als oberstes Gesetz der Welt, der lebenden wie der leblosen, proclamirt.

Dass nun ein Mann, dessen Geist auf solchen Wegen wandelt, in der Methode des Thomson-Tait'schen Buches das gerade Gegentheil des richtigen Weges, oder dessen, was er selbst dafür hält, erblickt, ist natürlich; dass er den Grund des

Widerspruchs in allen möglichen persönlichen Schwächen der Gegner, nicht aber da sucht, wo er wirklich steckt, entspricht ganz der intoleranten Weise, in der Anhänger von metaphysischen Glaubensartikeln ihre Gegner zu behandeln pflegen, um sich und der Welt die Schwäche ihres eigenen Standpunktes zu verhüllen. Herr Zöllner ist überzeugt, „dass es der Mehrzahl unter den heutigen Vertretern der exacten Wissenschaften an einer klar bewussten Kenntniss der ersten Principien der Erkenntnisstheorie gebreche.“ (S. VIII.) Dies sucht er durch Nachweisung angeblicher grober Denkfehler bei mehreren von ihnen zu erhärten.

Dazu müssen zunächst die Herren Thomson und Tait herhalten. Diese haben ihrer Ueberzeugung betreffs des richtigen Gebrauchs der naturwissenschaftlichen Hypothesen in den Paragraphen 381 bis 385 des vorliegenden Buches Ausdruck gegeben. Sie tadeln in Paragraph 385 Hypothesen, die sich zu weit von den beobachtbaren Thatsachen entfernen, und wählen als Beispiele für den nachtheiligen Einfluss derselben natürlich nur solche, welche durch ausgedehnte Verbreitung und die Autorität ihrer Urheber wirklich einflussreich geworden sind. In dieser Beziehung stellen sie das von unserem Landsmanne W. Weber aufgestellte Gesetz der elektrischen Fernwirkung in gleiche Linie mit der von J. Newton physikalisch durchgearbeiteten Emissionstheorie des Lichtes. Diese Nebeneinanderstellung zeigt am besten, dass die Englischen Autoren Nichts beabsichtigten, was ein gesund gebliebenes deutsches Nationalgefühl verletzen müsste. Wir sind, denke ich, in Deutschland noch nicht dahin gekommen und werden hoffentlich nie dahin kommen, dass Hypothesen, wenn sie auch von einem noch so hochverdienten Manne aufgestellt worden sind, nicht kritisirt werden dürften. Sollte es aber wirklich jemals dahin kommen, dann würden Herr Zöllner und seine metaphysischen Freunde in der That das Recht haben, über den Untergang der deutschen Naturwissenschaft zu klagen, beziehlich zu triumphiren. Eine Hypothese aufgestellt zu haben, welche bei weiterer Entwicklung der Wissenschaft sich als unzulässig erweist, ist für Niemanden ein Tadel, ebensowenig als es für Jemanden, der in gänzlich unbekannter Gegend sich seinen Weg suchen muss, ein Vorwurf ist, trotz aller Aufmerksamkeit und Ueberlegung, die er verwendet hat, einmal fehl-

gegangen zu sein. Auch ist weiter klar, dass derjenige, der eine Hypothese, welche die Geister einer grossen Menge von wissenschaftlichen Männern gefangen genommen hat, für falsch hält, demnächst urtheilen muss, dass dieselbe zeitweilig schädlich und hemmend für die Entwickelung der Wissenschaft sei, und wird berechtigt sein dies auszusprechen, wenn ihm die Aufgabe zufällt, nach seiner besten Ueberzeugung den Lernenden über den Weg, den er einzuschlagen habe, zu berathen.

Unter den Gründen, welche Herr W. Thomson für die Unzulässigkeit der Weber'schen Hypothese anführt, ist auch der, dass sie dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft widerspreche. Dieselbe Behauptung war auch ich genöthigt, etwas später in einer im Jahre 1870 veröffentlichten Arbeit*) aufzustellen. Herr Zöllner hat nun auf die Autorität von Herrn C. Neumann hin angenommen, diese Behauptung sei falsch. Ihm erscheint im Gegentheil das Weber'sche Gesetz ebenfalls ein Universalgesetz aller Kräfte der Natur zu sein (wie sich diese verschiedenen Universalgesetze mit einander vertragen, bleibt unerörtert), und er verwendet 20 Seiten seiner Einleitung dazu, um seiner Entrüstung über die intellectuelle und moralische Stumpfheit derjenigen, die es antasten, Luft zu machen. Herr Zöllner wird seitdem wohl begriffen haben, dass es mindestens unvorsichtig ist, nur auf die Autorität eines der Gegner gestützt einem wissenschaftlichen Streite mit Schmähreden gegen die andere Partei assistiren zu wollen, abgesehen davon, dass man auf solche Weise zur Entscheidung des Streites gar Nichts, zur Verbitterung desselben vielleicht sehr viel beiträgt. Herr C. Neumann war selbst Partei in dieser Sache; die Theorie der elektrodynamischen Wirkungen, welche er selbst damals festhielt, wurde von meinen Einwänden mitgetroffen. Er hat seitdem diese Theorie fallen lassen. Er selbst, wie Herr W. Weber, haben des letztern ursprüngliche Theorie halten zu können geglaubt, wenn sie die Mitwirkung molecularer Kräfte für sehr genäherte elektrische Massen hinzunähmen. Ich habe dann in meiner zweiten Abhandlung zur Theorie der Elektrodynamik**) nachgewiesen, dass die Annahme

---

*) Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. Borchardt, Journal für Mathematik. Bd. 72, 75.

**) Genanntes Journal Bd. 75.

von Molecularkräften den Leck in der Weber'schen Theorie nicht zustopft. Inzwischen hat Herr C. Neumann selbst, noch ehe er von meinem zweiten Aufsatze Kenntniss erhielt, die Begründung der Elektrodynamik auf das Weber'sche Gesetz aufgegeben, und ein neues Gesetz dafür zu construiren gesucht.

Hierbei möchte ich, gegenüber der Betonung der deductiven Methode durch unsere Gegner, an dieses Beispiel noch folgende Bemerkung knüpfen. Nach der bisherigen Ansicht der besseren Naturforscher war die deductive Methode nicht bloss berechtigt, sondern sogar gefordert, wenn es sich darum handelte, die Zulässigkeit einer Hypothese zu prüfen. Jede berechtigte Hypothese ist der Versuch, ein neues allgemeineres Gesetz aufzustellen, welches mehr Thatsachen unter sich begreift, als bisher beobachtet sind. Die Prüfung derselben besteht nun darin, dass wir alle Folgerungen, welche aus ihr herfliessen, uns zu entwickeln suchen, namentlich diejenigen, welche mit beobachtbaren Thatsachen zu vergleichen sind. Also wäre es meines Erachtens die erste Pflicht derjenigen gewesen, welche die Weber'sche Hypothese vertheidigen wollten, unter Anderem nachzusehen, ob diese Hypothese die allergemeinste Thatsache erklären kann, die nämlich, dass die Elektricität, wenn keine elektromotorischen Kräfte auf sie einwirken, in allen elektrischen Leitern in Ruhe bleibt und also fähig ist, in stabilem Gleichgewichte zu beharren. Wenn die Weber'sche Hypothese das Gegentheil ergiebt, wie ich nachzuweisen gesucht habe, so war zunächst nach einer solchen Modification derselben zu suchen, welche stabiles Gleichgewicht in den grössten wie in den kleinsten Leitern möglich machte. Nach meiner Ansicht wäre dies ein richtiges und durch die deductive Methode gefordertes Verfahren gewesen, nicht aber Halt zu machen, wenn man merkt, dass man auf unbequeme Folgerungen kommt, und sich damit zu entschuldigen, dass die richtigen Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität aus dem Weber'schen Gesetz eben noch nicht gefunden seien. Und wenn ein Anderer sich dieser Mühe unterzieht, so sollte Jemand, der sich für einen Vertreter der deductiven Methode κατ' ἐξοχήν hält, ihm Beifall spenden, statt ihn der Impietät zu bezichtigen, selbst wenn die Ergebnisse der Untersuchung sich als unbequem für den Icarusflug der Speculation herausstellen sollten.

Da Herr Zöllner sich nicht für einen Mathematiker ausgibt, im Gegentheil uns auf Seite 426 und 427 seines Buches belehrt, dass zu häufige Anwendung der Mathematik die bewusste Verstandesthätigkeit verkümmern mache und ein bequemes Mittel zur Befriedigung der Eitelkeit sei, ausserdem an vielen Stellen, immer wiederholt, seine Geringschätzung denen ausspricht, die seine Speculationen durch Nachweis von Fehlern im Differentiiren und Integriren zu widerlegen glaubten: so dürfen wir betreffs des Weber'schen Gesetzes nicht zu strenge mit ihm rechten. Freilich sollte billiger Weise Jemand, der die Freiheit für sich in Anspruch nimmt, unsicher in der Mathematik sein zu dürfen, nicht über Dinge absprechen wollen, die nur durch mathematische Untersuchungen entschieden werden können. Seine Kometentheorie, die man doch wohl als ein nach seiner Meinung mustergültiges Beispiel davon ansehen soll, wie die rechte Methode zu verfahren habe, gibt überdies andere viel populärere Beispiele derselben eigenthümlichen Art von Anwendung oder Nichtanwendung der Deduction, Beispiele, deren Besprechung für eine andere passendere Gelegenheit vorbehalten werden mag.

Es bleibt noch sein Ausfall gegen die Autoren dieses Buches wegen der Emissionstheorie des Lichtes zu besprechen. Sie sagen, eine solche Theorie wäre höchstens dann zu rechtfertigen gewesen, wenn ein Lichtkörperchen wirklich gesehen und untersucht worden wäre. Herr Zöllner findet in dieser Forderung „nicht etwa nur eine physikalische, sondern sogar eine leicht „zu entdeckende logische Unmöglichkeit. In der That, wenn „in uns erst durch die Berührung der Lichtkörperchen mit unseren „Nerven die Empfindung des Lichtes erzeugt wird, — so ist es „offenbar unmöglich, ein solches Lichtkörperchen, bevor es „unseren Sehnerven berührt oder afficirt hat, überhaupt durch „das Auge wahrzunehmen.“ Darauf folgen dann Declamationen über grobe Denkfehler, absoluten Nonsens u. s. w. Letzterer ist hier wirklich vorhanden; aber er steckt nicht in dem, was die englischen Autoren gesagt, sondern in dem, was ihr Angreifer in ihre Worte hineininterpretirt hat. Muss ich einem Manne, der so viel sicherer in den Elementen der Erkenntnisstheorie zu sein glaubt, als seine Gegner, noch erst auseinandersetzen, dass ein Object sehen, im Sinne der Emanationstheorie, heisst

die Lichtkörperchen in das Auge aufnehmen und empfinden, die von jenem Objecte abgeprallt sind? Nun ist aber nichts von einer logischen Unmöglichkeit oder Widerspruch gegen die Grundlagen der Theorie in der Annahme zu finden, dass ein ruhendes Lichtkörperchen — sie ruhen ja, sobald sie von dunkeln Körpern absorbirt sind — andere gegenstossende zurückwerfe, für die es dadurch Radiationscentrum wird und demnächst als Ausstrahlungspunkt dieser Radiation gesehen werde. Ob und wie ein solcher Vorgang zur Beobachtung zu bringen ist, wäre im Sinne der englischen Autoren natürlich Sache desjenigen, der die Existenz der Lichtkörperchen direct beweisen wollte. Man mag über die Strenge und Zweckmässigkeit dieser Anforderung denken, was man will, ein logischer Widerspruch liegt nicht darin, und gerade auf einen solchen käme es an, um das zu beweisen, was Herr Zöllner beweisen möchte.

Einen weiteren Einwurf von ähnlichem wissenschaftlichen Werthe will ich noch erwähnen, weil er sich auf Sir W. Thomson bezieht, wenn auch nicht auf eine Stelle dieses Buches. Es betrifft die Frage über die Möglichkeit, dass organische Keime in den Meteorsteinen vorkommen und den kühl gewordenen Weltkörpern zugeführt werden. Herr W. Thomson hatte diese Ansicht in seiner Eröffnungsrede der britischen Naturforscherversammlung zu Edinburg im Herbst 1871 als „nicht unwissenschaftlich" bezeichnet. Auch hier muss ich mich, wenn darin ein Irrthum liegt, als Mitirrender melden. Ich hatte dieselbe Ansicht als eine mögliche Erklärungsweise der Uebertragung von Organismen durch die Welträume sogar noch etwas früher als Herr W. Thomson in einem im Frühling desselben Jahres zu Heidelberg und Cöln gehaltenen, aber noch nicht veröffentlichten Vortrage erwähnt. Ich kann nicht dagegen rechten, wenn Jemand diese Hypothese für unwahrscheinlich im höchsten oder allerhöchsten Grade halten will. Aber es erscheint mir ein vollkommen richtiges wissenschaftliches Verfahren zu sein, wenn alle unsere Bemühungen scheitern, Organismen aus lebloser Substanz sich erzeugen zu lassen, dass wir fragen, ob überhaupt das Leben je entstanden, ob es nicht eben so alt, wie die Materie sei, und ob nicht seine Keime von einem Weltkörper zum anderen herübergetragen sich überall entwickelt hätten, wo sie günstigen Boden gefunden.

Herrn Zöllner's angebliche physikalische Gegengründe sind von sehr geringem Gewicht. Er erinnert an die Erhitzung der Meteorsteine und fügt hinzu (S. XXVI). „Wenn daher „jener mit Organismen bedeckte Meteorstein auch beim Zer„trümmern seines Mutterkörpers mit heiler Haut davon gekommen „wäre und nicht an der allgemeinen Temperaturerhöhung Theil „genommen hätte, so musste er doch nothwendig erst die Erd„atmosphäre passirt haben, ehe er sich seiner Organismen zur „Bevölkerung der Erde entledigen konnte."

Nun wissen wir erstens, aus häufig wiederholten Beobachtungen, dass die grösseren Meteorsteine bei ihrem Fall durch die Atmosphäre sich nur in ihrer äussersten Schicht erhitzen, im Innern aber kalt oder sogar sehr kalt bleiben. Alle Keime also, die etwa in Spalten derselben steckten, wären vor Verbrennung in der Erdatmosphäre geschützt. Aber auch die oberflächlich gelagerten würden doch wohl, wenn sie in die allerhöchsten und dünnsten Schichten der Erdatmosphäre gerathen, längst durch den gewaltigen Luftzug herabgeblasen sein, ehe der Stein in dichtere Theile der Gasmasse gelangt, wo die Compression gross genug wird, um merkliche Wärme zu erzeugen. Und was andererseits den Zusammenstoss zweier Weltkörper betrifft, wie ihn Thomson annimmt, so werden die ersten Folgen davon gewaltige mechanische Bewegungen sein, und erst in dem Maasse, als diese durch Reibung vernichtet werden, entsteht Wärme. Wir wissen nicht, ob das Stunden, oder Tage, oder Wochen dauern würde. Die Bruchstücke, welche im ersten Moment mit planetarischer Geschwindigkeit fortgeschleudert sind, können also ohne alle Wärmeentwicklung davon kommen. Ich halte es nicht einmal für unmöglich, dass ein durch hohe Schichten der Atmosphäre eines Weltkörpers fliegender Stein, oder Steinschwarm einen Ballen Luft mit sich hinausschleudert und fortnimmt, der unverbrannte Keime enthält.

Wie gesagt, möchte ich alle diese Möglichkeiten noch nicht für Wahrscheinlichkeiten ausgeben. Es sind nur Fragen, deren Existenz und Tragweite wir im Auge behalten müssen, damit sie vorkommenden Falls durch wirkliche Beobachtungen oder Schlussfolgerungen aus solchen gelöst werden können.

Herr Zöllner versteigt sich dann zu folgenden zwei Sätzen (S. XXVIII und XXIX):

„Dass die Naturforscher heute noch einen so ungemeinen „Werth auf den inductiven Beweis der generatio aequivoca „legen, ist das deutlichste Zeichen, wie wenig sie sich mit den „ersten Principien der Erkenntnisstheorie vertraut gemacht „haben."

und ferner:

„Ebenso drückt die Hypothese von der generatio aequi„voca, — — nichts anderes als die Bedingung für die Begreiflich„keit der Natur nach dem Causalitätsgesetze aus."

Hier haben wir den ächten Metaphysiker. Einer angeblichen Denknothwendigkeit gegenüber blickt er hochmüthig auf die, welche sich um Erforschung der Thatsachen bemühen, herab. Ist es schon vergessen, wie viel Unheil dieses Verfahren in den früheren Entwicklungsperioden der Naturwissenschaften angerichtet hat? Und was ist die logische Basis dieses erhabenen Standpunktes? Die richtige Alternative ist offenbar:

„Organisches Leben hat entweder zu irgend einer Zeit angefangen zu bestehen, oder es besteht von Ewigkeit."

Herr Zöllner lässt den zweiten Theil dieser Disjunction einfach weg, oder glaubt ihn durch einige kurz zuvor angeführte flüchtige physikalische Betrachtungen beseitigt zu haben, die durchaus nicht entscheidend sind. Demgemäss ist seine Conclusio, welche die erste Hälfte der oben aufgestellten Disjunction affirmirt, entweder gar nicht bewiesen, oder nur mittels eines Minor, der auf physikalische Gründe (und zwar ungenügende) gestützt ist. Also ist die Conclusio keineswegs, wie Herr Zöllner glaubt, ein Satz von logischer Nothwendigkeit, sondern höchstens eine unsichere Folgerung aus physikalischen Betrachtungen.

Dies ist, was Herr Zöllner auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Fragen gegen die Autoren dieses Handbuchs einzuwenden hat*). Anklagen, von genau demselben Gewichte, gegen andere Naturforscher mit derselben Zuversicht auf die eigene Unfehlbarkeit und mit demselben schnellfertigen Absprechen über die intellectuellen und moralischen Eigenschaften

*) Auf dem Gebiete der persönlichen Fragen muss ich bezüglich der die Principien der Spectralanalyse betreffenden Prioritätsreclamation, mit welcher Herr W. Thomson für Herrn Stokes gegen Herrn Kirchhoff aufgetreten ist, mich auf die Seite des Letztgenannten stellen in voller Anerkennung der Gründe, die er selbst geltend gemacht hat.

des Gegners erhoben, finden sich in Herrn Zöllner's Buche noch in grosser Anzahl vor. Einen anderen Theil dieser Beispiele zu besprechen wird sich noch eine andere Gelegenheit finden. Wenn ich eine Nutzanwendung, die uns hier interessirt, vorausnehmen darf, so ist es die, dass die strenge Disciplin der inductiven Methode, das treue Festhalten an den Thatsachen, welches die Naturwissenschaften gross gemacht hat, für den aufmerksamen und urtheilsfähigen Leser durch keine theoretischen Gründe wirksamer und beredter vertheidigt werden kann, als durch das praktische Beispiel, welches das Zöllner'sche Buch für die Consequenzen der entgegengesetzten, angeblich deductiven, speculirenden Methode gibt, um so mehr als Herr Zöllner unzweifelhaft ein talentvoller und kenntnissreicher Mann ist, der einst, ehe er in die Metaphysik verfiel, hoffnungsreiche Arbeiten lieferte, und noch jetzt, wo er auf dem Boden der Wirklichkeit festgehalten wird, z. B. bei der Construction optischer Instrumente und der Ermittelung optischer Methoden, Scharfsinn und Erfindungsgabe zeigt.

Berlin, December 1873.

H. Helmholtz.

Weiteres Verzeichniss neuer oder in deutschen Büchern weniger gebrauchter Benennungen mit Angabe des Ortes ihrer Bestimmung.

Fortsetzung von Seite XIII des ersten Theils.

Coefficienten der statischen und kinetischen Reibung § 451.

Ruhewinkel (Angle of Repose) eines zum Gleiten neigenden Körpers § 456.

Kegelecke (nach F. E. Neumann) oder der körperliche Winkel eines Kegels § 465.

Kraftlinie (Line of Force) § 489.

Correspondirende Punkte auf confocalen Ellipsoiden § 519.

Centrobarische Körper und ihr Attractionscentrum § 526.

Deflexion, Inclination, Krümmung einer elastischen Platte § 627.

Elastische Reaction und Zwang (stress) § 658.

Isotrop und äolotrop § 676.

Volumenelasticität und Gestaltselasticität, Starrheit (Rigidity) § 680.

Longitudinale Starrheit § 686.

Topographische Conturen (Coupes topographiques) § 708.

Hauptaxen und Hauptwiderstände der Biegung in einem Stabe § 715.

Ebene Deformation eines elastischen Körpers § 738.

Zähigkeit, Plasticität (viscosity, plasticity) § 741.

Metacentrum § 768.

INHALTSVERZEICHNISS
DES
ZWEITEN THEILS.

Fünftes Capitel.

Einleitung.

Sechstes Capitel.

Statik eines materiellen Punktes. — Attraction.

Siebentes Capitel.

Statik fester und flüssiger Körper.

ZWEITER THEIL.

ABSTRACTE DYNAMIK.

Fünftes Capitel.

Einleitung.

438. Approximative Behandlung physikalischer Fragen. — So lange wir nicht die Natur der Materie und die Kräfte, welche ihre Bewegungen hervorbringen, vollständig kennen, wird es durchaus unmöglich sein, die exacten Bedingungen irgend einer physikalischen Frage einer mathematischen Behandlung zu unterwerfen. Doch kann man fast jedes Problem der gewöhnlichen Theile der Physik leicht approximativ durch Einführung einer Art von abstracter oder vielmehr gegen eine Grenze hin verschobener Annahmen lösen, die uns in den Stand setzt, die Frage in ihrer modificirten Form ohne Mühe zu beantworten, während wir zugleich versichert sind, dass die (so modificirten) Umstände auf das Resultat nur von unwesentlichem Einflusse sind.

439. Nehmen wir z. B. den einfachen Fall eines Hebebaumes, den man anwendet, um eine schwere Masse in Bewegung zu setzen. Wollte man die Wirkung vollständig berechnen, so hätte man gleichzeitig die Bewegungen jedes Theils des Baumes, der Unterlage und der gehobenen Masse zu behandeln, und bei der fast gänzlichen Unkenntniss, in der wir uns über die Natur der Materie und der Molekularkräfte befinden, ist es offenbar unmöglich, das Problem in dieser Weise in Angriff zu nehmen.

Nun lehrt die Beobachtung, dass die Theile des Baumes, der Unterlage und der Masse, eines jeden für sich, während des ganzen Processes nahezu dieselben relativen Lagen gegen einander beibehalten, und diese Beobachtung bringt uns auf die Idee, statt der obigen unmöglichen Frage eine andere, allerdings ganz davon verschiedene Frage zu behandeln, die jedoch, während sie unendlich einfacher ist, offenbar zu nahezu denselben Resultaten wie die erstere führt.

440. Zu der neuen Form der Aufgabe führt uns unmittelbar das experimentelle Ergebniss des Versuchs. Stellen wir uns die in Frage kommenden Massen als vollkommen starr vor (d. h. als durchaus unfähig, ihre Form oder ihre Dimensionen zu ändern), so kann die unendliche Reihe der wirklich wirkenden Kräfte von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben; die mathematische Untersuchung hat es dann mit einer endlichen (und im Allgemeinen kleinen), statt mit einer praktisch unendlich grossen Anzahl von Kräften zu thun. Dass wir berechtigt sind, statt der Aufgabe, von der wir ausgingen, die neue einfachere zu behandeln, lässt sich in folgender Weise zeigen:

441. Die Wirkungen der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte würden sich nur in Aenderungen der molekularen Form oder des Volumens der in Rede stehenden Massen zeigen. Da diese aber (praktisch) fast unverändert bleiben, so können die Kräfte, welche Aenderungen hervorbringen oder hervorzubringen suchen, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Wir können folglich die Wirkung der Vorrichtung unter der Voraussetzung untersuchen, dass dieselbe aus getrennten Theilen bestehe, deren Form und Dimensionen unveränderlich sind.

442. **Weitere Annäherungen.** — Wenn wir ein wenig näher auf die Sache eingehen, so finden wir, dass sich der Hebel biegt, dass einige seiner Theile ausgedehnt, andere zusammengezogen werden. Dies würde uns in eine sehr ernsthafte und schwierige Untersuchung führen, wenn wir alle Umstände zu berücksichtigen hätten. Wir finden aber (auf dem Wege der Erfahrung), dass wir eine hinlänglich genaue Lösung dieser noch viel bedenklicheren Theile der Frage erhalten, wenn wir voraussetzen (was in der Praxis nie realisirt werden kann), die Masse sei homogen, und die durch eine Ausdehnung, eine Compression oder eine Verdrehung hervorgerufenen Kräfte seien beziehungsweise diesen Deformationen an Grösse proportional, an Richtung entgegengesetzt. Mittels dieser weiteren Annahme kann man die Vibrationen von

Stäben, Platten, u. s. w., sowie den statischen Effect von elastischen Federn, u. s. w. in sehr enger Annäherung behandeln.

443. Wir können den Process noch weiter verfolgen. Compression entwickelt im Allgemeinen Wärme, Ausdehnung, Kälte. Diese ändern merklich die Elasticität eines Körpers. Durch Einführung solcher Betrachtungen erreichen wir ohne grosse Schwierigkeit das, was man eine dritte Approximation an die Lösung des betrachteten physikalischen Problems nennen kann.

444. Wir könnten weiter die Leitung der so erzeugten Wärme durch den festen Körper und die Modificationen der Elasticität, von denen sie begleitet ist, einführen, u. s. w. Darauf könnten wir die Erzeugung der thermo-elektrischen Ströme betrachten, welche (wie wir sehen werden) immer durch ungleiche Erwärmung einer Masse entwickelt werden, wenn dieselbe nicht vollkommen homogen ist. Doch wird das Gesagte genügen zu zeigen, dass wir erstens völlig unfähig sind, irgend eine physikalische Frage mittels der einzig vollkommenen Methode, nämlich durch Betrachtung der Umstände, welche auf die Bewegung jedes einzelnen Theils jedes in Rede stehenden Körpers von Einfluss sind, exact und vollständig zu lösen; und dass zweitens praktische Fragen in praktisch ausreichender Weise dadurch in Angriff genommen werden können, dass man ihre Allgemeinheit beschränkt; die Beschränkungen, die man einführt, sind aus der Erfahrung hergeleitet und sind daher als die von der Natur selbst gegebene (mehr oder weniger genaue) Lösung der unendlich vielen Gleichungen zu betrachten, die uns sonst in Verlegenheit gesetzt haben würden.

445. Um einen anderen Fall zu nehmen, so ist es bei der Betrachtung der Fortpflanzung der Wellen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit nicht nur der mathematischen Schwierigkeiten wegen, sondern auch weil wir nicht wissen, was die Materie ist und welche Kräfte ihre Theile auf einander ausüben, ganz unmöglich, die Gleichungen zu bilden, die uns die Bewegung jedes einzelnen Theils liefern würden. Unsere erste und für die meisten praktischen Zwecke genügende Annäherung an die Lösung wird aus der Betrachtung der Bewegung einer homogenen, unzusammendrückbaren und vollkommen plastischen Masse hergeleitet; eine hypothetische Substanz, die natürlich in der Natur nirgends existirt.

446. Betrachten wir die Sache etwas näher, so finden wir, dass die wirkliche Bewegung sich von der durch die analytische Lösung des beschränkten Problems gegebenen beträchtlich unterscheidet; wir führen deshalb weitere Betrachtungen ein, wie die

1*

Zusammendrückbarkeit, die Reibung im Innern der Flüssigkeiten, die durch die Reibung erzeugte Wärme, die Ausdehnung, welche diese Erwärmung hervorbringt, u. s. w. Durch successive Correctionen dieser Art kommen wir zuletzt zu einem mathematischen Resultat, welches (jedenfalls beim jetzigen Stande der experimentellen Naturwissenschaft) innerhalb der Grenzen der Fehler, denen experimentelle Untersuchungen ausgesetzt sind, mit der Beobachtung übereinstimmt.

447. Es würde leicht sein, noch viele andere Beispiele zu geben, welche unsere obige Vorausbemerkung bestätigen; doch scheint dies kaum nöthig zu sein. Wir bemerken daher ein für allemal, dass es keine Frage in der Physik giebt, die sich vollständig und exact mittels mathematischer Schlussfolgerungen behandeln liesse (wobei, was man sorgfältig beachten muss, nicht nothwendig mathematische Symbole angewendet zu werden brauchen), dass es jedoch verschiedene Grade von Annäherung giebt, zu denen man bei der Lösung jeder besonderen Frage gelangt, indem man Annahmen macht, die mit der Beobachtung mehr oder weniger nahe zusammenfallen.

448. **Gegenstand des vorliegenden Theils des Werkes.** — Der Gegenstand des vorliegenden Theils dieses Bandes ist die Behandlung der ersten und der zweiten dieser Annäherungen. Wir werden darin alle festen Körper entweder als starr, d. h. als in Form und Volumen unveränderlich, oder als elastisch ansehen; im letzteren Falle werden wir aber voraussetzen, dass das Gesetz, welches den Zusammenhang zwischen einer Compression oder einer Verdrehung mit der Kraft, deren Folge sie ist, ausdrückt, eine besondere experimentell hergeleitete Form hat; auch werden wir in diesem Falle keine Rücksicht auf die Wärme- oder elektrischen Wirkungen nehmen, die eine Compression oder eine Verdrehung im Allgemeinen veranlasst. Ferner werden wir die Flüssigkeiten, seien sie nun tropfbar oder gasförmig, entweder als unzusammendrückbar oder als nach gewissen bekannten Gesetzen zusammendrückbar voraussetzen; die Reibung zwischen den Theilen einer Flüssigkeit werden wir nicht betrachten, obwohl wir auf die Reibung zwischen festen Körpern Rücksicht nehmen. Wir werden demnach die Flüssigkeiten als vollkommen voraussetzen. d. h. annehmen, dass jeder Theil derselben durch die geringste Kraft in Bewegung versetzt werden könne.

449. Wenn wir zu den Eigenschaften der Materie und zu den physikalischen Kräften gelangen, werden wir die Modificationen

(soweit sie jetzt bekannt sind) näher besprechen, welche die vorhergehenden Resultate durch weitere Annäherungen erlitten haben.

450. **Gesetze der Reibung.** — Die Gesetze der Reibung zwischen festen Körpern sind auf sehr geschickte Weise von Coulomb ermittelt, und da wir dieselben in den folgenden Capiteln nöthig haben werden, so wollen wir sie hier kurz zusammenstellen. Die sorgfältigere Prüfung der von Coulomb auf experimentellem Wege erhaltenen Resultate verschieben wir auf unser Capitel über die Eigenschaften der Materie.

451. Um zu bewirken, dass ein fester Körper auf einem andern gleitet, wird, wenn die in Berührung befindlichen Flächen eben sind, eine tangentiale Kraft erfordert, welche abhängt: — (1) von der Natur der Körper; (2) von ihrer Glätte, oder der Art und der Menge des angebrachten Schmiermittels; (3) von dem Normaldruck zwischen den Körpern; diesem Druck ist die Kraft im Allgemeinen direct proportional; (4) von der Länge der Zeit, während welcher man sie in Berührung gelassen hat.

Die Kraft hängt (abgesehen von den äussersten Fällen, in denen ein Kratzen oder ein Abreiben stattfindet) nicht merklich von der Grösse der Flächen ab, in denen sich die Körper berühren. Diese Reibung, die man die statische nennt, ist danach im Stande, der Bewegung einen tangentialen Widerstand entgegenzusetzen, der sich auf jeden erforderlichen Betrag bis zu μR belaufen kann, wo R der ganze Normaldruck zwischen den Körpern und μ der Coefficient der statischen Reibung ist (welcher hauptsächlich von der Natur der sich berührenden Oberflächen abhängt). Dieser Coefficient ändert sich in hohem Grade mit den Umständen; in einigen Fällen ist er nur 0·03, in anderen dagegen 0·80. Weiterhin werden wir eine Tabelle seiner Werthe geben. Wo die Kräfte, die man auf das System wirken lässt, nicht im Stande sind, eine Bewegung hervorzurufen, wird nicht der ganze Betrag der statischen Reibung ins Leben gerufen, sondern nur gerade so viel, als ausreicht, die übrigen Kräfte zu äquilibriren; die Richtung der dann thätigen Reibung ist derjenigen entgegengesetzt, in welcher die Resultante der übrigen Kräfte eine Bewegung zu erzeugen strebt. Wenn die statische Reibung überwunden und ein Gleiten hervorgebracht ist, so hört, wie sich durch Versuche zeigen lässt, die Reibung nicht auf zu wirken, sondern sie setzt der Bewegung einen Widerstand entgegen, der ungefähr dem normalen Druck proportional ist; für dieselben beiden Körper ist aber der Coef-

ficient der kinetischen Reibung kleiner als derjenige der statischen; auch ist er annähernd für jede Geschwindigkeit der Bewegung derselbe.

452. **Einführung der Reibung in die Gleichungen der Dynamik.** — Wenn sich unter den in irgend einem Falle des Gleichgewichts wirkenden Kräften Reibungen fester Körper auf festen Körpern vorfinden, so würden die Umstände keine Aenderung erfahren, wenn man die Reibung ganz fortliesse, und ihre Kräfte durch Kräfte einer Wechselwirkung ersetzte, von denen man annähme, dass sie durch unendlich kleine relative Bewegungen der Theile, zwischen denen sie wirken, nicht verändert würden. Durch diesen Kunstgriff werden alle solche Fälle unter das allgemeine Lagrange'sche Princip § 289 subsumirt.

453. **Fortlassung bloss merkwürdiger Speculationen.** — In den folgenden Capiteln über die abstracte Dynamik werden wir uns streng auf solche Theile dieses ausgedehnten Gegenstandes beschränken, die uns voraussichtlich in den späteren Theilen dieses Werkes von Nutzen sein werden, oder welche an sich so wichtig sind, dass ihre Einführung gerechtfertigt erscheint. Nur in speciellen Fällen werden wir Resultate mittheilen, die nicht sowohl nützlich als vielmehr merkwürdig sind, entweder um die Natur früherer Anwendungen der Methoden zu zeigen, oder um Beispiele besonderer Untersuchungsmethoden zu geben, mittels derer sich die Schwierigkeiten besonderer Probleme überwinden lassen. Um eine allgemeine Uebersicht dieses Zweiges, rein als Gegenstand analytischer Probleme aufgefasst, zu gewinnen, sei der Leser an die speciellen mathematischen Lehrbücher verwiesen, wie die Werke von Poisson, Delaunay, Duhamel, Todhunter, Tait und Steele, Griffin, u. s. w. Aus diesen Werken, die ja auch nur die mathematische Analysis des Gegenstandes geben wollen, kann man wenig mehr als Geschicklichkeit in der Lösung von Problemen erlangen, die im Allgemeinen von keinem grossen physikalischen Interesse sind. Im vorliegenden Werke wollen wir dagegen besonders diejenigen Fragen behandeln, welche die physikalischen Principien am besten erläutern. Schwierigkeiten rein mathematischer Natur werden wir weder aufsuchen noch vermeiden.

Sechstes Capitel.

Statik eines materiellen Punktes. — Attraction.

---

454. Gegenstände des Capitels. — Die Statik zerfällt naturgemäss in zwei Theile, deren einer das Gleichgewicht eines materiellen Punktes, deren anderer das eines starren oder elastischen Körpers oder eines festen oder flüssigen Massensystems behandelt. Für den einen Theil genügt das zweite Bewegungsgesetz, für den anderen sind das dritte Gesetz und die von Newton entwickelten Consequenzen desselben nothwendig. In einigen wenigen Paragraphen werden wir den ersteren dieser Theile abmachen; der Rest dieses Capitels wird einem Excurs über die Attraction gewidmet sein, ein Gegenstand, der von der höchsten Wichtigkeit ist.

455. Bedingungen des Gleichgewichts eines materiellen Punktes. — Nach § 255 werden Kräfte, welche auf denselben materiellen Punkt wirken, nach denselben Gesetzen wie Geschwindigkeiten zusammengesetzt. Es muss folglich, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die Summe ihrer nach einer beliebigen Richtung genommenen Componenten Null sein, und hieraus ergeben sich die für das Gleichgewicht erforderlichen und hinreichenden Bedingungen.

Dieselben folgen auch direct aus Newton's Entwicklungen über die Arbeit, wenn wir voraussetzen, dass der Punkt irgend eine Geschwindigkeit von constanter Richtung und Grösse hat (und nach § 245 ist dies die allgemeinste Voraussetzung, die wir machen können, da absolute Ruhe wahrscheinlich nicht existirt). Denn da keine Aenderung der kinetischen Energie erfolgt, so ist die während einer beliebigen Zeit verrichtete Arbeit das Product der in dieser Zeit stattfindenden Verschiebung in die algebraische Summe der wirksamen Componenten der auf den Punkt einwirkenden Kräfte.

Diese Summe muss daher für jede Richtung verschwinden. Jede Verschiebung lässt sich nach drei beliebigen Richtungen, die nur nicht in einer Ebene liegen dürfen, in drei Componenten zerlegen, und diese letzteren reichen für das Criterium des Gleichgewichts aus. Es ist aber im Allgemeinen zweckmässig, jene drei Verschiebungen in zu einander senkrechten Richtungen anzunehmen.

Mit Rücksicht hierauf erhalten wir das Resultat: Damit ein materieller Punkt sich im Zustande des Gleichgewichts befinde, ist nothwendig und hinreichend, dass die (algebraischen) Summen der nach drei beliebigen zu einander senkrechten Richtungen genommenen Componenten aller auf den Punkt wirkenden Kräfte verschwinden.

Wenn eine der Kräfte, P, die Richtungscosinus l, m, n hat, so erhalten wir sofort

$$\Sigma l P = 0, \quad \Sigma m P = 0, \quad \Sigma n P = 0.$$

Wenn kein Gleichgewicht stattfindet, so möge die resultirende Kraft R sein und die Richtungscosinus λ, μ, ν haben. Es wird dann eine Kraft, welche R gleich und entgegengesetzt gerichtet ist, in Verbindung mit den übrigen Kräften Gleichgewicht erzeugen; folglich ist

$$\Sigma l P - \lambda R = 0, \quad \Sigma m P - \mu R = 0, \quad \Sigma n P - \nu R = 0,$$

und

$$R^2 = (\Sigma l P)^2 + (\Sigma m P)^2 + (\Sigma n P)^2,$$

wobei

$$\frac{\lambda}{\Sigma l P} = \frac{\mu}{\Sigma m P} = \frac{\nu}{\Sigma n P}.$$

456. Wir wollen einige wenige besondere Fälle als Beispiele der obigen allgemeinen Resultate betrachten: —

(1.) Wenn der materielle Punkt auf einer glatten Curve ruht, so muss die längs der Curve genommene Componente der Kraft verschwinden.

Sind x, y, z die Coordinaten des Curvenpunktes, in welchem der materielle Punkt ruht, so ist offenbar

$$P\left(l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Wenn P, l, m, n durch x, y, z ausgedrückt sind, so bestimmt diese Gleichung in Verbindung mit den beiden Gleichungen der Curve die Gleichgewichtslage.

(2.) Wenn die Curve rauh ist, so muss die längs derselben genommene Componente der resultirenden Kraft durch die Reibung äquilibrirt werden.

Wenn die Reibung F ist, so ist die Bedingung

$$P\left(l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds}\right) - F = 0.$$

Diese Gleichung liefert uns die Grösse der Reibung, die ins Leben gerufen werden wird, und es wird Gleichgewicht bestehen, so lange die Reibung noch μ mal so gross als der auf der Curve lastende Normaldruck ist. Dieser Normaldruck ist aber

$$P\left(\left(m\frac{dz}{ds} - n\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(n\frac{dx}{ds} - l\frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(l\frac{dy}{ds} - m\frac{dx}{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Grenzlagen, zwischen denen Gleichgewicht möglich ist, werden daher erhalten, wenn man die beiden Gleichungen der Curve mit der folgenden verbindet: —

$$P\left(l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds}\right)$$

$$\pm\mu P\left(\left(m\frac{dz}{ds} - n\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(n\frac{dx}{ds} - l\frac{dz}{ds}\right)^2 + \left(l\frac{dy}{ds} - m\frac{dx}{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

(3.) Wenn der materielle Punkt auf einer glatten Oberfläche ruht, so muss die Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte offenbar senkrecht zur Oberfläche sein.

Ist $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche, so muss demnach

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{lP} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{mP} = \frac{\frac{d\varphi}{dz}}{nP}$$

sein, und diese drei Gleichungen bestimmen die Gleichgewichtslage.

(4.) Wenn der Punkt auf einer rauhen Oberfläche ruht, so wird Reibung ins Leben gerufen, welche einer Bewegung längs der Oberfläche einen Widerstand entgegensetzt, und es wird in jedem Punkte innerhalb einer gewissen Grenzlinie Gleichgewicht bestehen. Diese Grenzlinie bestimmt sich durch die Bedingung, dass die Reibung auf ihr μ mal so gross als der auf der Oberfläche lastende Normaldruck ist, während die Reibung in allen von ihr eingeschlossenen Punkten zum Normaldruck in einem kleineren Verhältniss steht. Wenn nur die Schwere auf den materiellen Punkt wirkt, so erhalten wir ein sehr einfaches Resultat, welches oft von praktischem Nutzen ist. Es sei ϑ der Winkel, welchen die in irgend einem Punkte errichtete Normale der Oberfläche mit der verticalen Richtung einschliesst. Der auf der Oberfläche lastende Normaldruck ist offenbar $W \cos\vartheta$, wo W das Gewicht des materiellen Punktes ist, und die der Oberfläche parallele Componente des Gewichts, die natürlich durch die Reibung äquilibrirt werden muss, ist $W \sin\vartheta$. In der Grenzlage, in welcher der Punkt eben anfängt zu gleiten, wird der grösste mögliche Betrag statischer Reibung ins Leben gerufen, und es ist

$$W \sin\vartheta = \mu W \cos\vartheta,$$

oder

$$\tan \vartheta = \mu.$$

Der so gefundene Werth von μ wird der Ruhewinkel genannt. Man kann ihn in der Natur an Sandhaufen und Abhängen sehen, welche bei einer zerfallenden Klippe (besonders, wenn dieselbe blätterig ist) von den hinabrutschenden Trümmern gebildet werden; es sind dann die Linien der grössten Abdachung gegen den Horizont unter einem Winkel geneigt, welcher durch diese Betrachtung bestimmt wird.

Es sei $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche und P die Resultante der auf den Punkt wirkenden Kräfte; P habe die Richtungscosinus l, m, n. Der Normaldruck ist

$$P \cdot \frac{l \frac{d\varphi}{dx} + m \frac{d\varphi}{dy} + n \frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Die der Oberfläche parallele Componente von P ist

$$P \sqrt{\frac{\left(m \frac{d\varphi}{dz} - n \frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(n \frac{d\varphi}{dx} - l \frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \left(l \frac{d\varphi}{dy} - m \frac{d\varphi}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Für die Umgrenzung des Theils der Oberfläche, innerhalb dessen Gleichgewicht möglich ist, erhalten wir also die weitere Gleichung

$$\left(m \frac{d\varphi}{dz} - n \frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(n \frac{d\varphi}{dx} - l \frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \left(l \frac{d\varphi}{dy} - m \frac{d\varphi}{dx}\right)^2$$
$$= \mu^2 \left(l \frac{d\varphi}{dx} + m \frac{d\varphi}{dy} + n \frac{d\varphi}{dz}\right)^2.$$

457. **Attraction.** — Einen höchst wichtigen Fall der Zusammensetzung von Kräften, die auf denselben Punkt wirken, liefert uns die Betrachtung der Attraction, welche ein Körper von beliebiger Form auf einen irgendwo gelegenen materiellen Punkt ausübt. Experimente haben gezeigt, dass die Attraction, welche ein beliebiger Massentheil auf einen andern Theil ausübt, durch die Nähe oder sogar die Dazwischenschiebung anderer Masse nicht modificirt wird. Die Attraction eines Körpers auf einen Massenpunkt ist daher die Resultante der Kräfte, mit welchen die verschiedenen Theile des Körpers diesen Punkt anziehen. Was die Betrachtung der oft sehr merkwürdigen Consequenzen verschiedener Attractionsgesetze betrifft, so müssen wir auf die Werke über angewandte Mathematik verweisen. Wir haben uns hier auf das Gravitationsgesetz zu beschränken, welches in der That eine grosse Menge ebenso interessanter als nützlicher Resultate liefert.

458. Allgemeines Gesetz der Attraction. — Dies Gesetz, welches (als eine Eigenschaft der Materie) im nächsten Theile dieses Werkes ausführlich behandelt werden wird, lässt sich folgendermaassen aussprechen: —

Jeder kleinste Theil Materie zieht jeden anderen Theil mit einer Kraft an, deren Richtung mit der Verbindungslinie beider Theile zusammenfällt, und deren Grösse dem Product ihrer Massen direct und dem Quadrat ihres Abstandes von einander umgekehrt proportional ist.

Experimente zeigen (wie wir später sehen werden), dass dasselbe Gesetz für elektrische und magnetische Attractionen gilt; wahrscheinlich ist es das Fundamentalgesetz jeder Wirkung in der Natur, wenigstens wenn die Körper, um deren Wirkung es sich handelt, nicht in wirklicher Berührung sind.

459. Specielle Einheit der Stoffmenge. — Für die speciellen Anwendungen der statischen Principien, zu denen wir uns jetzt wenden, wird es zweckmässig sein, eine specielle Einheit der Masse oder Stoffmenge und entsprechende Einheiten für die Messung der Elektricität und des Magnetismus zu gebrauchen.

In Uebereinstimmung mit dem in § 458 ausgesprochenen physikalischen Gesetze nehmen wir zum Ausdruck der Kraft, welche jede der beiden Massen M und m in der Entfernung D auf die andere ausübt, die Grösse

$$\frac{Mm}{D^2};$$

dann leuchtet ein, dass die Einheit der Kraft die wechselseitige Anziehung zweier Masseneinheiten ist, die sich in der Einheit der Entfernung von einander befinden.

460. Dichtigkeit. — Für viele Anwendungen ist es zweckmässig, von der Dichtigkeit der Vertheilung von wägbarer Masse, von Elektricität, u. s. w. längs einer Linie, auf einer Oberfläche oder in einem Volumen zu sprechen. Es ist aber die

Dichtigkeit in Linien = Masse, die auf die Einheit der Länge kommt;
" " Flächen = " " " " " " Fläche " ;
" im Raume = " " " " " des Volumens " .

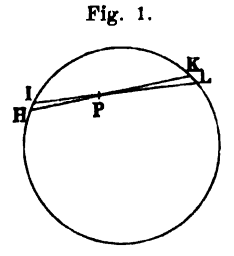
461. Einheiten für die Messung der Elektricität und des Magnetismus. — Um die nachstehenden Untersuchungen auf die Elektricität oder den Magnetismus anzuwenden, hat man nur voraus zu bemerken, dass dann M und m für Quantitäten freier Elektricität oder freien Magnetismus stehen, und dass dabei nicht

nothwendig an eine der **Trägheit** unterworfene **Masse** zu denken ist, dass im Gegentheil die Frage nach dem Wesen der Elektricität und des Magnetismus offen gelassen wird. Die Formel $\frac{Mm}{D^2}$ wird immer noch die Wechselwirkung zweier in der Entfernung D von einander befindlichen Massen M, m darstellen, wenn man zur Einheit der imaginären elektrischen oder magnetischen Materie eine solche Grösse nimmt, welche auf eine in der Einheit der Entfernung befindliche gleiche Quantität die Einheit der Kraft ausübt. Hier können jedoch eine der Grössen M, m, oder auch beide, negativ sein, und da hier gleichartige Grössen einander abstossen, so wird die Wechselwirkung eine Anziehung oder eine Abstossung sein, jenachdem ihr Ausdruck das negative oder positive Zeichen hat. Dies vorausbemerkt, ist die folgende Theorie auf jede der oben erwähnten Classen von Kräften anwendbar. Wir beginnen mit einigen einfachen Fällen, die vollständig mit Hülfe der Elementar-Geometrie behandelt werden können.

462. **Anziehung einer gleichförmig belegten Kugelfläche auf einen inneren Punkt.** — Wenn die verschiedenen Punkte einer Kugelfläche auf gleiche Weise mit Kräften anziehen, welche umgekehrt wie die Quadrate der Abstände variiren, so wird ein innerhalb der Oberfläche befindlicher materieller Punkt nach keiner Richtung hin gezogen.

Es sei $HIKL$ die Kugelfläche und P der im Innern befindliche Massenpunkt. Ferner seien durch P zwei gerade Linien HK, IL gezogen, welche sehr kleine Bogen HI, KL zwischen sich enthalten. Dann sind die Dreiecke HPI, KPL ähnlich, folglich jene Bogen den Abständen HP, LP proportional, und zwei beliebige in HI und KL liegende Elemente der Kugelfläche, die ringsum von Geraden begrenzt werden, welche durch P gehen [und nur äusserst wenig von HK abweichen], verhalten sich zu einander wie die Quadrate jener Linien. Die von der Materie, welche sich in diesen Elementen befindet, auf den Massenpunkt P ausgeübten Kräfte sind somit einander gleich; denn sie sind den Quantitäten Materie direct und den Quadraten der Abstände umgekehrt proportional, und durch Vereinigung

Fig. 1.



dieser beiden Verhältnisse erhält man das Resultat, dass die Kräfte gleich sind. Die auf P von dem in HI liegenden Element ausgeübte Anziehung ist also der von dem in KL liegenden Element ausgeübten Anziehung gleich und entgegengesetzt, d. h. der Punkt P wird weder nach der einen, noch nach der anderen Seite hin angezogen. Auf dieselbe Weise erkennt man, dass die Kraft, mit welcher jedes andere Element der Kugelfläche den Punkt P anzieht, durch eine gleiche und entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird. Der Punkt P wird also durch diese Anziehungskräfte nach keiner Richtung hin getrieben.

463. Excurs über die Theilung von Flächen in Elemente. — In den folgenden Untersuchungen wird uns die Eintheilung einer Kugelfläche in unendlich kleine Elemente noch öfters begegnen, und die im vorhergehenden Beweise beschriebene Methode Newton's, nach welcher die Theilung in einer solchen Weise ausgeführt wird, dass alle Theile in Paare von je zwei in Beziehung auf einen inneren Punkt entgegengesetzten Elementen zusammengefasst werden können, wird neben anderen aus ihr hergeleiteten und für besondere Probleme passenden Methoden wiederholt zur Anwendung kommen. Wir machen jetzt einen kleinen Excurs, um einige diesen Gegenstand betreffende Definitionen und elementar-geometrische Sätze zu geben, welche die nachfolgenden Beweise erheblich vereinfachen, indem sie uns einerseits in den Stand setzen, durch den Gebrauch geeigneter Ausdrücke Umschreibungen zu vermeiden, und uns andererseits die Mittel gewähren, uns auf elementare Principien zu beziehen, in Betreff derer sonst wiederholte Auseinandersetzungen erforderlich sein würden.

464. Kegelflächen. — Wenn eine beständig durch einen festen Punkt gehende gerade Linie sich auf irgend eine Weise bewegt, so sagt man, sie beschreibe oder erzeuge eine Kegelfläche, für welche der feste Punkt der Scheitel ist.

Wenn die erzeugende Linie aus einer gegebenen Lage sich stetig durch eine Reihe von Lagen bewegt, von denen keine mit einer anderen zusammenfällt, bis sie wieder in ihre erste Lage gelangt, so erzeugt sie zu beiden Seiten des festen Punktes eine vollständige Kegelfläche, die aus zwei Schalen besteht. Man nennt diese Schalen entgegengesetzte oder Scheitelkegel. Die im oben gegebenen Newton'schen Beweise beschriebenen Elemente HI und KL können als die von zwei entgegengesetzten Kegeln, die P zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, gebildeten Ausschnitte aus der Kugelfläche angesehen werden.

465. **Der körperliche Winkel (Kegelecke) eines Kegels oder einer vollständigen Kegelfläche.** — Wenn vom Scheitel eines Kegels als Mittelpunkt aus beliebig viele Kugeln beschrieben werden, so werden die Ausschnitte aus den concentrischen Kugelflächen ähnlich sein, ihre Flächen sich also wie die Quadrate der Radien verhalten. Der Quotient, den man erhält, wenn man die Fläche eines dieser Segmente durch das Quadrat des Radius der zugehörigen Kugelfläche dividirt, wird zum Maass des körperlichen Winkels des Kegels oder der Kegelecke genommen. Die von dem entgegengesetzten Kegel gebildeten Segmente derselben Kugelfläche sind den ersteren beziehungsweise congruent. Die Kegelecken zweier entgegengesetzten oder Scheitelkegel sind folglich einander gleich, und jede von beiden kann als die der vollständigen Kegelfläche, deren Schalen die beiden entgegengesetzten Kegel sind, zugehörige Ecke genommen werden.

466. **Summe aller um einen Punkt liegenden Kegelecken.** — Da die Grösse einer Kugelfläche gleich dem Product aus dem Quadrat des Radius in 4π ist, so sehen wir, dass die Ecken aller verschiedenen Kegel, die man um einen gegebenen Punkt als Scheitel beschreiben kann, zur Summe 4π haben.

467. **Summe der Kegelecken aller vollständigen Kegelflächen.** — Da die Ecken entgegengesetzter oder Scheitelkegel einander gleich sind, so schliessen wir aus dem Vorhergehenden, dass die Summe der Ecken aller vollständigen Kegelflächen, welche, ohne sich zu schneiden, um einen gegebenen Punkt als Scheitel beschrieben werden können, gleich 2π ist.

468. Unter der in einem Punkte über einem Flächenstück stehenden Kegelecke verstehen wir die Ecke des Kegels, dessen Erzeugungslinie beständig durch den Punkt geht, und die Umgrenzung des Flächenstücks vollständig umschreibt.

469. **Senkrechte und schiefe Schnitte eines kleinen Kegels.** — Ein sehr kleiner Kegel, d. h. ein Kegel, bei welchen irgend zwei Lagen der erzeugenden Linie nur einen sehr kleinen Winkel enthalten, wird unter rechten Winkeln oder orthogonal von einer um den Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche oder von einer beliebigen anderen ebenen oder gekrümmten Fläche geschnitten, welche diese Kugelfläche da, wo sie den Kegel schneidet, berührt.

Ein sehr kleiner Kegel wird schräg geschnitten, wenn der Schnitt mit einem orthogonalen Schnitt einen Winkel von endlicher Grösse bildet; dieser Neigungswinkel heisst die **Schrägheit des Schnittes.**

Die Fläche eines orthogonalen Schnittes eines sehr kleinen Kegels ist gleich dem Product aus der Fläche eines in derselben Lage angebrachten schrägen Schnittes in den Cosinus der Schrägheit.

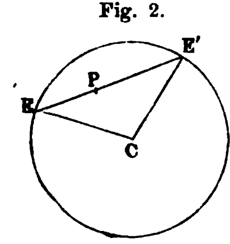
Die Fläche eines schrägen Schnittes eines sehr kleinen Kegels ist folglich gleich dem Quotienten, den man erhält, wenn man das Product aus dem Quadrate seines Abstandes vom Scheitel in die Grösse der Kegelecke durch den Cosinus der Schrägheit dividirt.

470. Fläche des durch einen kleinen Kegel auf einer Kugelfläche gebildeten Segments. — Es bezeichne E die Fläche eines sehr kleinen Elements einer Kugelfläche, welches im Punkte E liegt (d. h. dessen Theile sämmtlich dem Punkte E sehr nahe liegen); ferner bezeichne ω die über E in einem beliebigen Punkte P stehende Kegelecke, und es möge die Gerade PE oder ihre Verlängerung die Kugelfläche zum zweiten Male in E' treffen. Ist dann a der Radius der Kugelfläche, so erhalten wir

$$E = \frac{2a \cdot \omega \cdot \overline{PE}^2}{EE'}.$$

Denn wir können das Element E als einen Schnitt des Kegels ansehen, dessen Scheitel P ist und dessen erzeugende Linie die Umgrenzung von E durchläuft. Die Schrägheit dieses Schnittes ist der Winkel zwischen der gegebenen und einer zweiten Kugelfläche, die um P als Mittelpunkt mit dem Radius PE beschrieben ist; sie ist daher gleich dem Winkel zwischen den Radien EP und EC der beiden Kugeln. Betrachten wir also das gleichschenklige Dreieck ECE', so ergiebt sich, dass der Cosinus der Schrägheit gleich $\frac{\frac{1}{2}EE'}{EC}$ oder gleich $\frac{EE'}{2a}$ ist, und mit Rücksicht hierauf erhalten wir leicht den gegebenen Ausdruck für E.

Fig. 2.

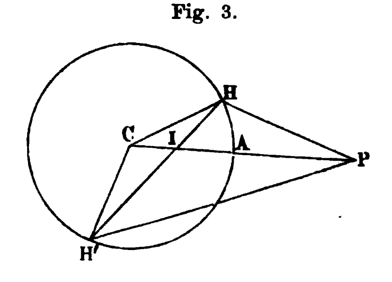


471. Anziehung einer gleichförmig belegten Kugelfläche auf einen äusseren Punkt. — Die Anziehung, welche eine gleichförmig belegte Kugelfläche auf einen äusseren

Punkt ausübt, ist dieselbe, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre*).

Es sei P der äussere Punkt, C der Mittelpunkt der Kugel und CAP eine Gerade, welche die Kugelfläche in A schneidet. Wir nehmen in CP den Punkt I so an, dass $CP : CA = CA : CI$ ist und theilen die ganze Kugelfläche in Beziehung auf den Punkt I in Paare entgegengesetzter Elemente.

Fig. 3.



Bezeichnen H und H' die Grössen eines Paares solcher Elemente, welche beziehungsweise in den Endpunkten einer Sehne HH' liegen, und ist ω die Grösse der über jedem dieser Elemente im Punkte I stehenden Kegelecke, so haben wir nach § 469

$$H = \frac{\omega \cdot \overline{IH}^2}{\cos CHI} \text{ und } H' = \frac{\omega \cdot \overline{IH'}^2}{\cos CH'I}.$$

Bezeichnet demnach ϱ die Dichtigkeit der Masse auf der Oberfläche, so ziehen die Elemente H und H' den Punkt P beziehungsweise mit den Kräften

$$\varrho \frac{\omega}{\cos CHI} \cdot \frac{\overline{IH}^2}{\overline{PH}^2} \text{ und } \varrho \frac{\omega}{\cos CH'I} \cdot \frac{\overline{IH'}^2}{\overline{PH'}^2}$$

an. Nun haben die beiden Dreiecke PCH, HCI den Winkel bei C gemeinschaftlich, und die diesen Winkel einschliessenden Seiten sind proportionirt, da $PC : CH = CH : CI$ ist. Die Dreiecke sind folglich ähnlich und die Winkel CPH und CHI einander gleich, also

$$\frac{IH}{HP} = \frac{CH}{CP} = \frac{a}{CP}.$$

---

*) Dieser Satz, welcher allgemeiner als der erste Satz Newtons über die Attraction auf einen äusseren Punkt ist (Prop. LXXI), wird vollständig bewiesen als Zusatz zu einem folgenden Satze (Prop. LXXIII. cor. 2). Wenn wir das Verhältniss der auf zwei in verschiedenen Abständen befindliche äussere Punkte ausgeübten Kräfte betrachtet hätten, statt, wie im Text geschehen ist, die auf einen Punkt wirkende absolute Kraft zu bestimmen, und wenn wir ausserdem alle Elementepaare zusammengefasst hätten, welche zwei schmale ringförmige Theile der Oberfläche bilden würden, deren Ebenen senkrecht zu PC sind, so würde der Satz und sein Beweis vollständig mit Prop. LXXI der Principia übereinstimmen.

Auf dieselbe Weise lässt sich durch Betrachtung der Dreiecke CPH' und $CH'I$ darthun, dass die Winkel CPH' und $CH'I$ gleich sind, und dass man

$$\frac{IH'}{H'P} = \frac{CH'}{CP} = \frac{a}{CP}$$

ist. Die Ausdrücke für die Grössen der von den Elementen H und H' auf P ausgeübten Anziehungen werden folglich

$$\varrho \frac{\omega}{\cos CHI} \cdot \frac{a^2}{\overline{CP}^2} \text{ und } \varrho \frac{\omega}{\cos CH'I} \cdot \frac{a^2}{\overline{CP}^2},$$

und diese sind gleich, da das Dreieck HCH' gleichschenklig ist. Aus demselben Grunde sind die Winkel CPH, CPH', die, wie wir gezeigt haben, beziehungsweise den Winkeln CHI, $CH'I$ gleich sind, einander gleich. Wir schliessen daraus, dass die Resultante der von den beiden Elementen H und H' ausgeübten Kräfte die Richtung PC hat und gleich

$$2\,\omega \cdot \varrho \cdot \frac{a^2}{\overline{CP}^2}$$

ist.

Um jetzt die Gesammtkraft zu erhalten, welche auf P wirkt, müssen wir die Summe aller längs PC wirkenden Kräfte nehmen, welche von den Paaren entgegengesetzter Elemente ausgeübt werden, und da der Multiplicator von ω für jedes Paar derselbe ist, so haben wir alle Werthe von ω zu addiren, erhalten also als Werth der gesuchten Resultante (§ 466)

$$\frac{4\,\pi\,\varrho\,a^2}{\overline{CP}^2}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist das Product aus der Dichtigkeit in die Grösse der Kugelfläche, also gleich der ganzen Masse, um die es sich handelt. Die auf P wirkende Kraft ist mithin dieselbe, als wenn diese ganze Masse in C vereinigt wäre.

Zusatz. — Die auf einen der Oberfläche unendlich naheliegenden äusseren Punkt ausgeübte Kraft ist gleich $4\,\pi\,\varrho$ und hat die Richtung der durch den Punkt gehenden Normalen der Kugelfläche. Die auf einen der Oberfläche auch noch so nahe liegenden inneren Punkt wirkende Kraft ist aber nach einem vorhergehenden Satze Null.

472. Anziehung auf ein Element der Oberfläche. — Es sei σ die Fläche eines in einem beliebigen Punkte P liegenden unendlich kleinen Elements der Kugelfläche, und es werde in

einem beliebigen zweiten Punkte H der Oberfläche ein kleines Element angenommen, über welchem in P eine Kegelecke ω steht. Die Fläche dieses Elementes wird gleich

Fig. 4.

$$\frac{\omega . \overline{PH}^2}{\cos CHP}$$

sein; dasselbe wird daher das in P liegende Element σ mit einer Kraft anziehen, welche die Richtung HP und die Grösse

$$\frac{\varrho \omega . \varrho \sigma}{\cos CHP} \text{ oder } \frac{\omega}{\cos CHP} \varrho^2 \sigma$$

hat. Nun findet die Gesammtanziehung, welche das in P befindliche Element erleidet, in der Richtung CP statt. Die nach dieser Richtung genommene Componente der von dem Element H ausgeübten Anziehung ist

$$\omega . \varrho^2 \sigma,$$

und da die den verschiedenen Elementen der Kugelfläche entsprechenden Kegel sämmtlich auf derselben Seite der in P an die Kugel gelegten Tangentialebene liegen, so erhalten wir für die Gesammtanziehung, welcher das Element σ unterliegt,

$$2 \pi \varrho^2 \sigma.$$

Aus dem Zusatz zum vorhergehenden Satze ersehen wir, dass diese Anziehung halb so gross als die Kraft ist, welche auf einen der Kugelfläche unendlich nahe liegenden äusseren Punkt ausgeübt werden würde, der ebenso viel Masse wie das Element σ enthielte.

473. **Anziehung einer Kugelfläche, deren Dichtigkeit dem Cubus des Abstandes von einem gegebenen Punkte umgekehrt proportional ist.** — In einigen der wichtigsten elementaren Probleme der Elektricitätstheorie kommen Kugelflächen vor, deren Dichtigkeiten umgekehrt wie die Cuben der Abstände von excentrischen Punkten variiren, und es ist von Wichtigkeit, die Anziehung einer solchen Schale auf einen inneren oder äusseren Punkt zu ermitteln. Dies kann synthetisch auf folgende Weise geschehen. Die Untersuchung ist, wie sich unten zeigen wird, im Wesentlichen dieselbe wie die des § 462 oder § 471.

474. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, in welchem der gegebene Punkt S und der angezogene Punkt P durch die Kugelfläche getrennt sind. Die beiden Figuren 5, 6 stellen die beiden hier möglichen Fälle dar; im ersteren Falle liegt S ausserhalb, P innerhalb, im zweiten P ausserhalb und S innerhalb der

Kugel. Man könnte für beide Fälle buchstäblich denselben Beweis geben; wir wollen jedoch, um die Betrachtung negativer Grössen zu vermeiden, einige der Ausdrücke so modificiren, dass sie besser für die zweite Figur passen. Zwei in dieser Weise zusammengehörende Ausdrücke werden wir unter einander stellen, und zwar wird der obere Ausdruck für die erstere, der untere für die zweite Figur gelten.

Es bezeichne a den Radius der Kugel, und es werde die Entfernung des Punktes S von dem (in den Figuren nicht angegebenen) Mittelpunkt C der Kugel mit f bezeichnet.

Wir verbinden S mit P und nehmen in dieser Geraden (oder in ihrer Verlängerung) einen Punkt T an, so dass

$$\text{(Fig. 5)}\quad SP.ST = f^2 - a^2,$$
$$\text{(Fig. 6)}\quad SP.TS = a^2 - f^2$$

ist. Durch T ziehen wir eine beliebige Gerade, welche die Kugelfläche in K und K' schneidet, verbinden darauf S mit K und K' und verlängern diese Geraden, bis sie die Kugelfläche nochmals in E und E' treffen.

Es werde nun die ganze Kugelfläche in Beziehung auf den Punkt T in Paare entgegengesetzter Elemente eingetheilt. K und K' seien ein Paar solcher Elemente, die an den Endpunkten der Sehne KK' liegen, und über denen im Punkte T die Kegelecke φ steht. Ausserdem nehmen wir die Elemente E und E' an, über denen in S beziehungsweise dieselben Kegelecken wie über den Elementen K und K' stehen. Dadurch können wir die ganze Kugelfläche in Paare conjugirter Elemente E, E' zerlegen; denn es ist leicht ersichtlich, dass wenn wir jedes Paar von Elementen K, K' genommen haben, die daraus hergeleiteten Ele-

Fig. 5.

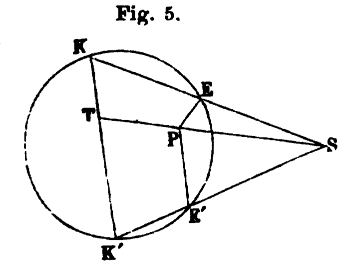
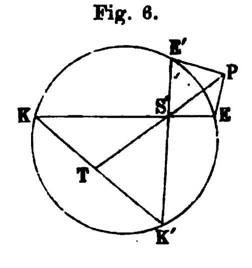


Fig. 6.



mente E, E' die ganze Kugelfläche ausmachen werden, ohne dass ein Theil derselben mehr als einmal genommen wäre. Die auf P ausgeübte Anziehung wird also die Resultante der von allen Elementenpaaren E, E' ausgeübten Anziehungen sein.

Ist nun ϱ die Dichtigkeit im Punkte E, und bezeichnet F d
Anziehung, welche das Element E auf P ausübt, so haben wir

$$F = \frac{\varrho . E}{\overline{EP}^2}.$$

Nach dem gegebenen Dichtigkeitsgesetz soll aber

$$\varrho = \frac{\lambda}{\overline{SE}^3}$$

sein, wo λ eine Constante ist. Da ferner SEK gegen die Kug
oberfläche in den beiden Schnittpunkten gleich geneigt ist, so
halten wir

$$E = \frac{\overline{SE}^2}{\overline{SK}^2} \cdot K = \frac{\overline{SE}^2}{\overline{SK}^2} \cdot \frac{2\,a\,\omega . \overline{TK}^2}{KK'}.$$

und folglich ist

$$F = \frac{\frac{\lambda}{\overline{SE}^3} \cdot \frac{\overline{SE}^2}{\overline{SK}^2} \cdot \frac{2\,a\,\omega . \overline{TK}^2}{KK'}}{\overline{EP}^2} = \lambda \cdot \frac{2\,a}{KK'} \cdot \frac{\overline{TK}^2}{SE . \overline{SK}^2 . \overline{EP}^2} \cdot \omega.$$

Betrachten wir jetzt den grössten Kreis, in welchem eine dur
die Gerade SK gelegte Ebene die Kugel schneidet, so finden w

$$\text{(Fig. 5)} \quad SK . SE = f^2 - a^2,$$
$$\text{(Fig. 6)} \quad KS . SE = a^2 - f^2.$$

Es ist folglich $SK . SE = SP . ST$, und hieraus schliessen wi
dass die Dreiecke KST, PSE ähnlich sind, also

$$TK : SK = PE : SP$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{\overline{TK}^2}{\overline{SK}^2 . \overline{PE}^2} = \frac{1}{\overline{SP}^2},$$

und der Ausdruck für F geht über in

$$F = \lambda \cdot \frac{2\,a}{KK'} \cdot \frac{1}{SE . \overline{SP}^2} \cdot \omega.$$

Bei Benutzung der vorhergehenden Ausdrücke erhält man hieraus

$$\text{(Fig. 5)} \quad F = \lambda \cdot \frac{2\,a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 - a^2)\,\overline{SP}^2} \cdot SK,$$

$$\text{(Fig. 6)} \quad F = \lambda \cdot \frac{2\,a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(a^2 - f^2)\,\overline{SP}^2} \cdot KS.$$

Ebenso ergibt sich, wenn F' die Anziehung bezeichnet, welche K
auf P ausübt,

$$\text{(Fig. 5)}\ F' = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 - a^2)\,\overline{SP}^2} \cdot SK',$$

$$\text{(Fig. 6)}\ F' = \lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(a^2 - f^2)\,\overline{SP}^2} \cdot K'S.$$

Nun sind in den Dreiecken, deren Aehnlichkeit wir nachgeessen haben, die Winkel TKS, EPS einander gleich, und ebenso nn man die Gleichheit der Winkel $SK'T$, SPE' beweisen. Die inkel, welche die beiden Seiten SK, SK' des Dreiecks KSK' mit r dritten Seite bilden, sind also gleich den Winkeln, welche die nie PS mit den Richtungen PE, PE' der beiden auf den Punkt wirkenden Kräfte bildet, und die Seiten SK, SK' verhalten sich einander wie die in den Richtungen PE, PE' genommenen mponenten der Kräfte F, F'. Es folgt daraus nach dem „Dreieck r Kräfte", dass die Resultante von F und F' die Richtung PS t und zu den Componenten in denselben Verhältnissen steht, wie e Seite KK' des Dreiecks zu den beiden anderen Seiten. Die sultante der von den beiden Elementen E und E' auf den Punkt ausgeübten Kräfte ist somit nach S zu gerichtet und gleich

$$\lambda \cdot \frac{2a}{KK'} \cdot \frac{\omega}{(f^2 \backsim a^2)\,\overline{SP}^2} \cdot KK' \text{ oder } \frac{\lambda . 2a . \omega}{(f^2 \backsim a^2)\,\overline{SP}^2}. ^{*)}$$

s ist also auch die Gesammtresultante nach S hin gerichtet, und rch Summation 466) erhalten wir für ihre Grösse den Ausdruck

$$\frac{\lambda . 4\pi a}{(f^2 \backsim a^2)\,\overline{SP}^2}.$$

Wir schliessen daraus, dass die Resultante der auf einen beebigen von S durch die Kugelfläche getrennten Punkt P wirenden Kräfte gleich der Kraft ist, welche eine in S vereinigte lasse von der Grösse $\frac{\lambda . 4\pi a}{f^2 \backsim a^2}$ auf P ausüben würde.

475. Wir wollen jetzt die Attraction bestimmen, wenn die unkte S und P entweder beide ausserhalb, oder beide innerhalb er Kugeloberfläche liegen.

Wird in der Linie CS oder in ihrer Verlängerung über S hinus ein Punkt S_1 so angenommen, dass

$$CS . CS_1 = a^2$$

st, so haben wir nach einem bekannten geometrischen Satze, wenn E ein beliebiger auf der Kugelfläche liegender Punkt ist,

*) $f^2 \backsim a^2$ bedeutet $f^2 - a^2$ oder $a^2 - f^2$, jenachdem $f > a$ oder $a > f$ ist.

$$\frac{SE}{S_1E} = \frac{f}{a}.$$

Es ist folglich

$$\frac{\lambda}{\overline{SE}^3} = \frac{\lambda a^3}{f^3 \cdot \overline{S_1 E}^3}.$$

Ist also ϱ die Dichtigkeit der Elektricität in E, so hat man

$$\varrho = \frac{\frac{\lambda a^3}{f^3}}{\overline{S_1 E}^3} = \frac{\lambda_1}{\overline{S_1 E}^3},$$

wenn

$$\lambda_1 = \frac{\lambda a^3}{f^3}$$

ist. Nach der im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchung findet somit die auf P ausgeübte Attraction in der Richtung nach S_1 zu statt, und ihre Grösse ist dieselbe, wie wenn eine Masse von der Grösse $\frac{\lambda_1 . 4\pi a}{f_1{}^2 \backsim a^2}$ in diesem Punkte concentrirt wäre; darin bezeichnet f_1 die Linie CS_1. Substituiren wir die Werthe von f_1 und

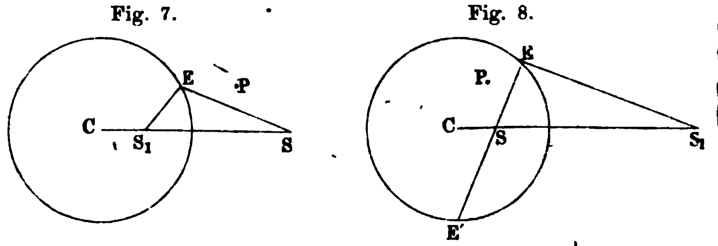


Fig. 7. Fig. 8.

λ_1, nämlich $\frac{a^2}{f}$ und $\frac{\lambda a^3}{f^3}$, so erhalten wir für die Grösse der Masse, die wir uns in S_1 vereinigt zu denken haben, den modificirten Ausdruck

$$\frac{\lambda \frac{a}{f} \cdot 4\pi a}{a^2 \backsim f^2}.$$

476. Eine nicht isolirte Kugel unter der Einwirkung eines elektrischen Punktes. — Wenn eine Kugelfläche so elektrisirt wird, dass die Dichtigkeit der Elektricität dem Kubus des Abstandes von einem inneren Punkte S oder von dem entsprechenden äusseren Punkte S_1 umgekehrt proportional ist, so wird sie jeden äusseren Punkt ebenso anziehen, wie wenn die ganze Elektricität in S vereinigt wäre, und jeden inneren Punkt, wie wenn eine in dem Verhältniss a zu f grössere Elektricitätsmenge sich im Punkte S_1 befände.

Die Dichtigkeit im Punkte E werde wieder mit $\frac{\lambda}{\overline{SE}^3}$ bezeich-
et. Betrachten wir jetzt zwei in E und E' befindliche entgegen-
esetzte Elemente, über denen in S eine Kegelecke ω steht. Da die
'lächen dieser Elemente

$$\frac{\omega\,.\,2a\,.\,\overline{SE}^2}{EE'} \text{ und } \frac{\omega\,.\,2a\,.\,\overline{SE'}^2}{EE'}$$

ind, so ist die Elektricitätsmenge, die sie zusammen enthalten,

$$\frac{\lambda\,.\,2a\,.\,\omega}{EE'}\left(\frac{1}{SE}+\frac{1}{SE'}\right) \text{ oder } \frac{\lambda\,.\,2a\,.\,\omega}{SE\,.\,SE'}.$$

Iun ist bekanntlich $SE\,.\,SE'$ constant und gleich a^2-f^2. Sum-
iren wir daher die Elektricitätsmengen aller Elementenpaare, so
rhalten wir für die ganze Elektricität, die sich auf der Kugel be-
ndet, den Ausdruck

$$\frac{\lambda\,.\,4\pi a}{a^2-f^2}.$$

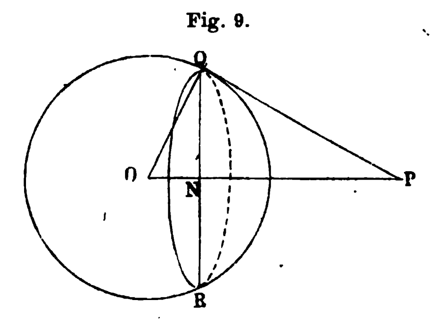
Wird dieser Ausdruck mit m bezeichnet, so verwandeln sich die in
len vorigen Paragraphen hergeleiteten Ausdrücke für die Elektrici-
ätsmengen, die wir uns im Punkte S oder S_1 concentrirt denken
nüssen, je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Kugelfläche
iegt, beziehungsweise in

$$m \text{ und } \frac{a}{f}\,m.$$

477. Directe analytische Berechnung der Attractionen.—
Die directe analytische Lösung der Probleme, wie sie uns hier
beschäftigten, besteht darin, nach § 455 die drei Componenten der
ganzen Attraction als Summe der von den einzelnen materiellen
Punkten des anziehenden Körpers ausgeübten partiellen Attractio-
nen auszudrücken, diese Summen nach den gewöhnlichen Methoden
in bestimmte Integrale zu verwandeln, und die letzteren auszuwer-
then. Eine solche Lösung ist im Allgemeinen nicht so elegant und
einfach wie die weniger directe Lösungsmethode, welche darauf hin-
ausläuft, die potentielle Energie des angezogenen materiellen Punk-
tes in Beziehung auf die von dem anziehenden Körper auf ihn aus-
geübten Kräfte zu bestimmen, eine Methode, die wir alsbald mit
besonderer Sorgfalt entwickeln werden, da sie in den Theorien der
Elektricität und des Magnetismus, wie auch in der Lehre von der
Gravitation von unberechenbarem Werthe ist. Bevor wir aber dazu
übergehen, wollen wir einige Beispiele mittels der directen Methode
behandeln. Wir beginnen mit dem Fall einer Kugelschale.

(a.) **Gleichförmig belegte Kugelschale.** — Es sei P der angezogen Punkt, O der Mittelpunkt der Kugelschale. Eine beliebige zu OP senkrechte Ebene schneide OP in N und die Kugel in dem kleinen Kreise Q. Ferner setzen wir $\angle QOP =$ $OQ = a$, $OP = D$. Da die ganze Attraction offenbar längs PO stattfindet, so können wir von vornherein die Componenten ihrer Theile für diese Richtung nehmen. Der Streifen der Kugelfläche, welcher von den Kreisen begrenzt wird, welche beziehungsweise den Werthen ϑ, $\vartheta + d\vartheta$ des Winkels QO entsprechen, hat die Fläche $2\pi a^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$. Bezeichnet also M die Masse der Schale, so ist die längs PO genommene Componente der Attraction, welche der Streifen auf ausübt,

Fig. 9.



$$\frac{M}{2} \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot \frac{PN}{\overline{PQ}^3}.$$

Es ist aber

$$\overline{PQ}^2 = x^2 = a^2 + D^2 - 2aD\cos\vartheta,$$
$$x\,dx = aD\sin\vartheta\, d\vartheta,$$
$$PN = D - a\cos\vartheta = \frac{x^2 - a^2 + D^2}{2D},$$

folglich die Anziehung des Streifens

$$\frac{M}{4D^2} \frac{x^2 - a^2 + D^2}{a x^2} dx.$$

Bei der Integration haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

(1.) P ist ein äusserer Punkt, d. h. $D > a$. Die Grenzwerthe von sind dann $D - a$ und $D + a$, und die Attraction ist

$$\frac{M}{4D^2}\left[\frac{x}{a} - \frac{D^2 - a^2}{ax}\right]_{D-a}^{D+a} = \frac{M}{D^2},$$

welches Resultat mit dem oben erhaltenen übereinstimmt.

(2.) P ist ein innerer Punkt, d. h. es ist $D < a$. Die Integrationsgrenzen sind dann $a - D$ und $a + D$, und die Attraction ist

$$\frac{M}{4D^2}\left[\frac{x}{a} + \frac{a^2 - D^2}{ax}\right]_{a-D}^{a+D} = 0.$$

(b.) **Attraction einer gleichförmig belegten Kreisscheibe auf einen Punkt ihrer Axe.** — Ein nützlicher Fall ist der der Attraction, welche eine kreisförmige Platte von gleichförmiger Dichtigkeit auf einen in einer Geraden liegenden Punkt ausübt, welche durch den Mittelpunkt der Platte geht und zur Ebene derselben senkrecht ist.

Ist a der Radius der Platte, h ihr Abstand vom angezogenen Punkte und M ihre Masse, so ergibt sich leicht für die Attraction (deren Richtung offenbar senkrecht zur Platte ist) der Ausdruck

$$\frac{M}{a^2}\int_0^a \frac{2\,h\,r\,dr}{(h^2+r^2)^{3/2}} = \frac{2\,M}{a^2}\left\{1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right\}.$$

Bezeichnet ϱ die Flächen-Dichtigkeit der Platte, so geht dieser Ausdruck über in

$$2\,\pi\,\varrho\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right),$$

und für eine unendlich grosse Platte erhält man hieraus als Werth der Attraction

$$2\,\pi\,\varrho.$$

Aus der vorhergehenden Formel lassen sich leicht viele nützliche Resultate herleiten, so z. B. das folgende: —

(c.) **Attraction eines Cylinders auf einen Punkt seiner Axe.** — Ein gleichförmig mit Masse gefüllter Cylinder, dessen Länge l und dessen Basis ein Kreis vom Radius a ist, zieht einen Punkt, der in seiner Axe liegt und von der ihm am nächsten liegenden Grundfläche des Cylinders den Abstand x hat, mit einer Kraft

$$2\pi\,\varrho\int_x^{x+l}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)dh = 2\pi\,\varrho\left\{l - \sqrt{(x+l)^2+a^2} + \sqrt{x^2+a^2}\right\}$$

an. Danach ist die Anziehung, wenn der Cylinder nach einer Richtung hin von unbegrenzter Länge ist,

$$2\,\pi\,\varrho\,(\sqrt{x^2+a^2} - x),$$

und wenn der angezogene Punkt im Mittelpunkt der Grundfläche des unendlich grossen Cylinders liegt (d. h. $x = 0$ ist),

$$2\,\pi\,\varrho\,a.$$

(d.) **Attraction eines geraden Kegels auf einen Punkt am Scheitel.** — Ein gerader Kegel habe die Länge l und am Scheitel den Winkel $2\,\alpha$. Ein in seinem Scheitel befindlicher materieller Punkt wird dann, wie sich aus (b.) leicht ergibt, mit einer Kraft

$$2\,\pi\,\varrho\,l\,(1 - \cos\alpha)$$

angezogen, welcher Ausdruck der Länge der Axe einfach proportional ist.

Es ist leicht, nöthigenfalls den natürlich weniger einfachen Ausdruck für die Attraction zu finden, welche ein beliebiger Punkt der Axe erfährt.

(e.) **Positive und negative Scheiben.** — Ein für magnetische und elektro-magnetische Anwendungen sehr nützlicher Fall ist folgender: —

Es sind zwei gleiche kreisförmige Scheiben gegeben, die zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht stehen. Ihre Massen (§ 461) sind entgegengesetzter Art, d. h. die eine übt eine abstossende, die andere eine anziehende Kraft aus. Man soll ihre Wirkung auf einen beliebigen Punkt jener Verbindungslinie bestimmen.

Ist a der Radius jeder Scheibe, ϱ die Masse, welche sich in der Flächeneinheit befindet, c der Abstand der Scheiben und x die Entfernung des angezogenen Punktes von der ihm zunächst liegenden Scheibe, so ist die Gesammtwirkung offenbar

$$2\pi\varrho\left\{\frac{x+c}{\sqrt{(x+c)^2+a^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right\}.$$

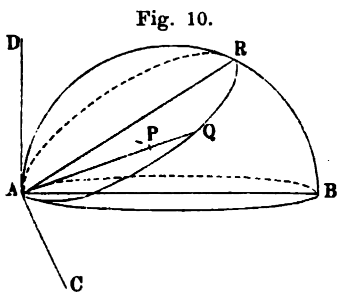
In dem besonderen Falle, in welchem c unbegrenzt abnimmt, geht dieser Ausdruck über in

$$2\pi\varrho c\,\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

478. **Variation der Kraft beim Durchgang durch eine anziehende Oberfläche.** — Es seien P und P' zwei zu beiden Seiten einer Oberfläche, über welche Materie vertheilt ist, einander unendlich nahe liegende Punkte. Die Dichtigkeit der Materie auf der Oberfläche in der Nähe dieser Punkte sei ϱ. Welches dann auch die resultirende Attraction R in P ist, die von der gesammten anziehenden Materie, mag dieselbe auf der Oberfläche oder sonst wo sich befinden, ausgeübt wird, die Resultante R' der auf P' wirkenden Kräfte ist die Resultante einer R gleichen und parallelen Kraft und einer Kraft, welche gleich $4\pi\varrho$ ist und in der Richtung der von P' an die Oberfläche gelegten Normale wirkt. Denn nehmen wir an, PP' sei senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet, eine Voraussetzung, welche die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt, und betrachten eine auf der Oberfläche liegende kreisförmige Scheibe, deren Mittelpunkt in PP' liegt und deren Radius unendlich klein im Vergleich zu den Krümmungsradien der Oberfläche, aber unendlich gross im Vergleich zu PP' ist, so wird diese Scheibe [§ 477, (b.)] P und P' mit entgegengesetzt gerichteten Kräften anziehen, deren jede gleich $2\pi\varrho$ ist und in der Linie PP' wirkt. Daraus ergibt sich die Richtigkeit des Satzes, der in der Theorie der Elektricität von grosser Bedeutung ist.

(a.) **Anziehung einer gleichförmig mit Masse gefüllten Halbkugel auf einen an ihrem Rande befindlichen materiellen Punkt.** Um ein weiteres Beispiel des directen analytischen Verfahrens zu geben, wollen wir die Componenten der Attraction bestimmen, welche eine gleichförmig mit Masse gefüllte Halbkugel auf einen an ihrem Rande befindlichen materiellen Punkt ausübt. Es sei A der materielle Punkt, AB ein Durchmesser der Basis, AC die in A an die Basis gelegte Tangente und AD senkrecht zu AC und AB. Ferner sei RQA ein von einer durch AC gehenden Ebene gebildeter Schnitt, AQ ein beliebiger Radius-Vector dieses Schnittes und P ein Punkt in AQ. Wird dann $AP=r$, $\angle RAQ=\varphi$, $\angle RAB=\vartheta$ gesetzt, so ist das Volumen eines in P liegenden Elementes offenbar

Fig. 10.



$$r\,d\varphi \,.\, r\cos\varphi\, d\vartheta \,.\, dr = r^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta\, dr.$$

Die Attraction, welche die in A befindliche Masseneinheit längs AC erfährt, ist offenbar Null. Längs AB ist dieselbe

$$\varrho \int\!\!\int\!\!\int \cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \cos\varphi \cos\vartheta,$$

wenn dieses Integral zwischen den richtigen Grenzen genommen wird. Die Grenzen von r sind 0 und $2a\cos\vartheta\cos\varphi$, diejenigen von ϑ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$; endlich ist in Beziehung auf φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu integriren. Die Attraction längs AB ist daher gleich $\frac{2}{3}\pi\varrho a$.

Längs AD ist die Attraction

$$\varrho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2a\cos\vartheta\cos\varphi} \cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \cos\varphi \sin\vartheta = \frac{4}{3}\varrho a.$$

(b.) **Aenderung der geographischen Breite durch einen halbkugelförmigen Berg oder ein halbkugelförmiges Thal.** — Auf der Südseite der Basis eines halbkugelförmigen Berges vom Radius a und von der Dichtigkeit ϱ wird daher die wahre Breite (wie sie mittels der Bleischnur oder der Reflexion des Sternlichtes von einer Quecksilberfläche gemessen wird) durch die Attraction des Berges um den Winkel

$$\frac{\frac{2}{3}\pi\varrho a}{G - \frac{4}{3}\varrho a}$$

verringert, wo G die durch dieselben Einheiten ausgedrückte Anziehung der Erde ist. Ist also R der Radius und σ die mittlere Dichtigkeit der Erde, so ist dieser Winkel

$$\frac{\frac{2}{3}\pi\varrho a}{\frac{4}{3}\pi\sigma R - \frac{4}{3}\varrho a}, \text{ oder näherungsweise } \frac{1}{2}\frac{\varrho a}{\sigma R}.$$

Die Breiten zweier nördlich und südlich am Fusse des Berges liegenden Stationen sind mithin um $\frac{a}{R}\left(2 + \frac{\varrho}{\sigma}\right)$ verschieden, während ihr Unterschied $\frac{2a}{R}$ betragen würde, wenn der Berg entfernt würde.

Ebenso wird die Breite eines an der Südseite des Randes eines halbkugelförmigen Thals liegenden Ortes durch die Anwesenheit des Thals um $\frac{1}{2}\frac{\varrho a}{\sigma R}$ vergrössert, wo ϱ die Dichtigkeit der oberen Schichten des Thals ist.

479. Aenderung der Breite durch eine Schlucht. — Wir wollen noch ein merkwürdiges Beispiel der Classe von Fragen geben, die wir jetzt betrachtet haben. Eine sich von Osten nach

Westen hin erstreckende tiefe Schlucht vergrössert die Breite von Orten, die an ihrem Südrande liegen, (annähernd) um den Winkel $\frac{3}{4}\frac{\varrho a}{\sigma R}$, wo ϱ die Dichtigkeit der Erdkruste und a die Breite der Schlucht ist. So wird der Nordrand der Schlucht eine tiefere Breite als der Südrand haben, wenn $\frac{3}{2}\frac{\varrho}{\sigma} > 1$ ist, was der Fall sein könnte, da es Felsen giebt, deren Dichtigkeit $^2/_3 \times 5{,}5$ oder 3,67 mal so gross als die des Wassers ist. In einer beträchtlichen Tiefe in der Schlucht wird diese Aenderung der Breiten nahezu verdoppelt, und dann hat die Südseite die grössere Breite, wenn die Dichtigkeit der Kruste nicht weniger als 1,83 mal so gross als die des Wassers ist.

480. Anziehung einer aus concentrischen Schalen von gleichförmiger Dichtigkeit zusammengesetzten Kugel. — Es ist interessant und für spätere Anwendungen von Nutzen, als besonderen Fall die Anziehung einer aus concentrischen Schichten bestehenden Kugel zu betrachten, bei welcher jede Schicht von gleichförmiger Dichtigkeit ist.

Es sei R der Radius der Kugel und r der Radius einer beliebigen Schicht, welche die Dichtigkeit $\varrho = F(r)$ hat. Bezeichnet dann σ die mittlere Dichtigkeit, so ist

$$\frac{4}{3}\pi\sigma R^3 = 4\pi\int_0^R \varrho r^2 dr,$$

und hieraus lässt sich σ bestimmen.

Für die Attraction G, welche die Kugel an ihrer Oberfläche auf einen in ihr liegenden Punkt P ausübt, erhält man

$$G = 2 \times \frac{2}{3}\pi\sigma R = \frac{4}{3}\pi\sigma R.$$

Ein Punkt, welcher den Abstand r vom Mittelpunkte hat, wird (§§ 462, 471) mit einer Kraft

$$\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \varrho r^2 dr$$

angezogen.

Wenn die Anziehung für alle Punkte innerhalb der Kugel dieselbe sein soll, so ist

$$\int_0^r \varrho r^2 dr = \frac{G}{4\pi} r^2,$$

und hieraus ergibt sich als das erforderliche Dichtigkeitsgesetz

$$\varrho = F(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{G}{r} \cdot$$

Wenn die Dichtigkeit der oberen Schicht τ ist, so ist die Attraction in einer im Vergleich zum Radius kleinen Tiefe h

$$\frac{4}{3} \pi \sigma_1 (R - h) = G_1,$$

wo σ_1 die mittlere Dichtigkeit des Kerns ist, welcher übrig bleibt, wenn man eine Schicht von der Dicke h von der Kugel fortnimmt. Offenbar ist auch

$$\frac{4}{3} \pi \sigma_1 (R - h)^3 + 4\pi\tau (R - h)^2 h = \frac{4}{3} \pi \sigma R^3,$$

oder

$$G_1 (R - h)^2 + 4\pi\tau (R - h)^2 h = G R^2,$$

folglich

$$G_1 = G\left(1 + \frac{2h}{R}\right) - 4\pi\tau h.$$

Danach ist die Attraction in einer Tiefe h dieselbe wie an der Oberfläche, wenn

$$\frac{G}{R} = \frac{4}{3} \pi \sigma = 2\pi\tau$$

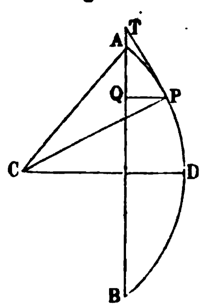
ist.

481. Wir fügen noch einige andere einfache Fälle hinzu, da ihre Resultate uns späterhin von Nutzen sein werden.

(a.) **Anziehung eines gleichförmig belegten Kreisbogens.** — Ein Kreisbogen AB von gleichförmiger Dichtigkeit zieht einen im Mittelpunkt C des Kreises liegenden materiellen Punkt mit einer Kraft an, deren Richtung offenbar mit der den Bogen halbirenden Geraden CD zusammenfällt. Auch ist die CD parallele Componente der Attraction, welche ein in P befindliches Element ausübt, gleich

$$\frac{\text{Masse des in } P \text{ liegenden Elementes}}{\overline{CD}^2} \cdot \cos PCD.$$

Fig. 11.



Nehmen wir nun an, die Sehne AB sei von derselben Dichtigkeit wie der Bogen, so können wir für das Product (Masse des in P liegenden Elementes $\times \cos PCD$) die Masse der Projection Q dieses Elementes auf AB setzen; denn wenn PT die in P an den Bogen gelegte Tangente ist, so ist $\angle PTQ = \angle PCD$.

Die längs CD wirkende Attraction ist daher

$$= \frac{\text{Summe der Projectionen der Elemente des Bogens}}{\overline{CD}^2}$$

$$= \frac{\varrho \,.\, AB}{\overline{CD}^2} \cdot$$

wenn ϱ die Dichtigkeit des gegebenen Bogens ist, oder endlich

$$=\frac{2\varrho \, . \, sin \; ACD}{CD}.$$

Die Attraction ist also gleich derjenigen einer im Punkte D concentrirten Masse, welche gleich der Masse ist, die die Sehne enthalten würde, wenn sie dieselbe Dichtigkeit wie der Bogen hätte.

(b.) **Anziehung einer geraden Linie.** — Weiter lässt sich zeigen, dass eine begrenzte gerade Linie von gleichförmiger Dichtigkeit einen beliebigen nicht in ihr liegenden Punkt in derselben Richtung und mit derselben Kraft anzieht, wie der entsprechende Bogen eines Kreises von gleicher Dichtigkeit, welcher den Punkt zum Mittelpunkt hat und die gerade Linie berührt.

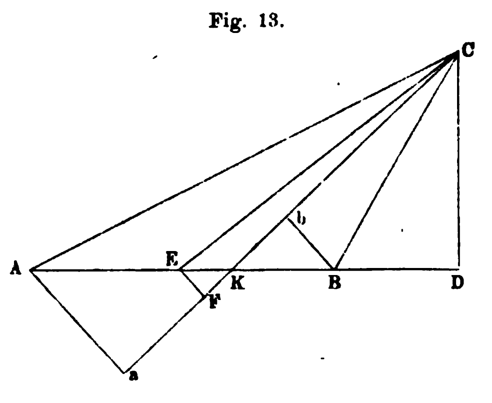
Fig. 12.

Ziehen wir nämlich die Gerade CpP, welche den Kreis in p und die gegebene gerade Linie in P schneidet, so verhält sich das in p liegende Element zu dem in P befindlichen, wie Cp zu $CP \cdot \frac{CP}{CD}$, d. h. wie $\overline{Cp}^2$ zu $\overline{CP}^2$. Folglich ziehen diese Elemente den Punkt C mit gleicher Kraft und in derselben Richtung an, und die Attraction, welche die Gerade AB auf C ausübt, ist gleich der Attraction des Bogens ab auf denselben Punkt. Nach dem letzten Satze ist die Richtung, in welcher diese Attraction stattfindet, die Halbirungslinie des Winkels ACB und gleich

$$\frac{2\varrho}{CD} \cdot sin \; \frac{1}{2} \; ACB.$$

(c.) Man kann dies noch auf andere nützliche Formen bringen: — Es möge CKF den Winkel ACB halbiren und Aa, Bb, EF von den Enden und dem Mittelpunkte von AB auf CF senkrecht gezogen sein. Dann ist

Fig. 13.



$$sin \; KCB$$
$$=\frac{KB}{CB} \; sin \; CKD$$
$$=\frac{AB}{AC+CB} \; \frac{CD}{CK}.$$

Die Attraction, welche längs CK wirkt, ist folglich

$$(1)\qquad \frac{2\varrho AB}{(AC+CB)\,CK} = \frac{\varrho AB}{2(AC+CB)\,(\overline{AC+CB}^2 - \overline{AB}^2)} \cdot CF.$$

Denn man hat offenbar

$$bK:Ka = BK:KA = BC:CA = bC:Ca,$$

d. h. ab ist aussen in C und innen in K in demselben Verhältniss getheilt. Daraus ergibt sich

$$KC.CF = aC.Cb = \frac{1}{4}\left\{\overline{AC+CB}^2 - \overline{AB}^2\right\},$$

und dies liefert die Formel (1).

(d.) CF ist offenbar die im Punkte C gezogene Tangente einer Hyperbel, welche durch C geht und A und B zu Brennpunkten hat. Wird also in einer beliebigen durch AB gehenden Ebene eine beliebige Hyperbel beschrieben, die A und B zu Brennpunkten hat, so wird sie in Beziehung auf die Attraction der Geraden AB eine Kraftlinie sein, d. h. eine Curve, welche in jedem Punkte die Richtung der Attraction anzeigt. Wir werden später auf diesen Begriff zurückkommen.

(e.) Wenn ebenso um A und B als Brennpunkte ein durch C gehendes verlängertes Sphäroid beschrieben wird, so ist CF offenbar die Normale in C; die auf den in C befindlichen materiellen Punkt wirkende Kraft ist also gegen das Sphäroid senkrecht gerichtet, und der Punkt würde somit auf der Oberfläche im Gleichgewicht bleiben, selbst wenn dieselbe glatt wäre. Es ist diese Oberfläche ein Beispiel der Flächen constanten Potentials, die auch Gleichgewichts- oder Niveauflächen genannt werden, und mit denen wir uns alsbald ausführlich beschäftigen werden.

(f.) Weiter können wir durch eine einfache Anwendung des vorhergehenden Satzes beweisen, dass die Kraftlinien für die Attraction zweier in den Verlängerungen von AB liegenden unendlich langen Stäbe, von denen der eine eine anziehende, der andere eine abstossende Wirkung ausübt, die Schaar der um die Enden A und B als Brennpunkte beschriebenen Ellipsen sind, während die Gleichgewichtsflächen durch die Rotation der confocalen Hyperbeln erzeugt werden.

482. Das Potential. — Da das Potential nicht nur in der Theorie der Gravitation, sondern auch in der Theorie der Elektricität, des Magnetismus, der Bewegung von Flüssigkeiten, der Wärmeleitung, u. s. w. von hervorragendster Bedeutung ist, so wollen wir seine wichtigsten Eigenschaften hier erforschen.

483. Laplace hat diese Function in die Theorie der Gravitation eingeführt. Den Namen Potential hat ihr aber zuerst Green gegeben, den man fast als den Schöpfer der Theorie, wie wir sie jetzt haben, ansehen kann. Green's Werk blieb bis 1846 unbeachtet, und so wurden die meisten der wichtigen Sätze, die es enthält, während dieser Zeit von Gauss, Chasles, Sturm und Thomson zum zweiten Male entdeckt.

Wir haben in § 273 die potentielle Energie eines conser-

vativen Systems für eine beliebige Configuration definirt. Wenn die in Frage stehenden Kräfte wirklich oder scheinbar fernwirkende sind, wie die Gravitation, die Anziehungen oder Abstossungen elektrischen oder magnetischen Ursprungs, so empfiehlt es sich im Allgemeinen, als die Configuration, in der man die potentielle Energie gleich Null rechnet, diejenige zu wählen, in welcher die betreffenden Körper sich in unendlichem Abstande von einander befinden. Wir gelangen dann zu folgender Definition: —

484. Die wechselseitige potentielle Energie zweier Körper, welche eine beliebige Lage relativ zu einander einnehmen, ist die Grösse der Arbeit, die man aus ihrer gegenseitigen Abstossung erlangen kann, wenn man ihnen gestattet, sich unendlich weit von einander zu entfernen. Wenn die Körper einander anziehen, wie es z. B. der Fall ist, wenn keine Kraft ausser der Gravitation wirkt, so ist nach der jetzt getroffenen Uebereinkunft hinsichtlich des Nullpunkts ihre wechselseitige potentielle Energie negativ, oder (§ 547) ihre Erschöpfung an potentieller Energie positiv.

485. Das Potential (in dieser Anwendung von Gauss die Potentialfunction genannt) eines beliebigen anziehenden oder abstossenden Körpers oder einer beliebig vertheilten Masse in einem Punkte ist die wechselseitige potentielle Energie dieser Masse und einer in diesem Punkte befindlichen Masseneinheit. Im Falle der Gravitation ist es zweckmässig, um das Potential nicht als eine negative Grösse definiren zu müssen, das Vorzeichen zu ändern. Das Gravitations-Potential einer Masse in einem Punkte ist danach die Grösse der Arbeit, die erfordert wird, um eine Masseneinheit aus jenem Punkte unendlich weit fortzubewegen.

486. Anwendung des Potentials zum Ausdruck einer Kraft. — Ist also V das Potential in einem beliebigen Punkte P und V_1 dasjenige in einem benachbarten Punkte Q, so folgt aus der obigen Definition unmittelbar, dass $V - V_1$ die Grösse der Arbeit ist, die erfordert wird, um eine unabhängige Masseneinheit von P nach Q zu bewegen. Es ist nützlich zu bemerken, dass $V - V_1$ von der Gestalt des zwischen diesen beiden Punkten gewählten Weges ganz und gar unabhängig ist; denn wir erhalten dadurch schon eine Vorstellung von der Herrschaft, welche uns diese Art der Darstellung über die betreffenden Begriffe verleiht.

Nehmen wir an, Q liege so nahe an P, dass die Kräfte, mit welcher eine in diesen Punkten, folglich auch in jedem Punkte der Linie PQ befindliche Masseneinheit angezogen wird, als gleich und parallel angesehen werden können. Stellt dann F die längs PQ

wirksame Componente der Attraction dar, so ist $F.PQ$ die Arbeit, die erfordert wird, um die Einheit der Masse von P nach Q zu bringen. Es ist also

$$V - V_1 = F.PQ,$$

oder

$$F = \frac{V - V_1}{PQ},$$

d. h. die nach irgend einer Richtung PQ genommene Componente der auf die in P befindliche Einheit der Masse ausgeübten Attraction ist die Zunahme des Potentials in P längs der Linie PQ, berechnet für die Längeneinheit.

487. Oberflächen constanten Potentials. — Eine Oberfläche, bei welcher das Potential in jedem Punkte denselben Werth hat, und die deshalb eine Oberfläche constanten Potentials genannt wird, hat die Eigenschaft, dass die Richtung der Attraction überall mit der Richtung der Normalen zusammenfällt. Denn längs der Oberfläche ändert sich der Werth des Potentials in keiner Richtung, und daher ist in keiner solchen Richtung eine Kraft thätig. Wenn also der angezogene Punkt auf eine solche Oberfläche gesetzt wird (die wir als glatt und starr voraussetzen), so wird er in jeder Lage in Ruhe bleiben; die Oberfläche wird daher auch wohl eine Gleichgewichtsoberfläche genannt. Wir werden später sehen, dass in einem Punkte der freien Oberfläche einer Flüssigkeit die Kraft immer die Richtung der Normalen hat; aus diesem Grunde gebraucht man statt der beiden angegebenen Ausdrücke oft auch den Ausdruck Niveau-Fläche.

488. Intensität der Kraft in verschiedenen Punkten einer Oberfläche constanten Potentials. — Wenn man für eine Reihe nahe aneinander liegender und gleich weit von einander entfernter Werthe des Potentials die zugehörige Schaar Gleichgewichtsflächen construirt, so erhellt aus § 486, dass die Attraction in jedem Punkte dem Normalabstande der beiden Oberflächen, zwischen denen der Punkt enthalten ist, umgekehrt proportional sein wird; denn der Zähler des Ausdrucks für F ist in diesem Falle constant.

489. Kraftlinie. — Eine von einem beliebigen Anfangspunkte aus gezogene Linie, deren Tangente in jedem Punkte dieselbe Richtung, wie die Attraction in diesem Punkte hat, wird eine Kraftlinie genannt; sie schneidet jede Oberfläche constanten Potentials, die sie trifft, offenbar unter rechten Winkeln.

Die Gültigkeit der drei letzten Paragraphen ist von dem Attractionsgesetz ganz unabhängig; im Folgenden dagegen beschränken

wir uns auf das Gesetz des umgekehrten Quadrates der Entfernung.

490. Variation der Intensität längs einer Kraftlinie. — Wenn durch jeden Punkt der Umgrenzung eines unendlich kleinen Theils einer Fläche constanten Potentials die entsprechenden Kraftlinien gezogen werden, so erhalten wir offenbar eine röhrenförmige Oberfläche von unendlich kleinem Schnitte. In jedem Punkte innerhalb einer solchen Röhre ist, so lange dieselbe durch keinen anziehende Masse enthaltenden Theil des Raumes führt, die nach einer beliebigen Richtung genommene Componente der Kraft umgekehrt proportional dem Durchschnitt der Röhre mit einer Ebene, welche durch den Punkt hindurchgeht und zu der gegebenen Richtung senkrecht ist. Oder einfacher, die ganze Kraft hat in jedem Punkte die Richtung der Tangente der Röhre und ist dem Querschnitt derselben umgekehrt proportional, und hieraus ergiebt sich, wie man leicht sieht, der obige allgemeinere Ausspruch.

Derselbe ist eine unmittelbare Folge eines wichtigen Satzes, den wir später (§ 492) beweisen werden. Das Flächenintegral der von einer beliebig vertheilten Materie in der Richtung der Normalen eines jeden Punktes irgend einer geschlossenen Fläche ausgeübten Attraction ist $4\pi M$; darin ist M die Grösse der innerhalb der Oberfläche befindlichen Masse, und die Attraction wird in jedem Punkte der Fläche als positiv oder als negativ angesehen, je nachdem sie daselbst nach innen oder nach aussen zu gerichtet ist.

Denn in dem vorliegenden Falle verschwindet die zu dem röhrenförmigen Theil der Oberfläche senkrechte Kraft, und wir brauchen nur die Enden zu betrachten. Wenn sich innerhalb des betrachteten Theils der Röhre keine der anziehenden Massen befindet, so erhalten wir leicht

$$F\varpi - F'\varpi' = 0,$$

wo F die Kraft in jedem Punkte des Schnittes bezeichnet, dessen Fläche ϖ ist. Diese Gleichung ist mit der berühmten Laplace'schen Gleichung [Anhang B (a) und unten § 491 (c)] äquivalent.

Wenn der anziehende Körper um einen Punkt herum symmetrisch ist, so sind die Kraftlinien offenbar von diesem Punkte ausgehende Geraden. Folglich ist die Röhre in diesem Falle ein Kegel und ϖ nach § 469 dem Quadrate des Abstandes vom Scheitel proportional. Für Punkte, welche ausserhalb der anziehenden Masse liegen, ist danach F dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional.

Wenn die Masse in unendlich langen cylindrischen Schichten symmetrisch um eine Axe vertheilt ist, so sind die Kraftlinien offenbar zur Axe senkrecht. Die Röhre wird also ein Keil, und da der Schnitt eines solchen dem Abstand von der Axe proportional ist, so ist die Attraction dem Abstand von der Axe umgekehrt proportional.

Wenn die Masse in unbegrenzte parallele Ebenen vertheilt ist, deren jede von gleichförmiger Dichtigkeit ist, so sind die Kraftlinien offenbar zu diesen Ebenen senkrecht; die Röhre wird also ein Cylinder, und da der Schnitt eines solchen von constanter Grösse ist, so ist die Kraft in allen Entfernungen dieselbe.

Wenn eine unendlich kleine Länge l des betrachteten Theils der Röhre durch eine Materie von der Dichtigkeit ϱ hindurchgeht, und ω die Fläche des Schnittes der Röhre in diesem Theile ist, so erhalten wir

$$F\varpi - F'\varpi' = 4\pi l \omega \varrho.$$

Dies ist der Poisson'schen Erweiterung der Laplace'schen Gleichung [§ 491 (c)] äquivalent.

491. Potential eines anziehenden Punktes. — Bei der Berechnung der Arbeit, welche gegen eine dem Quadrate des Abstandes von einem festen Punkte umgekehrt proportionale Kraft geleistet wird, hat man als die mittlere Kraft das geometrische Mittel der am Anfang und am Ende der Bahn wirkenden Kräfte anzusehen. Was den zweiten Factor des Ausdrucks für die Arbeit, die Grösse des Weges, betrifft, so ist dieselbe ganz unabhängig von der eingeschlagenen Bahn und einfach die Differenz der Abstände von dem anziehenden Punkte. Die auf irgend einer Bahn geleistete Arbeit ist danach gleich dem Product aus der Differenz der Abstände der Endpunkte von dem anziehenden Punkte in das geometrische Mittel der an den Endpunkten wirkenden Kräfte; oder wenn O der anziehende Punkt und m die Kraft ist, welche er auf eine in der Einheit der Entfernung befindliche Einheit der Masse ausübt, so ist die Arbeit, die er leistet, während er eine Masseneinheit aus einer beliebigen Lage P in eine beliebige andere Lage P' bewegt, gleich

$$(OP' - OP)\sqrt{\frac{m^2}{\overline{OP}^2 . \overline{OP'}^2}}, \text{ oder } \frac{m}{OP} - \frac{m}{OP'}.$$

Dies zu beweisen, hat man nur zu bemerken, dass für jeden unendlich kleinen Schritt der Bewegung der in Rede stehende Weg offenbar die Differenz der Abstände vom Mittelpunkt ist, und dass man für die arbeitende Kraft die Kraft an einem der beiden End-

punkte, oder auch einen beliebigen mittleren Werth, z. B. das geometrische Mittel nehmen kann. Der vorstehende Ausdruck ist also für jeden solchen Theil der Bewegung richtig, und wenn man, um die auf einer beliebigen Bahn von endlicher Grösse geleistete Gesammtarbeit zu bestimmen, alle den unendlich kleinen Theilen der Bewegung entsprechenden Ausdrücke der Arbeit summirt, so erkennt man die allgemeine Gültigkeit des gegebenen Ausdrucks.

Potential einer beliebigen Masse. — Mit Rücksicht hierauf folgt aus § 485, dass eine in O befindliche Masse m in P das Potential $\frac{m}{OP}$ hat, dass man also, um das Potential einer beliebigen Masse für den Punkt P zu erhalten, jedes Massentheilchen durch seinen Abstand von P zu dividiren und alle so erhaltenen Quotienten zu addiren hat.

Analytische Bestimmung des Werthes des Potentials. — (a.) Um diese Sätze analytisch zu beweisen, betrachten wir zuerst zwei materielle Punkte O und P, welche beziehungsweise die Massen m und Eins und die Coordinaten a, b, c; x, y, z haben. Ihr Abstand sei D, also

$$D^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Die Componenten ihrer wechselseitigen Anziehung sind

$$X = -m\frac{x-a}{D^3},\quad Y = -m\frac{y-b}{D^3},\quad Z = -m\frac{z-c}{D^3};$$

die Arbeit, die erfordert wird, um P ins Unendliche fortzurücken, ist daher

$$+m\int\frac{(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz}{D^3}$$

$$= +m\int\frac{dD}{D^2},$$

oder, da die obere Grenze $D = \infty$ ist, gleich

$$+\frac{m}{D}.$$

In diesem Falle ist also die wechselseitige potentielle Energie das Product der Massen, dividirt durch ihre Entfernung von einander, und das Potential von m im Punkte x, y, z ist $\frac{m}{D}$.

Ist weiter mehr als ein fester materieller Punkt m vorhanden, so zeigt uns dieselbe Betrachtung, dass das Potential in x, y, z gleich

$$\Sigma\left(\frac{m}{D}\right)$$

ist; und wenn diese materiellen Punkte eine continuirliche Masse bilden, welche in a, b, c die Dichtigkeit ϱ hat, so erhalten wir für das Potential natürlich den Ausdruck

$$\iiint\varrho\frac{da\,db\,dc}{D};$$

die Grenzen dieses Integrals hängen von der Form der Masse ab.

Ausdruck der Kraftcomponenten. — Bezeichnet V das Potential in einem beliebigen Punkte P (x, y, z), so ergibt sich aus der Art, wie wir den Werth von V bestimmt haben, dass die Componenten der auf die Einheit der Materie in P ausgeübten Attraction folgende sind:

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz}.$$

Die längs einer beliebigen Curve, deren Bogen s ist, genommene Componente der Kraft ist demnach

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}$$
$$= \frac{dV}{ds}.$$

Alle diese Ergebnisse sind offenbar ganz unabhängig von der Frage, ob P innerhalb der anziehenden Masse liegt oder nicht.

(b.) Wenn die anziehende Masse eine Kugel ist, welche den Mittelpunkt a, b, c und die Dichtigkeit ϱ hat, und wenn P innerhalb ihrer Oberfläche liegt, so erhalten wir, da die äussere Schale keine Wirkung ausübt,

$$X = \frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3}\pi\varrho D^3\cdot\frac{x-a}{D^3}$$
$$= -\frac{4}{3}\pi\varrho(x-a).$$

Hieraus folgt

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4}{3}\pi\varrho.$$

(c.) **Laplace's Gleichung. Poisson's Erweiterung derselben.** — Ist jetzt allgemein

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

so erhalten wir, wie oben [Anhang B (g), (14)] bewiesen wurde,

$$\nabla^2\frac{1}{D} = 0.$$

Denn es ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{D}\right) = -\frac{x-a}{D^3}.$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{D}\right) = -\frac{1}{D^3} + \frac{3(x-a)^2}{D^5},$$

und hieraus und aus den ähnlichen Ausdrücken für die zweiten Differentialquotienten nach y und z folgt der Satz unmittelbar.

Da nun

$$V = \int\int\int\varrho\frac{da\,db\,dc}{D}$$

und ϱ von x, y, z unabhängig ist, so sehen wir, dass, so lange D nicht innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet, d. h. so lange P nicht ein Punkt der anziehenden Masse ist,

$$\nabla^2 V = 0,$$

oder, in Ausdrücken der Componenten der Kraft,

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

sein wird.

Wenn P innerhalb der anziehenden Masse liegt, so denken wir uns eine kleine Kugel so beschrieben, dass sie P in sich schliesst, und theilen das Potential in zwei Theile, dasjenige der Kugel, V_1, und dasjenige des übrigen Theils des Körpers, V_2. Dann zeigt uns der obige Ausdruck, dass

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

ist. Ferner liefern die Ausdrücke für $\frac{d^2V}{dx^2}$, u. s. w., die wir im Falle einer Kugel (b) erhalten haben,

$$\nabla^2 V_1 = -4\pi\varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Kugel ist.

Da nun

$$V = V_1 + V_2$$

ist, so ergibt sich

$$\nabla^2 V = -4\pi\varrho.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung des Potentials; sie umfasst auch den Fall, in welchem P sich ganz ausserhalb der anziehenden Masse befindet, da dann $\varrho = 0$ ist. Führen wir in die Gleichung die Componenten der Kraft ein, so geht sie über in

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varrho.$$

(d.) Die vorhergehenden wichtigen Gleichungen liefern uns die Mittel, mehrere der früher erhaltenen Resultate zu bewahrheiten und einige neue hinzuzufügen.

Potential einer in concentrischen Kugelschalen von gleichförmiger Dichtigkeit vertheilten Masse. — Wir wollen z. B. die Attraction bestimmen, welche eine aus concentrischen Schichten, deren jede von gleichförmiger Dichtigkeit ist, bestehende Hohlkugel auf einen äusseren, d. h. der anziehenden Masse nicht angehörenden Punkt P ausübt. In diesem Falle muss V der Symmetrie wegen bloss von dem Abstande vom Mittelpunkt der Kugel abhängen. Dieser Mittelpunkt werde zum Coordinatenanfangspunkt genommen, und es sei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dann ist V nur eine Function von r, folglich

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{x^2}{r^3}\frac{dV}{dr} + \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2},$$

und

$$\nabla^2 V = \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2}.$$

Es ist also, wenn P ausserhalb der Kugel oder in der von ihr eingeschlossenen Höhlung liegt,

$$\frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = 0.$$

Ein erstes Integral dieser Gleichung ist

$$r^2\frac{dV}{dr} = C.$$

Für einen ausserhalb der Kugelschale liegenden Punkt hat C einen endlichen Werth und zwar, wie man leicht sieht, den Werth $-M$, wo M die Masse der Schale ist.

Für einen in der Höhlung liegenden Punkt ist $C = 0$; denn offenbar wird auf den Mittelpunkt keine Anziehung ausgeübt, d. h. im Mittelpunkt ist gleichzeitig $r = 0$ und $\frac{dV}{dr} = 0$; folglich ist für keinen Punkt der Höhlung Attraction vorhanden.

Die offenbare Discontinuität dieser Lösung darf uns nicht überraschen. Sie rührt aus der Discontinuität der gegebenen Massen-Vertheilung her. So geht aus § 491 (c) hervor, dass die richtige allgemeine Gleichung für das Potential nicht die oben genommene, sondern

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\varrho$$

ist; darin hat ϱ, die Dichtigkeit der Materie im Abstande r vom Mittelpunkt, den Werth Null, wenn r kleiner als der Radius a der Höhlung ist; einen endlichen Werth σ, den wir der Einfachheit wegen als constant ansehen wollen, wenn $r > a$ und zugleich $<$ als der Radius a' der äussersten Grenzfläche der Hohlkugel ist; endlich wieder den Werth Null für alle Werthe von r, die grösser als a' sind. Wir erhalten somit, wenn wir von $r = 0$ bis zu einem beliebigen Werthe $r = r$ integriren $\left(\text{da } r^2\frac{dV}{dr} = 0, \text{ wenn } r = 0\right)$

$$r^2\frac{dV}{dr} = -4\pi\int_0^r \varrho r^2\,dr = -M_1,$$

wo M_1 die innerhalb der Kugelfläche vom Radius r befindliche Gesammtmasse bezeichnen möge. M_1 ist eine unstetige Function von r, und zwar ist

$$M_1 = 0 \qquad \text{von } r = 0 \text{ bis } r = a,$$

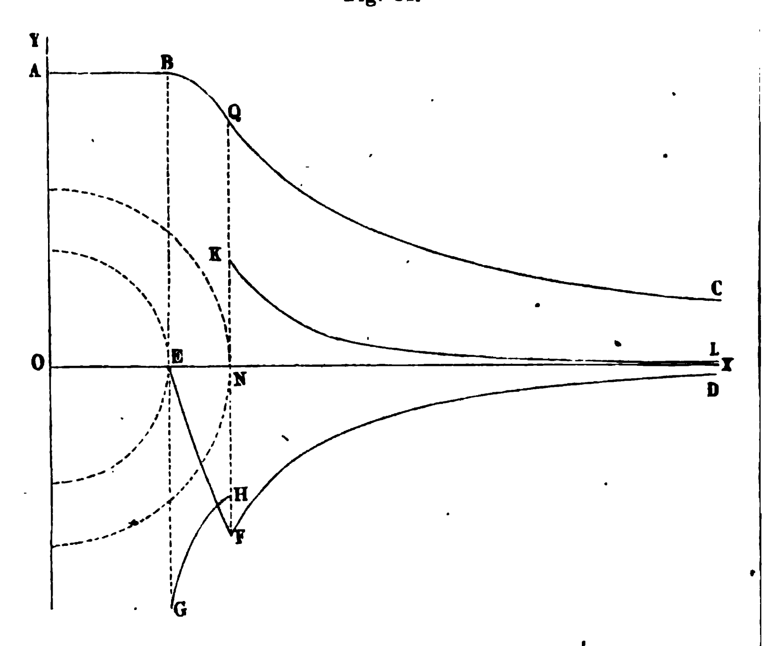
$$M_1 = \frac{4\pi\sigma}{3}(r^3 - a^3) \text{ von } r = a \text{ bis } r = a',$$

$$M_1 = \frac{4\pi\sigma}{3}(a'^3 - a^3) \text{ von } r = a' \text{ bis } r = \infty.$$

Wir haben diesen Fall so eingehend betrachtet, weil solche offenbare Anomalien in der analytischen Lösung physikalischer Fragen sehr gewöhnlich sind. Um die Sache noch deutlicher zu machen, fügen wir eine graphische Darstellung der Werthe von V, $\frac{dV}{dr}$, $\frac{d^2V}{dr^2}$ für diesen Fall

bei. V wird durch die Curve $ABQC$ dargestellt, die von A bis B eine gerade Linie ist, in Q einen Inflexionspunkt hat, aber durchaus stetig ist und nie plötzlich die Richtung ändert. $\frac{dV}{dr}$ wird durch $OEFD$ dargestellt; es ist dies eine stetige Curve, die aber zweimal plötzlich ihre

Fig. 14.



Richtung ändert. Die Curve, welche $\frac{d^2 V}{dr^2}$ darstellt, besteht aus drei nicht zusammenhängenden Theilen OE, GH, KL.

(e.) **Gerade Cylinder von gleichförmiger Dichtigkeit und unendlicher Länge, deren Axen zusammenfallen.** — Wenn eine Masse in unendlich lange concentrische Cylinderschichten vertheilt ist, deren jede eine gleichförmige Dichtigkeit hat, und wenn die Axe der Cylinder zur z-Axe genommen wird, so muss V offenbar nur eine Function von $x^2 + y^2$ sein.

Es ist daher $\frac{dV}{dz} = 0$, d. h. die Attraction ist ganz senkrecht zur Axe gerichtet.

Ferner ist auch $\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$, folglich nach (d)

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\varrho.$$

Hieraus ergibt sich

$$r \frac{dV}{dr} = C - 4\pi \int \varrho r \, dr,$$

aus welcher Gleichung sich Schlüsse ziehen lassen, die den obigen ganz ähnlich sind.

(f.) **Unendlich grosse parallele Ebenen von gleichförmiger Dichtigkeit.** — Wenn endlich die Masse in unendliche parallele Ebenen vertheilt ist, deren jede von gleichförmiger Dichtigkeit und zur x-Axe senkrecht ist, so muss die resultirende Kraft dieser Richtung parallel, d. h. $Y = 0$, $Z = 0$, folglich

$$\frac{dX}{dx} = -4\pi\varrho$$

sein, welche Gleichung, wenn ϱ als Function von x gegeben ist, vollständig integrirt werden kann.

In einem Punkte, in welchem sich keine Masse befindet, ist $\varrho = 0$, folglich

$$X = C,$$

oder die Attraction ist in allen Abständen dieselbe, ein Resultat, das sich mittels der directen Methoden leicht bewahrheiten lässt.

Wenn die Masse aus einer unendlichen ebenen Schicht von der Dicke t und von der constanten Dichtigkeit ϱ besteht, so ist, vorausgesetzt dass der Anfangspunkt der Coordinaten in der Mitte zwischen den beiden Grenzflächen der Schicht angenommen wird,

$$X = C - 4\pi\varrho x,$$

so lange x zwischen $+\frac{t}{2}$ und $-\frac{t}{2}$ liegt. Für $x = 0$ muss aber offenbar $X = 0$ sein; folglich ist $C = 0$, also

$$X = -4\pi\varrho x.$$

Ausserhalb der Schicht ist $X = C_1$ (da dann $\varrho = 0$ ist). Auf der positiven Oberfläche und über dieselbe hinaus ist überall $C_1 = -2\pi\varrho t$, auf der negativen Fläche und über dieselbe hinaus $C_1 = +2\pi\varrho t$. Die Differenz dieser Werthe ist $-4\pi\varrho t$ (§ 478).

(g.) **Oberfläche constanten Potentials.** — Da in jedem Falle $\frac{dV}{ds}$ die nach der Richtung der Tangente des Bogens s genommene Componente der Attraction ist, so sehen wir, dass die Attraction ganz senkrecht zum Bogen ist, wenn man

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

oder

$$V = C$$

hat. Es ist dies die Gleichung einer Fläche constanten Potentials.

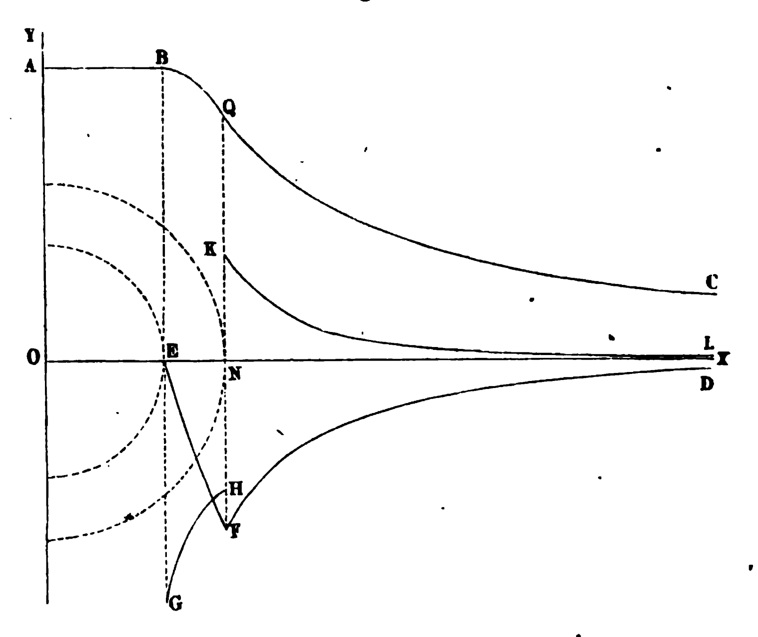
Ist n die nach auswärts gemessene Normale einer solchen Fläche, so ist die in einem beliebigen Punkte wirkende Gesammtattraction offenbar

$$\frac{dV}{dn},$$

und ihre Richtung ist diejenige, in welcher V zunimmt.

bei. V wird durch die Curve $ABQC$ dargestellt, die von A bis B eine gerade Linie ist, in Q einen Inflexionspunkt hat, aber durchaus stetig ist und nie plötzlich die Richtung ändert. $\frac{dV}{dr}$ wird durch $OEFD$ dargestellt; es ist dies eine stetige Curve, die aber zweimal plötzlich ihre

Fig. 14.



Richtung ändert. Die Curve, welche $\frac{d^2V}{dr^2}$ darstellt, besteht aus drei nicht zusammenhängenden Theilen OE, GH, KL.

(e.) **Gerade Cylinder von gleichförmiger Dichtigkeit und unendlicher Länge, deren Axen zusammenfallen.** — Wenn eine Masse in unendlich lange concentrische Cylinderschichten vertheilt ist, deren jede eine gleichförmige Dichtigkeit hat, und wenn die Axe der Cylinder zur z-Axe genommen wird, so muss V offenbar nur eine Function von $x^2 + y^2$ sein.

Es ist daher $\frac{dV}{dz} = 0$, d. h. die Attraction ist ganz senkrecht zur Axe gerichtet.

Ferner ist auch $\frac{d^2V}{dz^2} = 0$, folglich nach (d)

$$\nabla^2 V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\varrho.$$

Hieraus ergibt sich

$$r \frac{dV}{dr} = C - \ldots$$

.. welcher Gleichung sich Schlüsse z..
..nlich sind.

(f.) **Unendlich grosse paral..** ..**ichtigkeit.** — Wenn endlich di..
ertheilt ist, deren jede von gl..
..nkrecht ist, so muss die resultir..
$Y = 0, \quad Z = 0$, folglich

$$\frac{dX}{d\ldots}$$

..in, welche Gleichung, wenn ..
..ig integrirt werden kann.

In einem Punkte, in w..
..glich

..er die Attraction ist in
..ittels der directen M..
Wenn die Masse a..
..und von der consta..
.. Anfangspunkt d..
..flächen der S..

.. lange x zwis..
.. $= 0$ se..

..halb ..
.. Oberf..
..egat..
.. di..
(g..

..h **unmittelbar**, dass bei einer
.. zum **Theil** innerhalb, zum
Oberfläche S liegt,

$$= 4\pi M$$

innerhalb S befindlichen Masse
..selbe **Bedeutung** wie oben haben.

..all des in **Cap.** I. Anhang A (a) ge-
$\alpha = 1$ und $U' = 1$ lautet derselbe

$$\iiint \nabla^2 U \, dx \, dy \, dz.$$

Rede stehenden Massenvertheilung im
..ch der Bedeutung von δ

$$\ldots = -N.$$

Materie in (x, y, z), so ist nach § 491 (c)

$$U = -4\pi\varrho.$$

..it

$$\ldots \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz = 4\pi M.$$

..s **Potentials in einem freien Raum** ..**der Minimum sein.** — Daraus geht her-
..s Potentials in einem Punkte des freien
..m oder Minimum sein kann. Denn wenn
könnte man um den Punkt und unendlich
..geschlossene Oberfläche beschreiben, und in
..berfläche müsste das Potential einen kleine-
..eren Werth als in jenem Punkte haben; N
..berfläche überall negativ oder positiv sein,
..n endlichen Werth haben, was unmöglich ist,
..einen Theil der anziehenden Masse enthält.
..**ungen.** — Es leuchtet auch ein, dass N in eini-
.. Oberfläche positive, in anderen negative Werthe
..er wenn es überall auf der Oberfläche Null ist.
..otential im freien Raume um irgend einen Punkt
..stant ist, so nimmt es in einigen Richtungen mit
..vom Punkte zu, in anderen ab; daher wird sich
..chen, das an einen Punkt gebracht ist, in welchem die
..ull, und das frei von jedem Zwange der Wirkung be-
..hender Körper ausgesetzt ist, in instabilem Gleich-
..nden, ein Resultat, das wir Earnshaw*) verdanken.

..dge Phil. Trans., March 1839.

492. Integral der Normalattraction über eine geschlos sene Oberfläche. — Es sei S eine beliebige geschlossene Oberfläch und O ein innerer oder äusserer Punkt, in welchem sich eine Mass von der Grösse m befindet. Ferner sei N die Componente de Attraction von m, genommen für die Richtung der von einem be liebigen Punkte P von S nach innen zu gezogenen Normale. Be zeichnet dann $d\sigma$ ein Element von S und $\int\int$ eine sich über di ganze Oberfläche S erstreckende Integration, so ist

$$\int\int N d\sigma = 4\pi m, \text{ oder } = 0,$$

jenachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb S liegt.

Fall 1. O ist ein innerer Punkt. Es sei $OP_1P_2P_3..$ eine von O aus in irgend einer Richtung gezogene gerade Lini welche S in P_1, P_2, P_3, u. s. w. schneidet, also aus S austritt i P_1, P_3, u. s. w. und in S eintritt in den Punkten P_2, P_4, u. s. w Wir beschreiben eine Kegelfläche vermittels gerader Linien, di durch O gehen und sämmtlich $OP_1P_2\ldots$ unendlich nahe liegen die Grösse der so gebildeten Kegelecke (§ 465) sei ω. Di Theile von $\int\int N d\sigma$, welche den durch den Kegel aus S heraus geschnittenen Elementen entsprechen, werden offenbar dieselbe ab solute Grösse ωm haben, aber abwechselnd positiv und negati sein. Da nun ihre Anzahl ungerade ist, so ist ihre Summe gleic $+\omega m$. Wird jetzt weiter für alle um O herumliegenden Kegel ecken summirt (§ 466), so erhält man $4\pi m$, d. h. es ist

$$\int\int N d\sigma = 4\pi m.$$

Dieses Resultat ist der Poisson'schen Erweiterung der Laplace' schen Gleichung äquivalent.

Fall 2. O ist ein äusserer Punkt. Es werde von O au eine gerade Linie $OP_1P_2P_3\ldots$ durch S gezogen, welche in P_1 in S eintritt, in P_2 wieder aus S austritt, u. s. w. Ziehen wir wieder eine Kegelfläche von einem unendlich kleinen körperlichen Winkel ω, so ist, wie im vorigen Falle, ωm der absolute Werth jedes Theils von $\int\int N d\sigma$, welcher einem der durch den Kegel aus S heraus geschnittenen Elemente entspricht. Diese Theile sind abwechselnd negativ und positiv, und da ihre Anzahl gerade ist, so ist ihre Summe Null. Es ist also in diesem Falle

$$\int\int N d\sigma = 0,$$

und dies ist wieder die Laplace'sche Gleichung.

Aus diesen Resultaten ergiebt sich unmittelbar, dass bei einer ntinuirlich vertheilten Masse, die zum Theil innerhalb, zum heil ausserhalb einer geschlossenen Oberfläche S liegt,

$$\iint N d\sigma = 4\pi M$$

in muss, wo M die Grösse der innerhalb S befindlichen Masse ezeichnet, während N und $d\sigma$ dieselbe Bedeutung wie oben haben.

Es ist dies nur ein besonderer Fall des in Cap. I. Anhang A (a) ge- bbenen analytischen Satzes. Für $\alpha = 1$ und $U' = 1$ lautet derselbe ämlich

$$0 = \iint d\sigma \, \delta U - \iiint \nabla^2 U \, dx \, dy \, dz.$$

t nun U das Potential der in Rede stehenden Massenvertheilung im unkte (x, y, z), so haben wir nach der Bedeutung von δ

$$\delta U = - N.$$

t ferner ϱ die Dichtigkeit der Materie in (x, y, z), so ist nach § 491 (c)

$$\nabla^2 U = - 4\pi\varrho.$$

ie obige Gleichung liefert somit

$$\iint N d\sigma = 4\pi \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz = 4\pi M.$$

493. Der Werth des Potentials in einem freien Raum ann kein Maximum oder Minimum sein. — Daraus geht her- or, dass der Werth des Potentials in einem Punkte des freien aumes nie ein Maximum oder Minimum sein kann. Denn wenn ies der Fall wäre, so könnte man um den Punkt und unendlich ahe demselben eine geschlossene Oberfläche beschreiben, und in edem Punkte dieser Oberfläche müsste das Potential einen kleine- en oder einen grösseren Werth als in jenem Punkte haben; N würde also für die Oberfläche überall negativ oder positiv sein, nithin $\iint N d\sigma$ einen endlichen Werth haben, was unmöglich ist, a die Oberfläche keinen Theil der anziehenden Masse enthält.

494. Folgerungen. — Es leuchtet auch ein, dass N in eini- gen Theilen dieser Oberfläche positive, in anderen negative Werthe haben muss, ausser wenn es überall auf der Oberfläche Null ist. Wenn also das Potential im freien Raume um irgend einen Punkt herum nicht constant ist, so nimmt es in einigen Richtungen mit der Entfernung vom Punkte zu, in anderen ab; daher wird sich ein Massentheilchen, das an einen Punkt gebracht ist, in welchem die Kraft gleich Null, und das frei von jedem Zwange der Wirkung be- liebiger anziehender Körper ausgesetzt ist, in instabilem Gleich- gewichte befinden, ein Resultat, das wir Earnshaw*) verdanken.

*) Cambridge Phil. Trans., March 1839.

495. Wenn das Potential auf einer geschlossenen Oberfläche, die keinen Theil der anziehenden Masse enthält, überall constant ist, so hat es denselben constanten Werth überall im Innern der Fläche. Denn wenn dem nicht so wäre, so müsste es irgendwo im Innern einen grössten oder kleinsten Werth haben, was unmöglich ist.

496. Der Mittelwerth des Potentials über eine Kugelfläche ist gleich dem Potential im Centrum. — Das mittlere Potential über jede Kugelfläche, welches nur von ausserhalb derselben befindlichen Massen herrührt, ist gleich dem Potential in ihrem Mittelpunkt. Dieser Satz ist offenbar zuerst von Gauss gegeben. Siehe auch Cambridge Mathematical Journal, Feb. 1845 (vol. IV, p. 225). Er ist einer der elementarsten Sätze aus der Theorie der Anwendung der Kugelfunctionen auf das Potential, und zwar ergibt er sich dadurch, dass man die Formel (16) des Zusatzes B auf die Formeln des § 539 anwendet. Der Beweis, den wir jetzt folgen lassen, ist insofern von Interesse, als er von der Entwicklung nach harmonischen Functionen unabhängig ist.

In Cap. I, Zusatz B (a) sei S eine Kugelfläche vom Radius a und U das Potential im Punkte (x, y, z), welches aus der gesammten ausserhalb S befindlichen Masse herrührt. Ferner sei U' das Potential einer auf eine kleinere concentrische Kugelfläche gleichförmig vertheilten Masseneinheit, so dass ausserhalb der Fläche S und bis zu einem gewissen Abstande innerhalb derselben $U' = \frac{1}{r}$ ist. Endlich sei noch $\alpha = 1$. Dann verwandelt sich das mittlere Glied der Formel (1) des Zusatzes A zum ersten Capitel in

$$\frac{1}{a}\int\int \delta U d\sigma - \int\int\int U' \nabla^2 U dx dy dz,$$

und dies ist gleich Null, da $\nabla^2 U$ für den ganzen inneren Raum Null ist und wir (§ 492) $\int\int \delta U d\sigma = 0$ haben. Wir müssen daher auch das dritte Glied gleich Null setzen und erhalten

$$\int\int d\sigma\, U \delta U' = \int\int\int U \nabla^2 U' dx dy dz.$$

An der Oberfläche S ist nun $\delta U' = -\frac{1}{a^2}$; für alle ausserhalb der Kugel S liegenden Punkte der Materie, aus welcher U' herrührt, ist $\nabla^2 U' = 0$; endlich ist, wenn ϱ' die Dichtigkeit der Materie bezeichnet, für alle inneren Punkte $\nabla^2 U' = -4\pi\varrho'$. Die vorhergehende Gleichung geht daher über in

$$\frac{1}{a^2}\int\int U d\sigma = 4\pi \int\int\int \varrho' U dx dy dz.$$

Wir lassen jetzt die Dichtigkeit ϱ' unbegrenzt zunehmen, folglich die Kugel, innerhalb welcher das dreifache Integral genommen werden muss,

unendlich klein werden. Bezeichnet U_0 den Werth von U im Mittelpunkt dieser Kugel, welcher auch der Mittelpunkt von S ist, so erhalten wir

$$\int\int\int \varrho' U\,dx\,dy\,dz = U_0 \int\int\int \varrho'\,dx\,dy\,dz = U_0.$$

Die Gleichung wird daher

$$\frac{\int\int U\,d\sigma}{4\pi a^2} = U_0,$$

was zu beweisen war.

497. Satz von Gauss. — Ein sehr bemerkenswerther von Gauss gefundener Satz ist folgender: — Wenn das Potential irgend welcher Massen durch das ganze Innere irgend eines begrenzten und keine Masse enthaltenden Raumes K einen constanten Werth V hat, so ist es auch gleich V in jedem anderen Theile des Raumes, zu dem man auf irgend einem Wege gelangen kann, ohne durch eine jener Massen zu gehen. Wäre nämlich das Potential in einem an K anstossenden Raume von V verschieden, so müsste es (§ 495) in einigen Theilen grösser, in anderen kleiner sein.

Wir könnten dann von einem innerhalb K und in der Nähe einer Stelle, in welcher das Potential grösser als V ist, liegenden Punkte C als Mittelpunkt eine Kugelfläche beschreiben, die nicht so gross ist, dass sie einen Theil einer der anziehenden Massen enthielte, noch dass sie von den ausserhalb K befindlichen Raumtheilen irgend einen umschlösse, in welchem das Potential nicht grösser als V wäre. Das ist aber unzulässig, da wir eben (§ 497) gesehen haben, dass der Mittelwerth des Potentials über die Kugelfläche hin V sein muss. Mithin ist die Voraussetzung, dass das Potential in einigen mit K in Verbindung stehenden und keine Masse enthaltenden Stellen grösser, in anderen kleiner als V sei, falsch.

498. Auf ähnliche Weise sehen wir, dass wenn das Potential in einem Falle der Symmetrie um eine Axe in einer gewissen endlichen, wenn auch noch so kurzen Strecke längs der Axe constant ist, es durch den ganzen Raum constant ist, zu dem man von diesem Theil der Axe aus gelangen kann, ohne eine der Massen zu treffen (s. § 546 unten).

499. Green's Problem. — Es sei S ein endlicher Theil einer Oberfläche, oder eine vollständige geschlossene oder eine unendlich ausgedehnte Oberfläche und E ein auf S beliebig angenommener Punkt. Dann ist es erstens möglich, Materie so über S hin zu vertheilen, dass das Potential überall auf S gleich einer willkürlichen Function $F(E)$ der Lage von E ist, und zwar giebt es zweitens nur eine Stoffmenge und nur eine Vertheilung derselben, welche dieser Bedingung genügen können.

In Cap. I, Zusatz A (b), (e), u. s. w. sei $\alpha = 1$. Aus (e) sehen wir, dass es für alle nicht zu S gehörenden Punkte eine und nur eine Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 U = 0$$

giebt, welche der Bedingung genügt, dass U überall auf S einen willkürlich gegebenen Werth habe. Wir bezeichnen die Lösung dieses Problems wieder mit U und betrachten zunächst den Fall, in welchem S eine offene Schale, d. h. ein endlicher Theil einer gekrümmten Oberfläche ist (eine Ebene ist darin natürlich als ein besonderer Fall enthalten). In Cap. I A (a) sei U' das Potential für den Punkt (x, y, z), welches aus einer Masse herrührt, die in jedem Punkte Q die Dichtigkeit $\varpi(Q)$ hat. Die dreifache Integration erstrecke sich durch den unendlichen Raum, mit Ausnahme der unendlich dünnen Schale S. In der in [A. (a)] angestellten Untersuchung war das dreifache Integral zwar nur innerhalb des von einer geschlossenen Oberfläche umgebenen endlichen Raumes zu nehmen: das dort angewandte Verfahren zeigt aber, dass wir jetzt, statt des zweiten und dritten Gliedes der Formel (1) der obigen Entwicklung, die folgenden gleichen Ausdrücke haben: —

$$\iint d\sigma\, U' \{[\delta U] - (\delta U)\} - \iiint dx\,dy\,dz\, U' \nabla^2 U$$
$$= \iint d\sigma\, U \{[\delta U'] - (\delta U')\} - \iiint dx\,dy\,dz\, U \nabla^2 U';$$

darin bezeichnet $[\delta U]$ die Grösse der Variation, welche U auf einer Seite von S, am Anfang einer vom Punkte E auslaufenden und zu S normalen Linie erfährt, genommen für die Längeneinheit; (δU) bezeichnet die Grösse der Variation, welche U auf der anderen Seite von S erfährt, am Ende einer normal zu S gegen E hin verlaufenden Linie, ebenfalls genommen für die Längeneinheit; entsprechende Bedeutungen haben $[\delta U']$, $(\delta U')$. Wir setzen jetzt voraus, die Masse, deren Potential U' ist, sei nicht in endlichen Mengen in irgend welchen endlichen Theilen von S verdichtet; dann wird

$$[\delta U'] = (\delta U')$$

sein, und die U und U' definirenden Bedingungen liefern für den ganzen Raum, innerhalb dessen das dreifache Integral zu nehmen ist,

$$\nabla^2 U = 0, \quad \nabla^2 U' = -4\pi\varpi;$$

ϖ bezeichnet den Werth von $\varpi(Q)$, wenn Q der Punkt (x, y, z) ist. Die vorhergehende Gleichung geht daher über in

$$\iint d\sigma\, U' \{[\delta U] - (\delta U)\} = 4\pi \iiint dx\,dy\,dz\, \varpi\, U.$$

Es sei jetzt die Masse, deren Potential U' ist, gleich der Masseneinheit und auf einen unendlich kleinen Raum um einen Punkt Q herum beschränkt. Wir erhalten dann

$$U' = \frac{1}{EQ}$$

$$\iiint dx\,dy\,dz\, \varpi\, U = U(Q) \iiint \varpi\, dx\,dy\,dz = U(Q),$$

wenn $U(Q)$ den Werth bezeichnet, welchen die Function U im Punkte Q hat. Die Gleichung wird somit

$$\text{(1)} \qquad \int\int \frac{[\delta U] - (\delta U)}{EQ} d\sigma = 4\pi U(Q).$$

Folglich hat eine über S vertheilte Masse, deren Dichtigkeit im Punkte E

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{4\pi}\{[\delta U] - (\delta U)\}$$

ist, das Potential U für den Punkt (x, y, z). Wir schliessen daraus, dass es möglich ist, eine, aber auch nur eine Art der Vertheilung einer Masse über S zu finden, welche ein beliebig gegebenes Potential für die ganze Oberfläche S erzeugt, und wenn ${}'U$ bereits so bestimmt ist, dass die oben gestellten Bedingungen erfüllt werden, so stellt der Ausdruck (2) die Lösung dieses Problems dar.

Die Schlüsse, deren wir uns bedient haben, bleiben offenbar gültig, auch wenn S eine beliebige endliche geschlossene Oberfläche, oder eine beliebige Gruppe offener oder geschlossener Oberflächen, oder eine unendliche Oberfläche ist. Es muss dann die in der Untersuchung angewandte dreifache Integration einzeln für alle Raumtheile ausgeführt werden, welche durch S oder durch Theile von S von einander getrennt sind.

Wenn die Lösung ϱ des Problems für alle die Fälle gefunden worden ist, wo die willkürliche Function das Potential einer in irgend einem nicht zu S gehörenden Punkte P befindlichen Masseneinheit für die innerhalb S liegenden Punkte ist, d. h. für den Fall $F(E) = \frac{1}{EP}$, so lässt sich daraus, wie Green gezeigt hat, der Werth von U für den Punkt P bei willkürlicher Wahl der Function $F(E)$ durch die folgende Formel herleiten: —

$$\text{(3)} \qquad U = \int\int \varrho F(E)\, d\sigma.$$

Der Beweis ist leicht: Es bezeichne für einen Augenblick ${}_{\prime}\varrho$ die zur Erzeugung von ${}'U$ erforderte Flächendichtigkeit. Ist dann ${}_{\prime}\varrho'$ der Werth von ${}_{\prime}\varrho$ für irgend ein anderes Element E' von S, so erhalten wir

$$F(E) = \int\int \frac{{}_{\prime}\varrho'\, d\sigma'}{E'E}.$$

Das vorhergehende Doppelintegral verwandelt sich also in

$$\int\int d\sigma \varrho \int\int d\sigma' \frac{{}_{\prime}\varrho'}{E'E},$$

oder in

$$\int\int d\sigma' {}_{\prime}\varrho' \int\int d\sigma \frac{\varrho}{E'E}.$$

Nach der Definition von ϱ ist aber

$$\int\int d\sigma \frac{\varrho}{E'E} = \frac{1}{E'P};$$

der vorige Ausdruck, der mit Rücksicht hierauf in

$$\int\int d\sigma' \frac{{}_{\prime}\varrho'}{E'P}$$

übergeht, ist folglich, nach der Definition von ${}_{\prime}\varrho$, gleich U.

Der Ausdruck (46) des Zusatzes (B), aus welchem wir die Entwicklung einer willkürlichen Function in eine Reihe harmonischer Kugelfunc-

tionen herleiteten, ist ein besonderer Fall des jetzt bewiesenen allgemeinen Resultats (3).

500. Die Wirkungen innerhalb und ausserhalb eines geschlossenen Theils der Oberfläche sind von einander unabhängig. — Es verdient hervorgehoben zu werden, dass, wenn S zum Theil aus einer geschlossenen Oberfläche Q besteht, die Bestimmung von U innerhalb Q unabhängig ist von denjenigen Theilen von S, die etwa noch ausserhalb Q liegen sollten; umgekehrt ist die Bestimmung von U für den Raum ausserhalb Q unabhängig von den etwa noch vorhandenen Theilen von S, die innerhalb des Theils Q liegen. Oder wenn S zum Theil aus einer Oberfläche Q besteht, welche sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt, so ist die Bestimmung von U für den ganzen auf einer Seite von Q liegenden Raum unabhängig von den etwa vorhandenen Theilen von S, welche auf der anderen Seite liegen. Dies ergibt sich aus der vorhergehenden Untersuchung, wenn man darin die dreifache Integration auf einen der beiden Raumtheile beschränkt, welche durch Q vollständig von einander getrennt werden.

501. Anwendung des Green'schen Problems auf eine gegebene Elektricitätsmenge M, welche auf eine Gruppe S leitender Oberflächen einwirkt. — Eine andere Bemerkung von äusserster Wichtigkeit ist folgende: — Ist $F(E)$ das Potential einer beliebig vertheilten Masse M für den Punkt E und die Oberfläche S so beschaffen, dass sie irgend einen Raumtheil H, der seinerseits aus mehreren nicht zusammenhängenden Theilen bestehen kann, vollständig von dieser Masse trennt, dergestalt, dass es unmöglich ist, von irgend einem Theile von M nach H zu gelangen, ohne durch S hindurchzukommen, so ist der Werth von U in jedem Punkte von H das Potential von M.

Denn bezeichnet V dieses Potential, so ist in jedem Punkte von H $\nabla^2 V = 0$, und in jedem Punkte der Umgrenzung von H ist $V = F(E)$. Wenden wir also den Satz des I. Cap. Zusatz A. (c), statt auf S, auf H allein und auf die Umgrenzung dieses Raumes allein an, so sehen wir, dass V in diesem Raume den für U vorgeschriebenen Bedingungen genügt; in diesem Raume ist daher $U = V$.

502. Wenn z. B., wie in der Figur 15 S aus drei getrennten Oberflächen S_1, S_2, S_3 besteht, von denen zwei, S_1, S_2, geschlossen sind, während S_3 eine offene Schale ist, und wenn $F(E)$ das Potential der Masse M für irgend einen Punkt E einer dieser Theile von S ist, so ist in jedem Punkte des von S_1 umschlossenen Raumes H_1, sowie des ausserhalb S_2 liegenden Raumes, den wir mit H_2 be-

zeichnen wollen, der Werth von U einfach das Potential von M. Der Werth, welchen U in dem übrigen Raume K hat, hängt natürlich von der Natur der zusammengesetzten Oberfläche S ab und ist ein Fall des allgemeinen Problems, dessen Lösung im Cap. I. Zusatz A als möglich und eindeutig bestimmt erwiesen wurde.

Fig. 15.

503. Das allgemeine Problem der elektrischen Influenz ist möglich und bestimmt. — Aus § 500 folgt der herrliche Satz: — Es ist möglich, eine, aber auch nur eine Vertheilung einer Masse über eine Oberfläche S zu finden, welche für jeden Punkt von S und für jeden Punkt des Raumes H, der durch S von einer beliebig gegebenen Masse M getrennt wird, dasselbe Potential wie diese Masse M erzeugt.

So ist es in Fig. 15 möglich, eine, aber auch nur eine Vertheilung einer Masse über S_1, S_2, S_3 zu finden, welche für jeden Punkt von S_3 und für jeden Punkt der Raumtheile H_1 und H_2 dasselbe Potential wie M erzeugt.

Gewöhnlich wird dieser Satz in folgender Form angegeben: —

Es ist möglich, über irgend eine Oberfläche S, welche eine Masse M vollständig umschliesst, eine Masse so zu vertheilen, dass letztere für jeden Punkt ausserhalb M dasselbe Potential wie M habe. Dieser Satz scheint weniger umfassend als der vorhergehende zu sein; wenn man ihn aber gehörig mathematisch interpretirt, so erkennt man, dass er demselben äquivalent ist.

504. Simultane elektrische Wirkungen in Räumen, die durch unendlich dünne leitende Flächen von einander getrennt sind. — Wenn S aus mehreren geschlossenen oder unendlichen Oberflächen S_1, S_2, S_3 besteht, welche beziehungsweise gewisse isolirte Raumtheile H_1, H_2, H_3 von dem ganzen übrigen Raume H trennen, und wenn $F(E)$ das Potential der in H_1, H_2, H_3 liegenden Massen m_1, m_2, m_3 ist, so sind die aus S_1, S_2, S_3 herrührenden Theile von U im ganzen Raume H einzeln beziehungsweise gleich den Potentialen von m_1, m_2, m_3. Denn, wie wir eben gesehen haben, ist es möglich, eine und nur eine Vertheilung einer Masse über S_1 zu finden, welche für den ganzen Raum H, H_2, H_3, u. s. w. das Potential von m_1 erzeugt; ebenso kann man eine und nur eine

Vertheilung über S_2 ermitteln, welche für H, H_1, H_3, u. s w. das Potential von m_2 erzeugt, u. s. w. Diese Vertheilungen auf S_1, S_2, u. s. w. machen aber vereint eine Vertheilung aus, welche über

Fig. 16.

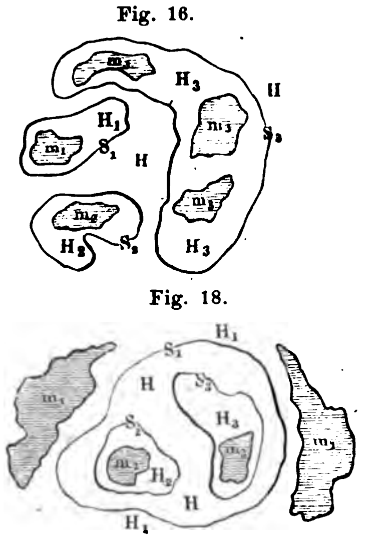
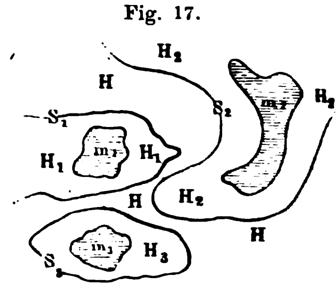


Fig. 18.

Fig. 17.



jeden Theil von S das Potential $F(E)$ erzeugt, und daher genügt die Summe der aus ihnen allen herrührenden Potentiale für jeden Punkt den für U gestellten Bedingungen. Dies ist daher eine, und zwar die einzige Lösung des Problems (§ 500).

505. Reducirbarer Fall des Green'schen Problems. — Indem wir immer noch den Fall betrachten, in welchem $F(E)$ das Potential einer gegebenen Masse M ist, nehmen wir an, S sei eine M umschliessende Oberfläche constanten Potentials oder eine Gruppe isolirter Oberflächen, welche alle Theile von M umschliessen, und deren jede für die ganze Masse M eine Fläche constanten Potentials ist. Das Potential der in der besprochenen Art über S vertheilten Masse wird für den ganzen äusseren Raum gleich demjenigen von M, und für jeden eingeschlossenen Raumtheil constant sein (§ 496). Die Resultante ihrer Attraction ist daher für alle äusseren Punkte gleich der Resultante der von M ausgeübten Attractionen und für alle inneren Punkte gleich Null. Daraus ist leicht zu ersehen, dass die Dichtigkeit der Masse, die über S vertheilt werden muss, damit $F(E)$ erzeugt werde, gleich $\frac{R}{4\pi}$ ist, wo R die Resultante der von M auf den Punkt E ausgeübten Kräfte bezeichnet.

Es ist $[\delta U] = -R$ und $(\delta U) = 0$. Hieraus ergibt sich nach § 508 (2) das Gesetz der Dichtigkeit.

506. Wenn M aus zwei Theilen m_1 und m' besteht, die durch eine Fläche S_1 constanten Potentials von einander getrennt sind.

und wenn S aus zwei Theilen S_1 und S' besteht, von denen der letztere den ersteren vollständig von m' trennt, so ersehen wir aus § 504, dass die über S_1 vertheilte Masse für den ganzen mit S' auf derselben Seite von S_1 liegenden Raum dasselbe Potential V_1 wie m_1 erzeugt, und dass die über S' vertheilte Masse für den ganzen mit S_1 auf derselben Seite von S' liegenden Raum dasselbe Potential V' wie m' erzeugt. Die Masse ist aber, wie wir voraussetzen, auf der ganzen Fläche S in einer solchen Weise vertheilt, dass auf S_1 und folglich auch in jedem Punkte innerhalb S_1 ein constantes Potential C_1 hervorgebracht wird. Das von S_1 allein herrührende innere Potential ist daher $C_1 - V'$.

Gehen wir also von den Potentialen zu den Attractionen über, so erkennen wir, dass die Resultante der Kräfte, mit welchen S_1 allein jeden auf der einen Seite liegenden Punkt anzieht, dieselbe ist, wie die Resultante der Attraction von m_1; auf der anderen Seite ist dieselbe gleich und entgegengesetzt derjenigen des übrigen Theils m' der ganzen Masse. Der directeste und einfachste vollständige Ausspruch dieses Resultats ist folgender: —

Wenn man weiss, dass in zwei Raumtheilen H, H', welche von einander durch eine geschlossene oder eine unendliche continuirliche Oberfläche S vollständig getrennt sind, sich zwei Massen m, m' befinden, welche in jedem Punkte von S gleiche und gleichgerichtete Tangentialkräfte erzeugen, so wird eine und dieselbe Vertheilung einer Masse über S die Kraft von m für jeden Punkt von H' und die Kraft von m' für jeden Punkt von H erzeugen. Die Dichtigkeit dieser Vertheilung ist gleich $\frac{R}{4\pi}$, wenn R die Resultante der von der einen Masse herrührenden Kraft und der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Kraft der anderen Masse bezeichnet. Die Richtung dieser Resultante ist in jedem Punkte E von S senkrecht zu S, da das Potential der einen Masse und der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen zweiten Masse über die ganze Oberfläche S constant ist.

507. Beispiele. — Als Green zuerst das in § 505 angegebene Resultat veröffentlichte, bemerkte er zugleich, dass dasselbe einen Weg zeigt, eine unendliche Menge geschlossener Oberflächen zu finden, für deren jede wir die Aufgabe lösen können, eine Massenvertheilung über dieselbe zu bestimmen, welche in jedem Punkte der Oberfläche und folglich auch in jedem Punkte des von derselben eingeschlossenen Raumes ein gegebenes gleichförmiges Potential erzeugt. So sei, um ein von Green selbst gegebenes Beispiel

anzuführen, M die Masse eines gleichförmigen Stabes AA'. Die Oberflächen constanten Potentials sind für diesen Körper, wie wir oben in § 481 gesehen haben, gestreckte Rotationsellipsoide, deren jedes die Punkte A und A' zu Brennpunkten hat, und die Resultante der auf C wirkenden Kräfte ist gleich

$$\frac{m}{l(l^2-a^2)} \cdot CF,$$

wenn die ganze Masse des Stabes mit m, die Länge desselben mit $2a$ und $A'C + AC$ mit $2l$ bezeichnet wird. Wir schliessen daraus, dass eine über die Oberfläche des Ellipsoides vertheilte Masse, welche im Punkte C die Dichtigkeit

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{m\,.\,CF}{l(l^2-a^2)}$$

hat, auf jeden äusseren Punkt mit derselben resultirenden Kraft wie der Stab wirkt, und dass die Resultante der auf jeden beliebigen inneren Punkt wirkenden Kräfte Null, d. h. dass das Potential für jeden inneren Punkt constant ist. Es ist dies ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes über die Attraction ellipsoidischer Schichten, den wir unten in §§ 520, 521 beweisen werden.

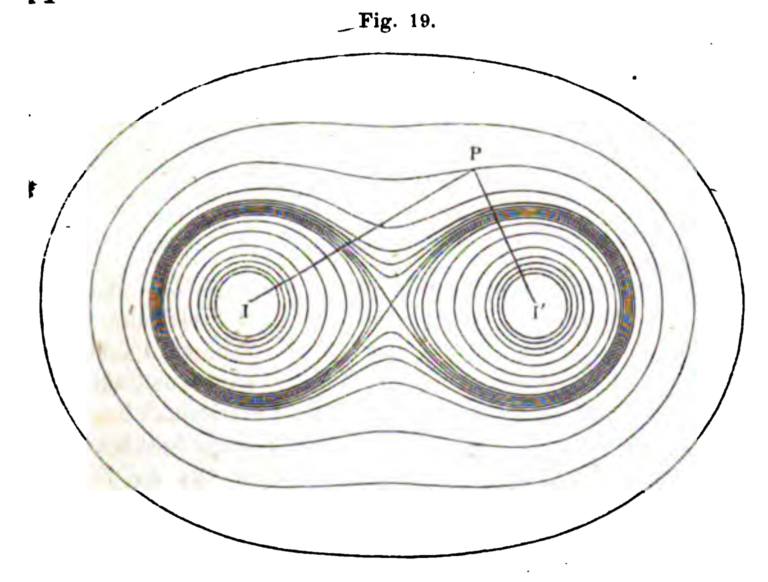
508. Wir wollen noch ein zweites Beispiel geben: M besteht aus zwei gleichen Massenpunkten, die sich in den Punkten I, I' befinden. Wird die Masse jedes Punktes als Einheit angenommen, so ist das Potential im Punkte P gleich $\frac{1}{IP} + \frac{1}{I'P}$ folglich

$$\frac{1}{IP} + \frac{1}{I'P} = C$$

die Gleichung einer Oberfläche constanten Potentials; dabei wird vorausgesetzt, dass IP und $I'P$ keine negativen Werthe haben können, und dass man C einen beliebigen constanten positiven Werth beilegt. Nach dieser Gleichung sind die nebenstehenden Curven für die Werthe 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4·5; 4·3; 4·2; 4·1; 4; 3·9; 3·8; 3·7; 3·5; 3; 2·5; 2 von C gezeichnet; II' ist dabei als Längeneinheit angenommen. Die entsprechenden Flächen constanten Potentials sind die Oberflächen, welche von diesen Curven gebildet werden, wenn man die ganze Figur um II' als Axe rotiren lässt. Wir sehen daraus, dass, wenn $C < 4$ ist, die Oberfläche constanten Potentials e i n e geschlossene Fläche ist. Fassen wir eine Fläche dieser Art ins Auge und bezeichnen die Resultante der beziehungs-

weise in den Richtungen PI und PI' wirkenden Kräfte $\frac{1}{IP^2}$ und $\frac{1}{I'P^2}$ mit R, so ist die Anziehung einer über die Fläche vertheilten

Fig. 19.



Masse, die im Punkte P die Dichtigkeit $\frac{R}{4\pi}$ hat, für jeden inneren Punkt Null und für jeden äusseren Punkt gleich der Anziehung, welche I und I' auf denselben Punkt ausüben.

509. Für jeden Werth von C, der grösser als 4 ist, besteht die Fläche constanten Potentials aus zwei getrennten Ovalen, die bei wachsendem C sich immer mehr der Form von Kugelflächen nähern (in der Figur sind die letzten drei oder vier Flächen nur noch sehr wenig von Kugelflächen verschieden); ihre Mittelpunkte liegen zwischen I und I' und kommen für grössere und grössere Werthe von C immer näher an diese Punkte zu liegen.

Betrachten wir eins dieser Ovale allein, etwa eine der I' umgebenden Oberflächen, und vertheilen über dieselbe eine Masse, welche im Punkte P wieder die Dichtigkeit $\frac{R}{4\pi}$ hat, so erhalten wir eine Schicht, welche (§ 507) auf jeden äusseren Punkt dieselbe Kraft wie I' und auf jeden inneren Punkt eine Kraft ausübt, welche derjenigen von I gleich und entgegengesetzt ist.

510. Elektrische Bilder. — Wir wollen noch ein Beispiel geben, welches in der Theorie der Elektricität von ausserordentlicher Bedeutung ist. Es bestehe M aus einer in einem Punkte I concentrirten positiven Masse m und einer in I' befindlichen negativen Masse $-m'$. Ferner sei S eine Kugelfläche, welche die Gerade II' und deren Verlängerung in Punkten A, A_1 schneidet, für welche

$$IA:AI' = IA_1:I'A_1 = m:m'$$

ist. Dann hat man nach einem bekannten geometrischen Satze

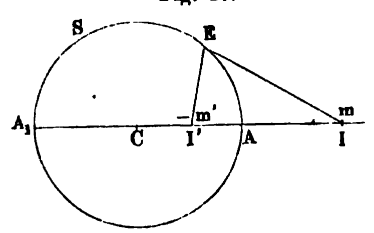
$$IE:I'E = m:m',$$

folglich

$$\frac{m}{IE} = \frac{m'}{I'E}.$$

Nach dem eben erhaltenen Resultate wird also eine und dieselbe über S vertheilte Masse auf jeden äusseren Punkt dieselbe Kraft wie m' und auf jeden Punkt, der innerhalb S liegt, dieselbe Kraft wie m ausüben. Um den Ausdruck für die Dichtigkeit dieser Masse in einem Punkte E zu erhalten, bilden wir die

Fig. 20.



Resultante der in der Richtung EI wirkenden Kraft $\frac{m}{\overline{IE}^2}$ und der in der Verlängerung von $I'E$ wirkenden Kraft $\frac{m'}{\overline{I'E}^2}$. Da diese Kräfte sich umgekehrt wie $IE:I'E$ verhalten (§ 256), so ist die Resultante gleich

$$\frac{m}{\overline{IE}^2 . I'E} II' \text{ oder } \frac{m^2 . II'}{m'} \frac{1}{\overline{IE}^3};$$

wir schliessen daraus, dass die Schicht im Punkte E die Dichtigkeit

$$\frac{m^2 . II'}{4\pi m'} \frac{1}{\overline{IE}^3}$$

hat. Dass eine Schicht von dieser Beschaffenheit äussere Punkte ganz so anzieht, wie wenn ihre Masse in I' concentrirt wäre, und innere Punkte ganz wie eine gewisse in I concentrirte Masse, ist bereits oben im § 474 geometrisch bewiesen.

511. Wenn die Kugelfläche und einer der beiden Punkte I, I', etwa I, gegeben ist, so erhält man den anderen Punkt, indem man

$CI' = \frac{\overline{CA}^2}{CI}$ nimmt; für die in diesen Punkt zu setzende Masse ergibt sich

$$m' = m\,\frac{I'A}{AI} = m\,\frac{CA}{CI} = m\,\frac{CI'}{CA}.$$

Haben wir also eine beliebige Anzahl materieller Punkte m_1, m_2, u. s. w., welche sich ausserhalb S in den Punkten I_1, I_2, u. s. w. befinden, so können wir nach dem Vorigen entsprechende innere Punkte I'_1, I'_2, u. s. w. und Massen m'_1, m'_2, u. s. w. finden, und durch Addition der Ausdrücke für die Dichtigkeit in E, welche die vorhergehende Formel für jedes Punktepaar liefert, erhalten wir eine kugelförmige materielle Schicht, welche die Eigenschaft hat, auf jeden äusseren Punkt mit derselben Kraft wie $-m'_1$, $-m'_2$, u. s. w. und auf jeden inneren Punkt mit einer Kraft zu wirken, die derjenigen von m_1, m_2, u. s. w. gleich und entgegengesetzt ist.

512. Es möge eine unendliche Anzahl solcher Partikeln gegeben sein, welche eine continuirliche Masse M ausmachen; dann werden die entsprechenden inneren Partikeln natürlich eine continuirliche Masse $-M'$ von der entgegengesetzten Art Materie bilden, und der frühere Schluss wird seine Gültigkeit nicht verlieren. Wenn S die Oberfläche einer massiven oder hohlen Metallkugel ist, die mit der Erde durch einen dünnen Drath in Verbindung steht, und wenn M ein auf die Kugel einwirkender elektrisirter äusserer Körper ist, so ist die materielle Schicht, die wir bestimmt haben, eben die durch den Einfluss von M erregte und auf S vertheilte Elektricität; die in der oben angegebenen Art bestimmte Masse $-M'$ heisst das elektrische Bild von M in der Kugel, da die elektrische Wirkung in dem ganzen ausserhalb der Kugel befindlichen Raume unverändert bleiben würde, wenn man die Kugel entfernte und im Innern des von ihr eingenommenen Raumes die in angegebener Weise bestimmte Masse $-M'$ anbrächte. In der Elektricitätslehre werden wir auf diesen Gegenstand zurückkommen.

513. **Transformation durch reciproke Radii Vectores.** — Abgesehen von dieser besonderen Anwendung auf die Elektricitätslehre liefert diese Methode der Bilder eine bemerkenswerthe Art der Transformation, die oft von Nutzen ist. Sie führt nämlich zu der sogenannten Transformation durch reciproke Radii Vectores. Diese Transformation besteht darin, dass man für eine beliebige Anzahl von Punkten oder für eine beliebige Anzahl von Linien oder Flächen andere substituirt, die erhalten werden, wenn man von

einem gewissen festen Punkte oder Centrum aus Radien zu den gegebenen Punkten zieht, und auf diesen Radien Strecken abmisst, welche den Längen der Radien umgekehrt proportional sind. Aus der Elementargeometrie erkennen wir sofort, dass jede so erhaltene Linie den durch irgend einen ihrer Punkte gezogenen Radius Vector unter demselben Winkel und in derselben Ebene wie die Linie schneidet, von der sie hergeleitet wird. Folglich liefern zwei einander schneidende Linien oder Oberflächen zwei transformirte Linien oder Oberflächen, die einander unter dem nämlichen Winkel schneiden, und unendlich kleine Längen, Flächen und Volumina verwandeln sich in andere, deren Grössen sich beziehungsweise im Verhältniss der ersten, zweiten und dritten Potenz der Abstände der letzteren von dem festen Centrum zu denselben Potenzen der Abstände der ersteren von dem festen Centrum geändert haben. Die Längen, Flächen und Volumina in der transformirten Figur, welche einer Anzahl in verschiedenen Abständen vom Centrum beliebig gelegener gleicher unendlich kleiner Längen, Flächen und Volumina entsprechen, verhalten sich daher umgekehrt wie die Quadrate, die vierten Potenzen und die sechsten Potenzen dieser Abstände. Weiter lässt sich leicht darthun, dass sich eine gerade Linie und eine Ebene in einen Kreis und eine Kugelfläche transformiren, die beide durch das Centrum gehen, und dass allgemein Kreise und Kugeln sich in Kreise und Kugeln transformiren.

514. In der Theorie der Attraction ist auch die Transformation von Massen, Dichtigkeiten und Potentialen zu betrachten. Aus der Begründung der Methode (512) geht hervor, dass sich gleiche Massen von unendlich kleinen Dimensionen, die in verschiedenen Abständen vom Centrum liegen, in Massen transformiren, die sich umgekehrt wie diese Abstände oder direct wie die entsprechenden Abstände nach der Transformation verhalten. Folglich transformiren sich gleiche Dichtigkeiten von Linien, Flächen und Körpern, die in beliebigen Abständen vom festen Punkte gegeben sind, in Dichtigkeiten, die sich direct wie die erste, dritte und fünfte Potenz dieser Abstände oder umgekehrt wie dieselben Potenzen der Abstände der entsprechenden Punkte des transformirten Systems vom Centrum verhalten.

515. Zusammenfassung der erhaltenen Resultate. — Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen lassen sich, soweit nur die Proportionen in Betracht kommen, passend folgendermaassen ausdrücken: —

Es sei P ein beliebiger Punkt einer geometrischen Figur oder

einer Massen-Vertheilung, O ein besonderer Punkt („das Centrum") und a eine besondere Länge (der Radius der „reflectirenden Kugel"). In OP nehmen wir einen P entsprechenden Punkt P' an, und für jeden unendlich kleinen Theil m der gegebenen Masse setzen wir eine Masse m'; dabei sollen P' und m' den Bedingungen

$$OP' = \frac{a^2}{OP},\quad m' = \frac{a}{OP}\, m = \frac{OP'}{a}\, m$$

genügen. Bezeichnen dann

$$L,\ A,\ V,\ \varrho(L),\ \varrho(A),\ \varrho(V)$$

eine unendlich kleine Länge, Fläche, Volumen, lineare Dichtigkeit, Flächendichtigkeit, Volumendichtigkeit in der gegebenen Masse unendlich nahe an P oder in sonst einem Punkte, der von O denselben Abstand r wie P hat, und werden die entsprechenden Elemente in der transformirten Figur oder Massenvertheilung durch dieselben Symbole mit hinzugefügten Accenten bezeichnet, so ist

$$L' = \frac{a^2}{r^2} L = \frac{r'^2}{a^2} L;\ A' = \frac{a^4}{r^4} A = \frac{r'^4}{a^4} A;\ V' = \frac{a^6}{r^6} V = \frac{r'^6}{a^6} V.$$

$$\varrho'(L) = \frac{r}{a}\,\varrho(L) = \frac{a}{r'}\,\varrho(L);\ \varrho'(A) = \frac{r^3}{a^3}\,\varrho(A) = \frac{a^3}{r'^3}\,\varrho(A);$$

$$\varrho'(V) = \frac{r^5}{a^5}\,\varrho(V) = \frac{a^5}{r'^5}\,\varrho(V).$$

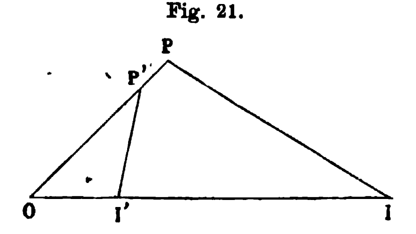
Der Nutzen dieser Transformation in der Theorie der Elektricität und der Attraction überhaupt beruht ganz und gar auf dem folgenden Satze: —

516. Anwendung auf das Potential. — Satz. — Bezeichnet φ das Potential der gegebenen Masse für den Punkt P und φ' das Potential der transformirten Masse für den Punkt P', so ist

$$\varphi' = \frac{r}{a}\,\varphi = \frac{a}{r'}\,\varphi.$$

In einem beliebigen Punkte I befinde sich ein beliebiger Theil m der gegebenen Masse, in dem entsprechenden Punkte I' der m entsprechende Theil m' der transformirten Masse. Dann hat man

Fig. 21.



$$a^2 = OI'.OI = OP'.OP,$$

folglich

$$OI : OP = OP' : OI'.$$

Diese Proportion zeigt, dass die Dreiecke IPO, $P'I'O$ ähnlich sind, dass also

$$IP : P'I' = \sqrt{OI.OP} : \sqrt{OP'.OI'} = OI.OP : a^2$$

ist. Ausserdem haben wir

$$m : m' = OI : a,$$

mithin

$$\frac{m}{IP} : \frac{m'}{I'P'} = a : OP.$$

Danach steht jeder Theil von φ zu dem entsprechenden Theile von φ' in dem constanten Verhältniss $a : r$; es muss also auch die Summe φ sich zur Summe φ' wie $a : r$ verhalten, und das hatten wir zu beweisen.

517. Anwendung auf eine über eine Kugelfläche vertheilte Masse. — Um ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, die gegebene Masse sei auf eine Kugelfläche vertheilt, die O zum Mittelpunkt und a zum Radius hat. Die transformirte Masse ist dann dieselbe wie die gegebene; aber der von der Kugelfläche eingeschlossene Raum transformirt sich in den äusseren Raum. Ist also φ das Potential irgend einer Kugelschicht für einen innerhalb gelegenen Punkt P, so ist das Potential derselben Schicht für den in der Richtung von OP liegenden Punkt P', für welchen $OP' = \frac{a^2}{OP}$ ist, gleich $\frac{a}{OP'}\varphi$. (Wie wir alsbald sehen werden, ist dies ein elementarer Satz aus der Behandlung der Potentiale mittels harmonischer Kugelfunctionen.) So z. B. sei die Vertheilung der Masse eine gleichförmige. Da wir dann wissen, dass auf einen inneren Punkt keine Kraft wirkt, so muss φ constant sein; folglich ist das Potential für jeden äusseren Punkt P' dem Abstande dieses Punktes vom Centrum umgekehrt proportional.

Oder es sei die gegebene Masse eine gleichförmige Schale S und O irgend ein excentrischer oder irgend ein äusserer Punkt. Die transformirte Masse wird (§§ 513, 514) eine kugelförmige Schale S', deren Dichtigkeit umgekehrt wie der Kubus des Abstandes von O variirt. Liegt der Punkt O innerhalb S, so wird er auch von S' umschlossen, und der ganze Raum innerhalb S transformirt sich in den ganzen Raum ausserhalb S'. Folglich ist (§ 516) das Potential von S' für jeden ausserhalb S' liegenden Punkt dem Ab-

stand von O umgekehrt proportional; es ist daher gleich dem Potential einer gewissen in O concentrirten Quantität Materie. Wenn aber O ausserhalb S und folglich auch ausserhalb S' liegt, so transformirt sich der Raum innerhalb S in den Raum innerhalb S'. Das Potential von S' für einen inneren Punkt ist also dasselbe, wie das Potential einer gewissen in dem Punkte O, der jetzt ein äusserer Punkt ist, concentrirten Quantität Materie. Wir gelangen auf diese Weise, ohne uns der in §§ 499, 506 bewiesenen allgemeinen Sätze zu bedienen, wieder zu den Resultaten, die wir in § 510 aus diesen allgemeinen Sätzen folgerten, und die wir schon vorher (§§ 471, 474, 475) synthetisch bewiesen haben. Wir bemerken, dass jene synthetischen Beweise bloss aus Transformationen des Beweises bestehen, den Newton für den Satz gab, dass die auf einen Punkt innerhalb einer gleichförmigen Kugelschale ausgeübten Attractionen einander das Gleichgewicht halten. So ist der erste derselben (§ 471) das Bild dieses Newton'schen Satzes in einer concentrischen Kugelfläche; der zweite ist das Bild einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt ausserhalb der Schale oder innerhalb derselben (dann aber nicht in dem Mittelpunkt der Schale) liegt, jenachdem die Fig. 7 oder die Fig. 8 benutzt wird.

518. Bild einer gleichförmig dichten Vollkugel, entworfen von einer excentrischen Kugel. — Wir wollen jetzt nur noch eine Anwendung des Satzes des § 516 geben, werden denselben aber später in der Theorie der Elektricität vielfach zu benutzen haben.

Die gegebene Masse bilde eine gleichförmig dichte Vollkugel B, und der Punkt O liege ausserhalb derselben. Dann wird das transformirte System eine volle Kugel B' sein, deren Dichtigkeit sich umgekehrt wie die fünfte Potenz des Abstandes von dem ausserhalb B' liegenden Punkte O ändert. Das Potential von S für den ganzen äusseren Raum ist dasselbe, wie das Potential der im Mittelpunkte C von S concentrirten Masse m von S. Folglich ist das Potential von S' für den ganzen äusseren Raum dasselbe, wie das Potential der entsprechenden Masse, wenn diese in C', der transformirten Lage von C, concentrirt ist. Diese Masse ist natürlich gleich der Masse von B', und man kann leicht beweisen, dass C' die Lage des Bildes von O in der Kugelfläche von B' ist. Wir schliessen daraus, dass eine volle Kugel, deren Dichtigkeit sich umgekehrt wie die fünfte Potenz des Abstandes von einem äusseren Punkte O ändert, jeden äusseren Punkt ebenso anzieht, wie wenn ihre Masse in dem Bilde von O, was ihre Oberfläche entwirft, vereinigt wäre. Es ist leicht, dies durch directe Integration für Punkte der Axe zu

bewahrheiten; die allgemeine Wahrheit des Satzes folgt dann nach § 490.

519. Attraction eines Ellipsoides. — Die Bestimmung der Attraction eines Ellipsoides oder einer ellipsoidischen Schicht ist ein sehr interessantes Problem, und ihre Ergebnisse werden uns später, namentlich in der Theorie des Magnetismus, von grossem Nutzen sein. Wir haben mit der Behandlung dieses Gegenstandes bis jetzt gewartet, um die Eigenschaften des Potentials dabei benutzen zu können, die eine äusserst elegante Darstellung ermöglichen. Zunächst lassen wir einige wenige Definitionen und Hülfssätze folgen, die im Folgenden benutzt werden:

Correspondirende Punkte auf zwei confocalen Ellipsoiden sind solche, welche zusammenfallen, wenn eines der Ellipsoide durch eine reine Deformation mit dem anderen zur Deckung gebracht wird.

Es lässt sich leicht zeigen, dass, wenn P, Q zwei auf einer ellipsoidischen Schicht liegende Punkte und p, q die ihnen correspondirenden Punkte der zweiten Schicht sind, $Pq = Qp$ sein wird. Der Beweis ist folgender: —

Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

und

$$\frac{x^2}{a^2+h} + \frac{y^2}{b^2+h} + \frac{z^2}{c^2+h} = 1 \tag{2}$$

die Gleichungen zweier beliebigen confocalen Ellipsoide sind, und $P\ [\xi, \eta, \zeta]$ ein Punkt von (1) ist, so ist

$$p\left[\frac{\sqrt{a^2+h}}{a}\xi,\ \frac{\sqrt{b^2+h}}{b}\eta,\ \frac{\sqrt{c^2+h}}{c}\zeta\right]$$

offenbar ein Punkt von (2) und zwar der P correspondirende Punkt. Sind ferner $Q\ [\xi', \eta', \zeta']$ und q zwei andere correspondirende Punkte, so ist

$$Pq^2 = \left(\xi - \frac{\sqrt{a^2+h}}{a}\xi'\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{b^2+h}}{b}\eta'\right)^2 + \left(\zeta - \frac{\sqrt{c^2+h}}{c}\zeta'\right)^2$$

$$Qp^2 = \left(\xi' - \frac{\sqrt{a^2+h}}{a}\xi\right)^2 + \left(\eta' - \frac{\sqrt{b^2+h}}{b}\eta\right)^2 + \left(\zeta' - \frac{\sqrt{c^2+h}}{c}\zeta\right)^2.$$

Es ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} Pq^2 - Qp^2 &= \left(\frac{a^2+h}{a^2} - 1\right)(\xi^2 - \xi'^2) + \cdots \\ &= h\left\{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{\xi'^2}{a^2} - \frac{\eta'^2}{b^2} - \frac{\zeta'^2}{c^2}\right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Eine Schale von der Art, wie wir sie am zweckmässigsten als Element eines homogenen Ellipsoides anwenden, wird von ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen ellipsoidischen Schichten begrenzt, und aus den Eigenschaften der reinen Deformation (§ 182) erhellt, dass eine solche Schale aus einer Kugelschale von gleichförmiger Dicke durch einfache Ausdehnungen und Zusammenziehungen in drei zu einander rechtwinkligen Richtungen erzeugt werden kann. Im Folgenden wird das Wort „Schale“, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt ist, immer eine unendlich dünne Schale dieser Art bezeichnen.

520. Da eine homogene Kugelschale nach § 462 keine Anziehung auf einen inneren Punkt ausübt, so übt auch eine von ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Ellipsoiden begrenzte homogene Schale (die nicht unendlich dünn zu sein braucht) keine Anziehung auf einen inneren Punkt aus.

Denn nehmen wir an, die Kugelschale des § 462 werde durch einfache Ausdehnungen und Zusammenziehungen in drei zu einander senkrechten Richtungen in eine ellipsoidische Schicht transformirt. In diesem deformirten Zustande sind die Massen aller Theile im Verhältniss der Masse des Ellipsoides zu derjenigen der Kugel verringert oder vergrössert. Auch ist das Verhältniss der Linien HP, PK nach § 158 unverändert geblieben. Folglich ziehen die Elemente IH, KL den Punkt P noch mit gleicher Kraft an, und hieraus ergibt sich der Satz wie in § 462.

Danach ist das Potential im Innern der Schale constant.

521. Vergleich der Potentiale zweier Schalen. — Wenn zwei confocale Schalen (§ 519) gegeben sind, so verhält sich das Potential der ersteren für irgend einen Punkt P der Oberfläche der zweiten zu dem Potential der zweiten für den correspondirenden Punkt p der Oberfläche der ersteren, wie die Masse der ersteren zur Masse der zweiten Schale. Dieser schöne Satz ist von Chasles entdeckt worden.

Jedem Massenelement der äusseren Schale in Q entspricht ein Massenelement der inneren Schale in q. Das Verhältniss eines solchen Elements zur Gesammtmasse der entsprechenden Schale ist für beide Schalen dasselbe, und zwar gleich dem Verhältniss des correspondirenden Elements der Kugelschicht, aus welcher jede der beiden Schalen gebildet werden kann, zur ganzen Masse dieser Kugelschicht. Da nun $Pq = Qp$ ist, so gilt der Satz für die in Q und q liegenden correspondirenden Elemente, folglich auch für die ganzen Schalen.

Da das Potential einer Schale für einen inneren Punkt constant ist, und da von zwei confocalen Ellipsoiden das eine gänzlich innerhalb des anderen liegt, so ergibt sich auch, dass für jede solche Schale die äusseren Oberflächen constanten Potentials confocale Ellipsoide sind, und dass folglich die Attraction der Schale auf einen äusseren Punkt normal zu einem durch diesen Punkt gehenden confocalen Ellipsoide ist.

522. Attraction eines homogenen Ellipsoides. — Nun ist in § 478 gezeigt worden, dass die Attraction einer Schale auf einen ihrer Oberfläche nahe liegenden äusseren Punkt grösser ist, als die Attraction auf einen unendlich nahe liegenden inneren Punkt und zwar um die Grösse $4\pi\varrho$, wo ϱ die Flächendichtigkeit der Schale in jenem Punkte ist. Da nun (§ 520) ein innerer Punkt keine Attraction erleidet, so ist die Attraction einer Schale auf einen Punkt ihrer äusseren Oberfläche gleich $4\pi\varrho$ oder gleich $4\pi\varrho t$, wenn ϱ jetzt die Volumendichtigkeit und t die (unendlich kleine) Dicke der Schale bezeichnet, § 491 (f). Hieraus können wir unmittelbar die gesammte Attraction bestimmen, welche ein homogenes Ellipsoid auf einen äusseren materiellen Punkt ausübt.

Es seien a_0, b_0, c_0 die Axen des anziehenden Ellipsoides und $a = a_0\vartheta$, $b = b_0\vartheta$, $c = c_0\vartheta$ die Axen einer beliebigen ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Oberfläche, welche innerhalb des Ellipsoides sich befindet, so dass ϑ ein echter Bruch ist. Wir betrachten eine Schale, welche von Oberflächen begrenzt wird, die beziehungsweise den Werthen ϑ und $\vartheta - d\vartheta$ entsprechen. Ihre Anziehung auf einen äusseren Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ verhält sich zu derjenigen einer Schale, deren Oberflächen mit den ersteren confocal sind, und deren äussere Oberfläche durch P geht, wie die Masse der ersteren Schale zu derjenigen der zweiten. Wenn A, B, C die Axen dieser ersteren Oberfläche sind, so haben wir

$$(1) \qquad \begin{cases} A^2 = a^2 + h = a_0^2\vartheta^2 + \vartheta^2\varphi^2 \\ B^2 = b^2 + h = b_0^2\vartheta^2 + \vartheta^2\varphi^2 \\ C^2 = c^2 + h = c_0^2\vartheta^2 + \vartheta^2\varphi^2, \end{cases}$$

wo φ eine neue Veränderliche ist, welche mit ϑ durch die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = 1,$$

oder

$$(3) \qquad \frac{\xi^2}{a_0^2 + \varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2 + \varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2 + \varphi^2} = \vartheta^2$$

verbunden ist. Nun ist klar, dass, wenn $A - dA$, $B - dB$, $C - dC$ die Axen der inneren Oberfläche der neuen Schale sind,

$$\frac{dA}{A} = \frac{dB}{B} = \frac{dC}{C} = \frac{da}{a} = \frac{db}{b} = \frac{dc}{c} = \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

ist, und dass man, wenn ϖ die vom Mittelpunkt auf die durch P gehende Tangentialebene gezogene Senkrechte und t die Dicke der Schale in diesem Punkte P ist,

$$\frac{t}{\varpi} = \frac{dA}{A} = \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

hat. Auch ist nach einem geometrischen Satze

$$\frac{1}{\varpi^2} = \frac{\xi^2}{A^4} + \frac{\eta^2}{B^4} + \frac{\zeta^2}{C^4}, \tag{4}$$

und die Richtungscosinus von ϖ sind

$$\frac{\varpi\,\xi}{A^2},\ \frac{\varpi\,\eta}{B^2},\ \frac{\varpi\,\zeta}{C^2}.$$

Die der x-Axe parallele Componente der Attraction der Schale $[\vartheta, \vartheta - d\vartheta]$ ist daher

$$4\pi\varrho\,\frac{a_0 b_0 c_0 \vartheta^3}{ABC}\,\varpi\,\frac{d\vartheta}{\vartheta}\,\frac{\varpi\xi}{A^2} = 4\pi\varrho a_0 b_0 c_0\,\xi\,\frac{\varpi^2\vartheta^2 d\vartheta}{A^3 BC}.$$

Um die ganze Attraction in dieser Richtung zu erhalten, haben wir nur diesen Ausdruck nach ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 1$ zu integriren.

Die Integration lässt sich leichter ausführen, wenn wir φ zur unabhängig Veränderlichen machen. Durch Differentiation von (3) ergibt sich

$$-\frac{1}{\varpi^2}\,\varphi\,d\varphi = \frac{d\vartheta}{\vartheta^3},$$

und folglich ist die ganze Attraction

$$-4\pi\varrho a_0 b_0 c_0\,\xi \int \frac{\vartheta^5\varphi\,d\varphi}{A^3 BC}$$

$$= -2\pi\varrho a_0 b_0 c_0\,\xi \int \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2+\varphi^2)^3(b_0^2+\varphi^2)(c_0^2+\varphi^2)}}.$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus (3), wenn wir bedenken, dass nach ϑ zwischen 0 und 1 hätte integrirt werden müssen. Die neuen Grenzen sind offenbar ∞ und die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a_0^2+\varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2+\varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2+\varphi^2} = 1.$$

Wird diese Wurzel α^2 genannt, so ist

$$\tfrac{3}{2}\,M\xi \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2+\varphi^2)^3(b_0^2+\varphi^2)(c_0^2+\varphi^2)}} \tag{5}$$

die x-Componente der Attraction; darin bezeichnet M die Masse des Ellipsoides.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die drei Componenten der Attraction von dem einen elliptischen Integrale

$$\Phi = \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2+\varphi^2)(b_0^2+\varphi^2)(c_0^2+\varphi^2)}}$$

abhängen, und zwar ist

$$X = -\,{}^3\!/_2\, M\xi \frac{d\Phi}{d(a_0^2)},$$

und in ähnlicher Weise werden Y und Z durch die beziehungsweise nach b_0^2 und c_0^2 genommenen partiellen Differentialquotienten von Φ ausgedrückt; α wird dabei als eine Constante behandelt. Wenn der angezogene Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoides liegt, so hat man weiter keine Aenderung vorzunehmen, als $\alpha = 0$ zu setzen.

Attraction eines Rotationsellipsoides. — Wird $c_0 = b_0$ gesetzt, so verwandelt sich das Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid, und man erhält für die der Axe parallele Componente der Attraction

$${}^3\!/_2\, M\xi \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{(a_0^2+\varphi^2)^{3/2}(b_0^2+\varphi^2)},$$

wo α^2 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a_0^2+\alpha^2} + \frac{\eta^2+\zeta^2}{b_0^2+\alpha^2} = 1$$

ist.

Dies Integral lässt sich natürlich leicht in endlichen Ausdrücken angeben. Es genügt aber, wie wir alsbald sehen werden, seinen Werth für einen auf der Oberfläche liegenden Punkt zu bestimmen. Für einen solchen Punkt ist

$$X = {}^3\!/_2\, M\xi \int_0^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{(a_0^2+\varphi^2)^{3/2}(b_0^2+\varphi^2)}. \tag{6}$$

Um diesen Ausdruck für ein abgeplattetes Sphäroid in reellen endlichen Gliedern darzustellen, nehmen wir

$$b_0^2 = a_0^2 + b_0^2 e^2$$

an; dann geht das bestimmte Integral über in

$$\int_0^{\infty} \frac{d(\varphi^2+a_0^2)}{(a_0^2+\varphi^2)^{3/2}(a_0^2+b_0^2e^2+\varphi^2)} = \int_{a_0^2}^{\infty} \frac{d(\omega^2)}{\omega^3(b_0^2e^2+\omega^2)}$$

$$= \frac{2}{b_0^3 e^3}\left(\frac{b_0 e}{a_0} - \arctan \frac{b_0 e}{a_0}\right).$$

Nun ist

$$M = {}^4\!/_3\, \pi\varrho\, b_0^2\sqrt{1-e^2},$$

folglich erhält man leicht

$$X = 4\pi\varrho\xi\left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e\right). \tag{7}$$

Für eine der zur Axe senkrechten Componenten erhalten wir

$${}^3\!/_2\, M\eta \int_{\alpha^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{(b_0^2+\varphi^2)^2\sqrt{a_0^2+\varphi^2}},$$

und dieser Ausdruck verwandelt sich, wenn der Punkt auf der Oberfläche liegt, in

(8) $$Y = \frac{3}{2} M \eta \int_0^\infty \frac{d(\varphi^2)}{(b_0^2 + \varphi^2)^2 \sqrt{a_0^2 + \varphi^2}}.$$

Das bestimmte Integral lässt sich leicht auf

$$2 \int_{a_0}^\infty \frac{dz}{(b_0^2 e^2 + z^2)^2} = \frac{1}{b_0^3 e^3} \left(arctan \frac{b_0 e}{a_0} - \frac{a_0 e}{b_0} \right)$$

reduciren; folglich ist

(9) $$Y = 2 \pi \varrho \eta \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2} \right).$$

523. Der Maclaurin'sche Satz. — Aus den Ergebnissen der letzten Untersuchung können wir leicht den folgenden schönen Satz herleiten, der nach seinem Entdecker der Maclaurin'sche Satz genannt wird: —

Zwei homogene und confocale Ellipsoide üben auf irgend einen und denselben Punkt, der entweder ausserhalb beider oder ausserhalb des einen und auf der Oberfläche des zweiten Ellipsoides liegt, Anziehungen aus, welche die nämliche Richtung haben und sich wie die Massen der anziehenden Körper verhalten.

Die x-Componente ist, wie oben,

$$\frac{3}{2} M \xi \int_{\alpha^2}^\infty \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_0^2 + \varphi^2)^3 (b_0^2 + \varphi^2)(c_0^2 + \varphi^2)}},$$

wo α^2 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a_0^2 + \varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2 + \varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2 + \varphi^2} = 1$$

ist. Für ein confocales Ellipsoid sind die Axen

$$a_1^2 = a_0^2 + h, \quad b_1^2 = b_0^2 + h, \quad c_1^2 = c_0^2 + h,$$

und die x-Componente ist

$$\frac{3}{2} M_1 \xi \int_{\alpha_1^2}^\infty \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_1^2 + \varphi^2)^3 (b_1^2 + \varphi^2)(c_1^2 + \varphi^2)}},$$

wo α_1^2 die positive Wurzel von

$$\frac{\xi^2}{a_1^2 + \varphi^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2 + \varphi^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2 + \varphi^2} = 1$$

ist. Setzen wir in das erstere Integral und in die Gleichung, welche dessen Grenzen bestimmt, $h + \varphi^2$ statt φ^2 ein, so gelangen wir zum zweiten Integral und zur Gleichung für die Grenzen desselben. Folglich sind die Integrale einander gleich, und die entsprechenden Componenten der Attraction verhalten sich wie M zu M_1.

524. Der Ivory'sche Satz. — Auf ähnliche Weise könne
wir leicht den Ivory'schen Satz beweisen: —

Werden auf den Oberflächen zweier homogenen con-
focalen Ellipsoide E, e zwei correspondirende Punkte P, p
angenommen, so verhält sich die x-Componente der von
E auf p ausgeübten Attraction zu der x-Componente der
Attraction von e auf P, wie die Fläche des Schnittes von
E durch die Ebene der yz zu der Fläche des Schnittes von
e durch dieselbe Ebene.

Die x-Componente der Anziehung der Masse M auf den Punkt $\xi, \eta,$
ist schon gegeben [§ 522 (5)]. Diejenige von M_1 auf $\frac{a_0}{a_1}\xi$, $\frac{b_0}{b_1}\eta$, $\frac{c_0}{c_1}\zeta$ i

$$\tfrac{3}{2} M_1 \frac{a_0}{a_1}\xi \int_{\alpha_1^2}^{\infty} \frac{d(\varphi^2)}{\sqrt{(a_1^2+\varphi^2)^3(b_1^2+\varphi^2)(c_1^2+\varphi^2)}},$$

wo α_1^2 die positive Wurzel von

$$\frac{\xi^2}{a_1^2+\varphi^2}+\frac{\eta^2}{b_1^2+\varphi^2}+\frac{\zeta^2}{c_1^2+\varphi^2}=1$$

oder von

$$\frac{\xi^2}{a_0^2+h+\varphi^2}+\frac{\eta^2}{b_0^2+h+\varphi^2}+\frac{\zeta^2}{c_0^2+h+\varphi^2}=1$$

ist. Nun sind die Integrale offenbar einander gleich, und die ganz
Ausdrücke verhalten sich wie M zu $M_1\frac{a_0}{a_1}$, d. h. wie $b_0 c_0$ zu $b_1 c_1$.

Poisson hat gezeigt, dass dieser Satz für jedes beliebige G
setz der Anziehung gilt. Man kann dies leicht dadurch beweis
dass man in den allgemeinen Ausdrücken für die Componenten d
Attraction irgend eines Körpers nach einer Integration die Eige
schaften der correspondirenden Punkte confocaler Ellipsoide (§ 51
benutzt.

**525. Attractionsgesetz im Falle einer gleichförmig bele
ten Kugelschale, die keine Wirkung auf einen inneren Punk
ausübt.** — Wir wollen eine von Duhamel herrührende geistreich
Anwendung des Ivory'schen Satzes nicht unerwähnt lassen. Con-
centrische Kugeln sind ein besonderer Fall confocaler Ellipsoid
Folglich verhält sich die Anziehung irgend einer Kugel auf eine
Punkt der Oberfläche einer innerhalb der ersteren liegenden con-
centrischen Kugel zu der Anziehung, welche die zweite Kugel au
einen Punkt der Oberfläche der ersteren ausübt, wie das Quadra
des Radius der ersteren zum Quadrate des Radius der zweiten Ku-
gel. Wenn nun das Attractionsgesetz ein solches sei

ll, dass eine homogene Kugelschale auf einen Punkt in irem Innern keine Anziehung ausübe, so kann man die irkung der grösseren Kugel auf den inneren Punkt durch dieaige der kleineren Kugel auf denselben Punkt ersetzen, und dars ergibt sich leicht, dass die Wirkung einer Kugel auf äussere mkte, die in beliebigen Entfernungen von ihrem Mittelpunkte gen, im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate dieser Entferngen steht. Da man nun die Kugel beliebig klein annehmen nn, so gilt dasselbe Gesetz auch für die Wirkung eines materiela Punktes auf irgend welche Punkte. Wir erhalten also den zust von Cavendish ausgesprochenen Satz: —

Das einzige Anziehungsgesetz, für welches eine hoogene Kugelschicht keine Wirkung auf die Punkte ihres inern ausübt, ist das des umgekehrten Quadrates der ntfernung.

526. Attractionscentrum. (Definition.) — Wenn die Wirmg der terrestrischen oder einer anderen Schwerkraft auf einen rren Körper sich auf eine einzige Kraft reduciren lässt, deren ichtung immer durch einen in Beziehung auf den Körper festen mkt geht, welche relative Lage der Körper auch zur Erde oder der anderen anziehenden Masse haben möge, so nennt man esen Punkt das Attractionscentrum*) und den Körper selbst nen centrobarischen Körper.

527. Eins der überraschendsten Ergebnisse der wundervollen reen'schen Theorie des Potentials ist der Nachweis der Exienz centrobarischer Körper, und die Entdeckung der Eigenhaften derselben ist gewiss eine der merkwürdigsten und interesntesten von den verschiedenen Anwendungen dieser Theorie.

528. Eigenschaften der centrobarischen Körper. — Wenn n Körper (B) in Beziehung auf irgend eine anziehende Masse (A) ntrobarisch ist, so ist er auch in Beziehung auf jede andere Masse ntrobarisch und zieht jede äussere Masse ganz so an, wie wenn ine eigene Masse in seinem Attractionscentrum vereinigt wäre**).

Es sei O irgend ein Punkt, der so weit von B entfernt ist, ss eine um ihn als Mittelpunkt beschriebene Kugel, die keinen heil von B enthält, gross genug ist, die ganze Masse A zu um-

*) Die Verfasser brauchen hierfür den Namen „centre of gravity", was nach sherigem englischen Sprachgebrauche dem im Deutschen mit „Schwerpunkt" zeichneten Begriffe entsprach. Die Uebersetzer haben geglaubt, besser einen uen Namen dafür einführen zu müssen, um nicht durch Umdeutung eines viel braurhten älteren Namens Verwirrung zu erregen.

**) Thomson, Proc. R. S. E., Feb. 1864.

schliessen. Wir denken uns, A sei in irgend eine solche Kugel g
setzt und rotire um eine beliebige durch O gehende Axe OK. Di
Richtung der Anziehung, die A auf B ausübt, wird immer dur
das Attractionscentrum G von B gehen. Wenn also jedes Massenthei
chen von A gleichförmig über die Peripherie des Kreises verthei
wird, den es bei dieser Rotation beschreibt, so wird die so erhalten
Masse den Körper B in einer gleichfalls durch G gehenden Ric
tung anziehen. Dies wird der Fall sein, wie auch immer diese Mas
um O rotirt; denn bevor wir dieselbe erhielten, hätten wir A u
OK in irgend einer Weise um O rotiren lassen können, ohne da
die relative Lage von A und OK zu ändern. Wir haben also ei
um eine Axe OK symmetrischen Körper A' gefunden, in Beziehu
auf welchen B nothwendig centrobarisch ist. Es möge jetzt, wä
rend O fest bleibt, OK und der damit verbundene Körper A' su
cessive in eine unendliche Anzahl n Lagen versetzt werden, wel
gleichförmig um O vertheilt sind, d. h. welche so gewählt werd
dass in allen um O liegenden gleichen Kegelecken gleichviel L
gen von OK vorhanden sind. In jeder der Lagen, in welche
mit OK fest verbundene Körper A' auf diese Weise gelangt, m
$\frac{1}{n}$ seiner Masse zurückgelassen werden. Von der so vertheil
Masse A erleidet B immer noch eine Einwirkung, deren Richt
durch G geht. Da die Vertheilung jetzt aber um O herum n
allen Seiten hin symmetrisch ist, so besteht sie aus gleichförmig
concentrischen Schichten, und nach § 471 kann die Masse je
Schicht in O concentrirt werden, ohne dass die Anziehung auf
gend ein Theilchen von B, also auch die ganze auf B ausgeü
Anziehung eine Aenderung erlitte. B ist danach in Beziehung
eine in O befindliche Masse centrobarisch; es ist dies ein beliebi
Punkt, der (nach der oben gegebenen Bedingung) über eine gewi
Grenze hinaus sich B nicht nähern darf. Jeder Punkt, der di
Anforderung erfüllt, wird also von B in einer durch G gehend
Richtung angezogen, und somit sind über den Grenzabstand hinau
die Oberflächen constanten Potentials von B Kugelflächen, die s
gemeinschaftlichen Mittelpunkt G haben. B zieht daher Punkt
welche über diese Entfernung hinausliegen, ganz so an, wie wen
seine Masse in G concentrirt wäre, und daraus folgt (§ 497), da
auch alle ausserhalb B liegenden Punkte in dieser Weise von
angezogen werden. Es wird also auch jede Punktgruppe oder je
beliebige ausserhalb B liegende Masse von B so angezogen, w
wenn die gesammte Masse von B sich im Punkte G befände.

529. Mit Rücksicht hierauf zeigen die §§ 497, 492 Folndes: —

(a) Das Attractionscentrum eines centrobarischen Körrs liegt nothwendig in dessen Innern, oder, mit anderen orten, kann von einem äusseren Punkte aus nur auf einem e Masse durchschneidenden Wege erreicht werden.

(b) Kein centrobarischer Körper kann aus Theilen stehen, die so von einander getrennt sind, dass der um, welchen jeder einnimmt, für die anderen ein sserer sei; mit anderen Worten: Die äussere Umgrenzung des centrobarischen Körpers ist eine einzige geschlosne Oberfläche.

Aus (a) erkennen wir, dass kein symmetrischer Ring oder hoh- Cylinder mit offenen Enden ein Attractionscentrum haben kann; an wenn ein solcher vorhanden wäre, so müsste er in der Axe, o ausserhalb der Masse des Körpers liegen.

530. Wenn eine beliebige Masse M und eine einzige e vollständig umschliessende geschlossene Oberfläche gegeben ist, so kann eine beliebig gegebene Masse M' über S vertheilt werden, dass M und M' zusammen einen ntrobarischen Körper ausmachen, dessen Attractionsntrum eine innerhalb der Oberfläche beliebig gegebene ge G einnimmt.

Die Bedingung, die hier erfüllt werden muss, besteht darin, so über S zu vertheilen, dass dadurch für irgend einen Punkt von S das Potential

$$\frac{M+M'}{EG} - V$$

eugt werde; V bezeichnet das Potential von M für diesen Punkt. ss diese Aufgabe eine und nur eine Lösung hat, wurde schon en (§ 499) bewiesen. Es ist aber zu bemerken, dass, wenn die gebene Masse M' nicht gross genug ist, eine durch eine gleiche nge negativer Masse neutralisirte zusätzliche Masse genommen rden muss, um die geforderte Vertheilung auf S auszuführen.

Der Fall, in welchem innerhalb S kein Körper M gegeben ist, rdient besonders hervorgehoben zu werden. Er liefert das folnde Resultat: —

531. Centrobarische Schichten. — Eine gegebene Stoffenge lässt sich in einer, aber auch nur einer Weise so ber eine beliebig gegebene geschlossene Oberfläche vertheilen, dass sie einen centrobarischen Körper bildet,

dessen Attractionscentrum ein innerhalb der Oberfläc
beliebig gegebener Punkt ist.

So haben wir schon gesehen, dass, wenn die Oberfläche sph
risch ist, die Bedingung dadurch erfüllt wird, dass man die Dichti
keit der dritten Potenz des Abstandes von dem gegebenen Punkte um
gekehrt proportional macht. Aus dem, was oben in §§ 501, 506 bewi
sen wurde, erhellt auch, dass aus jeder der beiden Hälften der Lemni
kate in der Figur 19 des § 508 oder aus jedem der darin enthalten
Ovale eine centrobarische Schicht hergestellt werden kann, we
man darüber eine Masse ausbreitet, deren Dichtigkeit der Res
tante der von m auf I und von m' auf I' ausgeübten Kräfte p
portional ist; der eine dieser Punkte, der innerhalb der Schi
liegt, ist das Attractionscentrum derselben. Allgemein, wenn man d
Flächen constanten Potentials für eine in einem Punkte I conc
trirte Masse m und für eine beliebige andere Masse zieht, die d
Punkt I nicht umgiebt, und sodann eine dieser Oberflächen nim
welche I, aber keinen anderen Theil der Masse umschliesst, so l
ren uns Green's allgemeines Theorem und der specielle Satz d
§ 506, wie man über dieselbe eine Masse zu vertheilen hat, das
sie eine centrobarische Schicht mit dem Attractionscentrum I wer

532. In der Hydrokinetik wird dasselbe Problem mitt
convergirender Reihen für einen Würfel oder allgemein für e
rechtwinkliges Parallelepipedon gelöst werden. In der Lehre v
der Elektricität (in einem späteren Bande) werden wir eine L
sung desselben in endlichen algebraischen Ausdrücken für die Ob
fläche einer Linse finden, welche von zwei Kugelflächen begre
wird, die einander unter einem beliebigen Submultiplum von zw
rechten Winkeln schneiden, und für jeden Theil, den man erh
wenn man diese Oberfläche durch eine dritte jede ihrer Seiten rech
winklig schneidende Kugelfläche in zwei Theile theilt.

533. **Centrobarische Körper.** — Eine Masse kann a
unendlich viele Arten so durch einen gegebenen geschlo
senen Raum vertheilt werden, dass sie einen centrobar
schen Körper bildet, der einen im Innern dieses Raum
beliebig gegebenen Punkt als Attractionscentrum hat.

Denn der ganze Raum zwischen dem gegebenen Punkte u
der gegebenen geschlossenen Oberfläche kann durch eine unendlic
Anzahl von Oberflächen, deren jede diesen Punkt umgibt, in unen
lich dünne Schichten zertheilt werden, und über jede dieser Schic
ten kann man in der Weise eine Masse vertheilen, dass sie centr
barisch wird und den gegebenen Punkt zum Centrum hat. Sowo

ie Formen dieser Schichten, als auch die darüber vertheilten Stoffengen können nach Willkür auf unendlich viele Weisen variirt erden.

Wenn z. B. die gegebene geschlossene Oberfläche das zugeitzte Oval ist, welches eine Hälfte der Lemniskate der Figur 19 508) bildet, und wenn der gegebene Punkt der im Inneren dier Oberfläche liegende Punkt I ist, so kann man einen centrobarihen Körper dadurch erhalten, dass man über die inneren Ovale der Art Materie vertheilt, dass sie centrobarische Schichten werm (§ 531). Aus dem Ergebnisse des § 518 ersehen wir, dass ne Kugel, bei welcher die Dichtigkeit der fünften Potenz des Abandes von einem äusseren Punkte umgekehrt proportional ist, einen ntrobarischen Körper bildet, dessen Attractionscentrum das Bild 512) dieses Punktes in Beziehung auf die Oberfläche der Kugel ist.

534. Das Attractionscentrum eines centrobarischen Körers fällt mit dem Trägheitsmittelpunkt zusammen. — Das ntrum eines centrobarischen Körpers, dessen Masse der Schwerkraft hterworfen ist, ist der Trägheitsmittelpunkt (Schwerpunkt) desselben. enn wenn ein centrobarischer Körper nur von einem unendlich weit tfernten anderen Körper, oder von einer Masse angezogen wird, die um ihn herum vertheilt ist, dass sie (§ 499) gleichförmige Kräfte on parallelen Richtungen in dem ganzen von ihr eingenommenen aume erzeugt, so geht die Resultante der Kräfte, die auf den Körer wirken, beständig durch sein Attractionscentrum. In diesem Falle t diese Kraft aber die Resultante der auf alle Theilchen des Körers wirkenden parallelen Kräfte, und diese sind (siehe unten das apitel über die Eigenschaften der Materie) den Massen der heilchen in aller Strenge proportional. Die Resultante eines solhen Systems paralleler Kräfte geht, wie wir in § 561 zeigen weren, durch den in § 230 als Trägheitsmittelpunkt definirten Punkt.

535. Kinetische Symmetrie eines Körpers in Beziehung uf sein Attractionscentrum. — Die Trägheitsmomente eines centobärischen Körpers sind für alle durch seinen Trägheitsmittelpunkt ehenden Axen einander gleich. Mit anderen Worten (§ 285): alle iese Axen sind Hauptaxen, und der Körper besitzt in Beziehung uf seinen Schwerpunkt kinetische Symmetrie.

Der Körper werde in eine geschlossene Oberfläche gesetzt, so dass ein Trägheitsmittelpunkt in den Anfangspunkt der Coordinaten O fällt. Jeber diese Fläche sei (§ 499) eine Masse so vertheilt, dass sie für jeden nneren Punkt (x, y, z) das Potential xyz habe (welches der Bedingung $\nabla^2(xyz) = 0$ genügt). Die Resultante der auf den Körper ausgeübten Wirkungen ist (§ 528) dieselbe, wie wenn seine Masse in O concentrirt

wäre, d. h. sie ist Null; mit anderen Worten: die auf die verschiedenen Theile des Körpers wirkenden Kräfte müssen einander das Gleichgewicht halten. Bezeichnet daher ϱ die Dichtigkeit des Körpers im Punkte (x, y, z), so ist (§ 551, 1, unten)

$$\iiint yz \,.\, \varrho \, dx\, dy\, dz = 0, \quad \iiint zx \,.\, \varrho \, dx\, dy\, dz = 0,$$

$$\iiint xy \,.\, \varrho \, dx\, dy\, dz = 0.$$

Folglich sind OX, OY, OZ Hauptaxen, wie auch immer der Körper gedreht werde, wenn nur sein Schwerpunkt unverrückt in O bleibt.

Dies auf eine andere Weise darzuthun, nehmen wir an, es sei V das Potential des gegebenen Körpers im Punkte (x, y, z), u irgend eine Function von x, y, z und ϖ das dreifache Integral

$$\iiint \left(\frac{du}{dx}\frac{dV}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dV}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dV}{dz}\right) dx\, dy\, dz,$$

das innerhalb einer Kugelfläche S zu nehmen ist, welche den ganzen gegebenen Körper umgibt und dessen Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat. Dann hat man, wie in Cap. I, Zusatz A,

$$\varpi = \iint \delta u \, V d\sigma - \iiint V \nabla^2 u \, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint \delta \, V u \, d\sigma - \iiint u \nabla^2 V \, dx\, dy\, dz.$$

Wenn aber m die ganze Masse des gegebenen Körpers und a der Radius von S ist, so hat man für die ganze Oberfläche von S

$$V = \frac{m}{a} \text{ und } \delta V = -\frac{m}{a^2}.$$

Auch ist [§ 491 (c)]

$$\nabla^2 V = -4\pi\varrho,$$

und für alle der Masse des gegebenen Körpers nicht angehörenden Punkte $\nabla^2 V = 0$. Mithin ergibt sich aus dem Vorhergehenden

$$4\pi \iiint u \varrho \, dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{m}{a^2} \iint (a\delta u + u)\, d\sigma - \iiint V \nabla^2 u \, dx\, dy\, dz.$$

Es möge nun u irgend eine Function sein, welche im Innern von S überall der Bedingung $\nabla^2 u = 0$ genügt, so dass nach § 492 $\iint \delta u \, d\sigma = 0$ und nach § 496 $\iint u \, d\sigma = 4\pi a^2 u_0$ ist, wo u_0 den Werth bezeichnet, den u im Mittelpunkt von S hat. Es ist dann

$$\iiint u \varrho \, dx\, dy\, dz = m u_0.$$

Ist z. B. $u = yz$, also $u_0 = 0$, so erhalten wir, wie wir schon oben fanden,

$$\iiint yz \varrho \, dx\, dy\, dz = 0.$$

Oder es sei

$$u = (x^2 + y^2) - (x^2 + z^2),$$

also wieder $u_0 = 0$. Dann folgt

$$\int\int\int (x^2 + z^2)\varrho\, dx\, dy\, dz = \int\int\int (x^2 + y^2)\varrho\, dx\, dy\, dz,$$

d. h. das Trägheitsmoment in Beziehung auf OY ist gleich demjenigen in Beziehung auf OX, was den aus dem anderen Resultate gezogenen Schluss bewahrheitet.

536. Ursprung der Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen. — Die Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen, welche den Gegenstand eines Zusatzes zum I. Capitel bildet, hatte ihren Ursprung in der mit besonderer Rücksicht auf die Gestalt der Erde behandelten Theorie der Attraction, indem sie zunächst zu dem Zwecke erfunden wurde, die Attraction eines Körpers von nahezu sphärischer Form in convergenten Reihen auszudrücken. Sie ist auch vollkommen dazu geeignet, das Potential oder die Attraction einer unendlich dünnen sphärischen Schicht auszudrücken, über welche nach einem ganz willkürlichen Gesetze Materie verbreitet ist. Da die letztere Anwendung die einfachere ist, so wollen wir sie zuerst vornehmen.

Anwendung der Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen. — Es seien x, y, z die von dem Centrum O als Anfangspunkt aus gerechneten Coordinaten des in Rede stehenden Punktes P; ϱ und ϱ' die Werthe der Dichtigkeit der Kugelfläche in den Punkten E und E', von denen der erstere der Durchschnittspunkt der Oberfläche mit OP oder der Verlängerung von OP ist; $d\sigma'$ ein in E' liegendes Element der Oberfläche, und a der Radius derselben. Dann haben wir, wenn V das Potential in P ist,

$$V = \int\int \frac{\varrho'\, d\sigma'}{E'P}. \tag{1}$$

Nach B (48) ist aber

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{E'P} &= \frac{1}{a}\left\{1 + \sum_1^\infty Q_n \left(\frac{r}{a}\right)^n\right\}, \text{ wenn } P \text{ ein innerer Punkt ist,} \\ &= \frac{1}{r}\left\{1 + \sum_1^\infty Q_n \left(\frac{a}{r}\right)^n\right\}, \text{ wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist,} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

wo Q_n die zweiaxige harmonische Flächenfunction von (E, E') ist. Wenn also

$$\varrho' = S_0 + S_1 + S_2 + \text{u. s. w.} \tag{3}$$

die harmonische Entwicklung von ϱ ist, so erhalten wir nach B (52)

$$\left\{\begin{aligned} V &= 4\pi a \left\{\sum_0^\infty \frac{S_n}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right\}, \text{ wenn } P \text{ ein innerer Punkt ist,} \\ &= \frac{4\pi a^2}{r}\left\{\sum_0^\infty \frac{S_n}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^n\right\}, \text{ wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist.} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ist z. B. $\varrho = S_n$, so ergibt sich

$$V = \frac{4\pi r^n}{a^{n-1}}\, \frac{S_n}{2n+1} \text{ für ein inneres } P$$

und

$$V = \frac{4\pi a^{n+2}}{r^{n+1}} \frac{S_n}{2n+1} \text{ für ein äusseres } P.$$

Wir entnehmen daraus Folgendes: —

537. Wenn der Ausdruck für die Dichtigkeit einer Masse auf einer Kugelfläche eine harmonische Kugelfunction ist, so ist das Potential für jede innerhalb oder ausserhalb gelegene concentrische Kugelfläche eine ähnliche und ähnlich gelegene Kugelfunction; ebenso ist es mit der in der Richtung des Radius genommenen Componente der Kraft. Die Grösse der letzteren ist aber (§ 478) für zwei einander zu beiden Seiten der Oberfläche unendlich naheliegende Punkte nicht dieselbe, sondern, wenn ϱ die Flächendichtigkeit zwischen beiden Punkten bezeichnet, um $4\pi\varrho$ verschieden.

Bezeichnet R die in der Richtung des Radius genommene Componente der Kraft, so ist

$$(5) \begin{cases} R = -\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi r^{n-1}}{a^{n-1}} \frac{nS_n}{2n+1} \text{ für einen inneren Punkt} \\ \text{und} \\ \quad = \frac{4\pi a^{n+2}}{r^{n+2}} \frac{(n+1)S_n}{2n+1} \text{ für einen äusseren Punkt.} \end{cases}$$

Für $r = a$ ergibt sich also

$$R \text{ (aussen)} - R \text{ (innen)} = 4\pi S_n = 4\pi\varrho.$$

538. Das Potential ist sowohl in dem inneren als auch in dem äussern Raume eine räumliche harmonische Kugelfunction, die im Innern der Kugel von einem positiven, ausserhalb derselben von einem negativen Grade ist. Die auf jeden Raumtheil bezüglichen Ausdrücke für die in der Richtung des Radius genommene Componente der Kraft werden auf dieselbe Form gebracht, wenn man sie mit dem Abstande vom Mittelpunkt multiplicirt.

539. Die harmonische Entwicklung liefert für das Potential einer durch einen Raum irgendwie vertheilten Masse einen Ausdruck in convergirenden Reihen, der in einigen Anwendungen von Nutzen ist.

Es seien x, y, z die Coordinaten des angezogenen Punktes P und x', y', z' diejenigen irgend eines Punktes P' der gegebenen Masse. Ist dann ϱ' die Dichtigkeit der Masse in P' und V das Potential im Punkte P, so haben wir

$$(6) \qquad V = \iiint \frac{\varrho'\, dx'\, dy'\, dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}.$$

Was den Raum betrifft, innerhalb dessen das Integral zu nehmen ist, so stellen wir uns denselben am zweckmässigsten als nach allen Seiten

hin unbegrenzt vor, und nehmen ϱ' als eine discontinuirliche Function von x', y', z' an, die in dem ganzen Raume, der keine Masse enthält, verschwindet.

Nun haben wir nach B (u)

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}} \\ \quad = \dfrac{1}{r'}\left\{1+\sum_1^\infty Q_n\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n\right\}, \text{ wenn } r' > r \\ \text{und } = \dfrac{1}{r}\left\{1+\sum_1^\infty Q_n\left(\dfrac{r'}{r}\right)^n\right\}, \text{ wenn } r' < r. \end{cases}$$

Wird dies in (6) substituirt, so folgt

$$) \begin{cases} V = \left(\int\int\int\right)\dfrac{\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'}{r'} + \dfrac{1}{r}\left[\int\int\int\right]\varrho'\,dx'\,dy'\,dz' \\ + \sum_1^\infty\left\{r^n\left(\int\int\int\right)Q_n\dfrac{\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'}{r'^{n+1}} + \dfrac{1}{r^{n+1}}\left[\int\int\int\right]Q^n\,r'^n\,\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'\right\}, \end{cases}$$

wo $\left(\int\int\int\right)$ eine Integration durch den ganzen ausserhalb der Kugel vom Radius r liegenden Raum und $\left[\int\int\int\right]$ eine Integration durch den von dieser Kugel eingenommenen Raum bezeichnet.

Potential eines entfernten Körpers. — Diese Formel setzt uns in den Stand, die Attraction, welche eine Masse von irgend einer Gestalt auf einen entfernten Punkt ausübt, durch eine einzige convergirende Reihe auszudrücken. So verschwindet die erste Reihe, wenn OP grösser ist, als der grösste Abstand irgend eines Theils des Körpers von O; der Ausdruck wird dann eine einzige nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{r}$ fortschreitende convergente Reihe: —

$$(9)\quad V = \frac{1}{r}\left\{\int\int\int\varrho'\,dx'\,dy'\,dz' + \sum\frac{1}{r^n}\int\int\int Q_n\,r'^n\,\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'\right\}.$$

Wenn wir uns der Bezeichnung von B(u) (52) bedienen, so geht dieser Ausdruck über in

$$(10)\quad \begin{cases} V = \dfrac{1}{r}\left\{\int\int\int\varrho'\,dx'\,dy'\,dz'\right. \\ \quad \left. + \sum_1^\infty r^{-2n}\int\int\int\varrho'\,H_n[(x,y,z),(x',y',z')]\,dx'\,dy'\,dz'\right\}, \end{cases}$$

und wir haben nach B(v') und (w)

$$11)\begin{cases} H_n[(x,y,z),(x',y',z')] = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[\cos^n\vartheta\right. \\ \left. - \dfrac{n(n-1)}{2.(2n-1)}\cos^{n-2}\vartheta + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\vartheta - \text{u.s.w.}\right]r^n\,r'^n, \end{cases}$$

wo

$$\cos\vartheta = \frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}$$

ist. Hieraus erhalten wir

$$H_1 = xx' + yy' + zz'; \; H_2 = 3/_2 [(xx' + yy' + zz')^2$$
$$- 1/_3 (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)]; \text{ u. s. w.}$$

Es bezeichne nun M die Masse des Körpers, und es sei O der Schwerpunkt desselben. Dann ergibt sich

$$\iiint \varrho' \, dx' \, dy' \, dz' = M \text{ und } \iiint \varrho' H_1 \, dx' \, dy' \, dz' = 0.$$

Ferner mögen OX, OY, OZ als Hauptaxen (§§ 281, 282) angenommen werden, so dass

$$\iiint \varrho' y' z' \, dx' \, dy' \, dz' = 0, \text{ u. s. w.}$$

ist, und es seien A, B, C die Trägheitsmomente in Beziehung auf diese Axen. Dies liefert

$$\iiint H_2 \varrho' \, dx' \, dy' \, dz' = 1/_2 \{(3x^2 - r^2) \iiint \varrho' x'^2 dx' dy' dz' + \text{u. s. w.}\}$$
$$= 1/_2 \{(3x^2 - r^2)[1/_2 (A + B + C) - A] + \text{ u. s. w.}\}$$
$$= 1/_2 \{A(r^2 - 3x^2) + B(r^2 - 3y^2) + C(r^2 - 3z^2)\}$$
$$= 1/_2 \{(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2\}.$$

Werden also die Glieder mit unendlich kleinen Grössen dritter und höherer Ordnung $\left(\text{Potenzen von } \frac{r'}{r}\right)$ vernachlässigt, so erhalten wir den folgenden approximativen Ausdruck für das Potential: —

$$(12) \quad V = \frac{M}{r} + \frac{1}{2r^5} \{(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2\}.$$

Als ein Beispiel für die Nützlichkeit dieses Resultates erwähnen wir die Bestimmung der Störung in der Bewegung des Mondes, welche die Abweichung der Erdoberfläche von der Form einer Kugelfläche erzeugt, und die Untersuchung der von derselben störenden Ursache auf die Erde hervorgerufenen Reaction, welche die lunare Nutation und Präcession erzeugt, die später erklärt werden wird.

Wenn wir die Formel (12) differentiiren und nur die Glieder ersten und zweiten Grades beibehalten, so erhalten wir für die Componenten der zwischen dem Körper und einer im Punkte (x, y, z) befindlichen Masseneinheit wirkenden Kraft die Näherungsausdrücke

$$(13) \quad \begin{cases} X = \frac{Mx}{r^3} - \frac{(B + C - 2A)x}{r^5} \\ \quad + 5/_2 \frac{x}{r^7} [(B + C - 2A)x^2 + (C + A - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2] \\ \qquad Y = \text{u. s. w.}, \quad Z = \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

und daraus folgt

$$(14) \quad \begin{cases} Zy - Yz = 3 \frac{(C - B)yz}{r^5}, \\ Xz - Zx = 3 \frac{(A - C)zx}{r^5}, \\ Yx - Xy = 3 \frac{(B - A)xy}{r^5}. \end{cases}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit dem Ergebnisse des Cap. IX (unten) lehrt Folgendes: —

540. Attraction eines Massenpunktes auf einen entfernten Körper. — Wenn die Attraction eines entfernten Punktes P auf einen starren Körper auf den Trägheitsmittelpunkt I dieses Körpers (nach Poinsot's Methode, die unten in § 555 erläutert wird) übertragen wird, so erhält man ein Kräftepaar, das näherungsweise gleich und entgegengesetzt demjenigen ist, welches die resultirende Wirkung der Centrifugalkraft ausmacht, wenn der Körper mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit um IP rotirt. Das Quadrat dieser Winkelgeschwindigkeit ist, abgesehen von der Richtung, der dritten Potenz des Abstandes von P umgekehrt proportional; es ist nämlich numerisch gleich dem Dreifachen des reciproken Werthes der dritten Potenz dieses Abstandes, wenn die Masseneinheit so gewählt wird, dass sie auf eine andere in der Einheit der Entfernung befindliche gleiche Masse die kinetische Krafteinheit (§ 225) ausübt. Das allgemeine Streben des Gravitations-Kräftepaars besteht darin, die Hauptaxe, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum ist, mit dem anziehenden Punkte in eine Richtung zu bringen. Die Ausdrücke der für die Hauptaxen genommenen Componenten des Kräftepaars werden später (Cap. IX) dazu benutzt werden, die Erscheinungen der Präcession und der Nutation zu untersuchen, welche die Anziehungen der Sonne und des Mondes in Folge der Abweichung der Erde von der kugelförmigen Gestalt erzeugen, und die Verzögerung zu bestimmen (Cap. IX), welche die Rotation der Erde dem oben (§ 276) dargelegten Princip gemäss durch die Fluthreibung erleidet.

541. Aus der vorstehenden Betrachtung geht hervor, dass das Gravitations-Kräftepaar dem Cubus des Abstandes des äusseren anziehenden Punktes von dem Trägheitsmittelpunkte des Körpers umgekehrt proportional ist, dass folglich der kürzeste Abstand der Richtung der resultirenden Kraft von dem Trägheitsmittelpunkte umgekehrt wie der Abstand des anziehenden Punktes variirt. Wir sehen so, wie jeder starre Körper, wenn man sich mit einer ersten Annäherung begnügt, in Beziehung auf einen entfernten anziehenden Punkt centrobarisch ist.

542. Die wahre Bedeutung und der Werth, den die Methode der harmonischen Kugelfunctionen für eine feste Masse hat, wird durch die Betrachtung der folgenden Anwendung am besten verstanden werden: —

Es sei

$$(15) \qquad \varrho = F(r) S_n,$$

wo $F(r)$ eine beliebige Function von r und S_n eine harmonische Kugelflächenfunction n ter Ordnung bezeichnet, deren Coefficienten von r unabhängig sind. Wird der entsprechende Werth für ϱ' in (8) substituirt, so erhält man mit Rücksicht auf B (52) und (16)

$$(16) \qquad V = \frac{4\pi S_n}{2n+1}\left\{r^n \int_r^\infty r'^{-n+1} F(r')\,dr' + r^{-n-1}\int_0^r r'^{n+2} F(r')\,dr'\right\}.$$

543. Potential einer festen Kugel, deren Dichtigkeitsausdruck eine harmonische Function ist. — Um ein Beispiel zu geben, wollen wir das Potential einer festen Kugel vom Radius a bestimmen, deren Masse so vertheilt ist, dass der Ausdruck der Dichtigkeit eine räumliche harmonische Kugelfunction V_n ist.

Es soll also

$$\varrho = V_n = r^n S_n \text{ für } r < a$$

und

$$\varrho' = 0 \qquad \text{für } r > a$$

sein. In der vorhergehenden Formel ist somit $F(r) = r^n$ von $r = 0$ bis $r = a$ und $F(r) = 0$, wenn $r > a$ ist. Diese Formel geht daher über in

$$(17) \begin{cases} V = 4\pi V_n \left\{\dfrac{a^2}{2(2n+1)} - \dfrac{r^2}{2(2n+3)}\right\}, & \text{wenn } P \text{ ein innerer Punkt ist,} \\ \text{und} & \\ \quad = \dfrac{4\pi}{(2n+1)(2n+3)} \dfrac{a^{2n+3} V_n}{r^{2n+1}}, & \text{wenn } P \text{ ein äusserer Punkt ist.} \end{cases}$$

Dies Resultat kann man auch mittels der algebraischen Formel B (12) erhalten, nach demselben Princip, nach welchem in § 491 (d) das Potential einer gleichförmigen Kugelschicht bestimmt wurde. Es ist nämlich nach § 491 (c)

$$(18) \qquad \begin{cases} \nabla^2 V = -4\pi V_n, & \text{wenn } r < a \\ \quad\;\; = 0 & \text{, wenn } r > a. \end{cases}$$

Setzt man aber $m = 2$ in B (12), so folgt

$$\nabla^2 (r^2 V_n) = 2(2n+3) V_n,$$

und folglich hat die Gleichung

$$\nabla^2 V = -4\pi V_n$$

die Lösung

$$(19) \qquad V = -4\pi \frac{r^2 V_n}{2(2n+3)} + U,$$

wo U eine beliebige Function ist, die in jedem Punkte des Innern der Kugel der Gleichung

$$\nabla^2 U = 0$$

genügt. Werden U und die Werthe von V ausserhalb der Kugel so gewählt, dass die Werthe von V für Punkte, die zu beiden Seiten der

Kugelfläche einander unendlich nahe liegen, gleich sind, dass ferner die Function $\frac{dV}{dr}$ dieselbe Bedingung erfüllt, und dass V für $r = \infty$, sowie für $r = 0$ verschwindet, so findet man

$$U = 4\pi V_n \frac{a^2}{2(2n+1)},$$

und erhält den Ausdruck (17) für das äussere V. Denn erstens muss offenbar das äussere V von der Form $A \frac{V_n}{r^{n+1}}$ und U von der Form $B V_n$ sein, wo A und B Constanten sind; dann bestimmen die genannten beiden Bedingungen diese Constanten.

544. Entwicklung des Potentials einer beliebigen Masse in eine harmonische Reihe. — Aus dem Zusatz B (51) folgt unmittelbar, dass jede beliebige Function von x, y, z für den ganzen Raum durch eine Reihe harmonischer Kugelflächenfunctionen ausgedrückt werden kann, deren jede Functionen des Abstandes r vom Coordinatenanfangspunkte zu Coefficienten hat. Folglich liefert (16), wenn man S_n unter das Integrationszeichen statt r' setzt, die harmonische Entwicklung des Potentials einer beliebigen Masse. Es ist dies das Resultat der in § 539 (8) angezeigten dreifachen Integration, vorausgesetzt dass die Dichtigkeit der Masse durch eine harmonische Reihe ausgedrückt ist.

545. Anwendung auf die Gestalt der Erde. — Die wichtigste Anwendung, die man bisher von der harmonischen Entwicklung auf feste Kugeln gemacht hat, ist die in der Theorie der Gestalt der Erde nöthige Bestimmung der Attraction einer endlichen Masse, welche in nahezu kugelförmige Schichten vertheilt ist, deren jede überall gleich dicht ist, deren Dichtigkeit aber von Schicht zu Schicht eine andere wird. Wenn man nach der oben erläuterten allgemeinen analytischen Methode diesen Fall detaillirt ausarbeitet, so erhält man das Potential, dargestellt als die Summe zweier Theile, von denen der erstere und wichtigere das Potential einer festen Kugel A und der zweite das einer Kugelflächenschicht B ist. Die Kugel A wird dadurch aus dem gegebenen Sphäroid erhalten, dass man die ganze Masse wegschneidet, welche ausserhalb einer passenden mittleren Kugelfläche liegt, und, ohne irgendwo die Dichtigkeit zu ändern, die etwa noch leeren Raumtheile im Innern dieser Oberfläche ausfüllt. Die Schicht B ist eine mit gleichen Quantitäten positiver und negativer Materie in der Weise versehene Kugelfläche, dass dadurch die Massenversetzung, durch welche das gegebene Sphäroid in A verwandelt wurde, compensirt wird. Der analytische Ausdruck all dieser Umstände könnte mittels der vorhergehenden For-

meln (§§ 536, 537) ohne Weiteres niedergeschrieben werden; wir wollen ihn aber erst später in der Hydrostatik und Hydrokinetik betrachten, wenn wir uns mit der Theorie der Gestalt der Erde und mit den Vibrationen flüssiger Kugeln beschäftigen werden.

546. Fall eines um eine Axe symmetrischen Potentials. — Die analytische Methode der harmonischen Kugelfunctionen ist für mehrere praktische Probleme aus dem Gebiete der Elektricität, des Magnetismus und des Elektromagnetismus sehr nützlich, in denen Kräfte symmetrisch um eine Axe vertheilt sind. Namentlich setzt sie uns in den Stand, wenn die Kraft (oder das Potential) in jedem Punkte eines endlichen Theils der Axe gegeben ist, unmittelbar convergirende Reihen zur Berechnung der Kraft für Punkte herzuleiten, welche in irgend einem endlichen Raumtheile ausserhalb der Axe liegen (s. § 498).

Wir nehmen zum Coordinatenanfangspunkt einen beliebigen Punkt der Axe, in Beziehung auf welche Symmetrie stattfindet, und es sei für einen Theil AB der Axe

(a) $$U = a_0 + \frac{b_0}{r} + a_1 r + \frac{b_1}{r^2} + a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3} + \text{u. s. w.},$$

wo U das Potential für einen durch die Bedingung $OQ = r$ bestimmten Punkt Q der Axe und das zweite Glied eine convergirende Reihe ist. Bezeichnet dann V das Potential für einen beliebigen Punkt P, welcher durch die Coordinaten $OP = r$ und $QOP = \vartheta$ bestimmt ist, und sind, wie im Zusatz B (47), Q_1, Q_2, ... die zweiaxigen harmonischen Flächenfunctionen 1ter, 2ter, ... Ordnung von ϑ, so muss für alle Werthe von r, für welche die Reihe convergirt,

(b) $$V = a_0 + \frac{b_0}{r} + \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right) Q_1 + \left(a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3}\right) Q_2 + \text{u. s. w.}$$

sein, vorausgesetzt dass P von Q und von allen Punkten von AB, die innerhalb einer endlichen, wenn auch noch so kleinen Entfernung von ihm liegen, erreicht werden kann, ohne dass man die Masse, welche die in Rede stehende Kraft ausübt, oder einen Raum, für welchen die Reihe nicht convergirt, zu durchschreiten hätte. Denn in diesem ganzen Raume (§ 498) muss, wenn V' der Werth der Summe der Reihe ist, $V - V'$ verschwinden, da [Zusatz B (g)] $V - V'$ eine Potentialfunction ist und für einen endlichen Theil der Axe, die Q enthält, verschwindet.

Die Reihe (b) convergirt natürlich für alle Werthe von r, welche (a) convergent machen, da, wie jeder der im Zusatz B für die Functionen Q_1, Q_2, ... gegebenen Ausdrücke zeigt, das Verhältniss $Q_{n+1} : Q_n$ für unendlich grosse Werthe von n den Grenzwerth Eins hat.

Im Allgemeinen, d. h. wenn nicht O ein singulärer Punkt ist, besteht die Reihe für U nach dem Maclaurin'schen Satze nur aus steigenden ganzen Potenzen von r, vorausgesetzt dass r eine gewisse Grenze nicht überschreitet. In Fällen gewisser Art gibt es solche singulären Punkte, dass, wenn einer derselben zum Anfangspunkt O genommen

wird, der Ausdruck für U eine Reihe von Potenzen gebrochener Grade von r ist, die wenigstens für alle eine gewisse Grenze nicht überschreitenden endlichen positiven Werthe von r convergent und reell ist. Drückt man in einem solchen Falle das Potential in der Nähe von O mittels räumlicher harmonischer Kugelfunctionen, in Beziehung auf O als Mittelpunkt, aus, so enthält das Resultat harmonische Functionen gebrochener Grade [Zusatz B (a)].

Beispiele. — (I.) Das Potential eines kreisförmigen Ringes vom Radius a und der linearen Dichtigkeit ϱ ist in einem Punkte der Axe, welcher vom Mittelpunkt den Abstand r hat, gleich

$$\frac{2\pi a \varrho}{(a^2+r^2)^{1/2}}.$$

Folglich ist

$$U = 2\pi\varrho\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^4}{a^4} - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r < a,$$

und

$$U = \frac{2\pi a\varrho}{r}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{a^4}{r^4} - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r > a.$$

Hieraus ergibt sich

$$V = 2\pi\varrho\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}Q_2 + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^4}{a^4}Q_4 - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r < a$$

und

$$V = 2\pi\varrho\left(\frac{a}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}Q_2 + \frac{1.3}{2.4}\frac{a^5}{r^5}Q_4 - \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r > a.$$

(II.) Wir multipliciren den vorhergehenden unentwickelten Ausdruck für U mit da und integriren nach a von $a = 0$ als der unteren Grenze an. Wird jetzt unter U das Potential einer Scheibe von kreisförmiger Basis, die eine gleichförmige Oberflächendichtigkeit ϱ und den Radius a hat, für einen Punkt ihrer Axe verstanden, so erhalten wir

$$U = 2\pi\varrho\,\{(a^2+r^2)^{1/2} - r\},$$

wo r positiv ist.

Entwickeln wir diesen Ausdruck erstens nach steigenden und zweitens nach fallenden Potenzen von r (für die Fälle $r < a$ und $r > a$), so ergibt sich

$$V = 2\pi\varrho\left\{-rQ_1 + a + \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a}Q_2 - \frac{1.1}{2.4}\frac{r^4}{a^3}Q_4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{r^6}{a^5}Q_6 - \text{u. s. w.}\right\}, \text{ wenn } r < a,$$

und

$$V = 2\pi\varrho\left\{\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^4}{r^3}Q_2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{a^6}{r^5}Q_4 - \text{u. s. w.}\right\}, \text{ wenn } r > a.$$

Es ist zu bemerken, dass der erstere dieser Ausdrücke nur von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi$ continuirlich ist, und dass man von $\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi$ bis $\vartheta = \pi$ den ersten Theil des zweiten Gliedes, nämlich

$$-2\pi\varrho r Q_1 \text{ durch } + 2\pi\varrho r Q_1$$

ersetzen muss.

(III.) Wird weiter an dem Ausdruck für U in (II.) die durch $\frac{-d}{dr}$ bezeichnete Operation vollzogen und jetzt unter U das Potential einer Scheibe von unendlich kleiner Dicke c verstanden, welche auf ihren beiden Seiten positive und negative Masse von der Flächendichtigkeit $\frac{\varrho}{c}$ enthält, so erhält man

$$U = 2\pi\varrho\left\{1 - \frac{r}{(a^2+r^2)^{1/2}}\right\}.$$

[Diese Formel ergibt sich auch aus § 479 (e), wenn man nach x integrirt, r für x und ϱ für ϱc setzt.] Für diesen Fall ist also

$$V = 2\pi\varrho\left(1 - \frac{r}{a}\,Q_1 + 1/2\,\frac{r^3}{a^3}\,Q_3 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{r^5}{a^5}\,Q_5 + \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r<a,$$

und

$$V = 2\pi\varrho\left(1/2\,\frac{a^2}{r^2}\,Q_1 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{a^4}{r^4}\,Q_3 + \text{u. s. w.}\right), \text{ wenn } r>a.$$

Der erstere Ausdruck ist gleichfalls discontinuirlich, und wenn $\vartheta > 1/2\pi$ und $< \pi$ ist, so muss sein erster Theil, nämlich $2\pi\varrho$, durch $-2\pi\varrho$ ersetzt werden.

547. Verlust an potentieller Energie. — Wenn man zwei Systemen oder Massen-Vertheilungen M und M', deren jede einen endlichen gegebenen Raum einnimmt, die aber unendlich weit von einander entfernt sind, gestattet, sich einander zu nähern, so wird eine gewisse Menge Arbeit durch die wechselseitig zwischen ihnen wirkende Gravitation gewonnen, und ihre wechselseitige potentielle Energie erfährt einen ebenso grossen Verlust, oder erleidet, wie wir sagen können, eine Erschöpfung. Die Grösse dieses Verlustes wird (§ 486) stets dieselbe sein, auf welchen Wegen auch die Aenderungen der Lage des Systems vor sich gehen, sobald die relativen anfänglichen und die relativen Endlagen aller Massenpunkte gegeben sind. Wenn also $m_1, m_2, \ldots$ die Massenpunkte von M; $m_1', m_2', \ldots$ diejenigen von M'; $v_1', v_2', \ldots$ die Potentiale von M' in den von $m_1, m_2, \ldots$ eingenommenen Punkten; $v_1, v_2, \ldots$ die Potentiale von M in den von $m_1', m_2', \ldots$ eingenommenen Punkten sind, und E der Verlust an wechselseitiger potentieller Energie zwischen den beiden Systemen in irgend welchen wirklichen Configurationen ist, so hat man

$$E = \Sigma m v' = \Sigma m' v.$$

Es lässt sich dies noch in anderer Weise schreiben, wenn ϱ eine discontinuirliche Function bezeichnet, welche die Dichtigkeit in irgend einem Punkte (x, y, z) der Masse M ausdrückt und in allen Punkten verschwindet, in denen sich kein Theil dieser Masse M befindet, und

wenn ϱ' in ähnlicher Weise die andere Masse M' bestimmt. Wir erhalten dann

$$E = \iiint \varrho v' \, dx\, dy\, dz = \iiint \varrho' v \, dx\, dy\, dz,$$

wo die Integrale sich durch den unendlichen Raum zu erstrecken haben. Die Gleichheit des zweiten und dritten Ausdrucks erkennt man, wenn man beachtet, dass

$$v = \iiint \frac{{}_{,}\varrho \, d_{,}x \, d_{,}y \, d_{,}z}{D}$$

ist, wenn $({}_{,}x, {}_{,}y, {}_{,}z)$ irgend ein Punkt des Raumes, ${}_{,}\varrho$ der Werth von ϱ in diesem Punkte und D der Abstand zwischen (x, y, z) und $({}_{,}x, {}_{,}y, {}_{,}z)$ ist. Ein entsprechender Ausdruck liefert natürlich v', und wir erhalten auf diese Weise das zweite und dritte Glied, oder den Werth von E, identisch durch ein sechsfaches Integral ausgedrückt, nämlich durch

$$E = \iiiiiint \frac{{}_{,}\varrho \varrho' \, d_{,}x \, d_{,}y \, d_{,}z \, dx\, dy\, dz}{D}.$$

548. Green's Methode. — Es ist bemerkenswerth, dass Green sein ganzes System allgemeiner Sätze über die Attraction auf die Betrachtung einer analytischen Formel basirte, welche, wenn man sie auf zwei Massen bezieht und gehörig interpretirt, genau dieselbe Bedeutung wie die vorhergehenden Ausdrücke für E hat.

Im Zusatz A(a) sei α constant und U, U' die Potentiale zweier endlichen, in endlicher Entfernung von einander befindlichen Massen M, M' im Punkte (x, y, z), so dass wir, wenn ϱ und ϱ' beziehungsweise die Dichtigkeiten von M und M' in (x, y, z) bezeichnen, nach § 491 (c)

$$\nabla^2 U = -4\pi\varrho, \quad \nabla^2 U' = -4\pi\varrho'$$

haben. Dabei ist zu bemerken, dass ϱ in jedem Punkte, welcher keinen Theil der Masse M enthält, und ϱ' in jedem ausserhalb M' liegenden Punkte verschwindet. In der vorliegenden rein abstracten Untersuchung mögen die beiden Massen theilweise oder ganz vereint denselben Raum einnehmen: oder sie mögen bloss gedachte Theile einer reellen Masse sein. Setzen wir dann voraus, dass S nach allen Richtungen hin unendlich entfernt ist, und beachten, dass $U \delta U'$ und $U' \delta U$ unendlich kleine Grössen von derselben Ordnung, wie der reciproke Werth des Cubus des Abstandes irgend eines Punktes von S von M und M' sind, während die gesammte Fläche von S, über welche die Flächenintegrale des Zusatzes A (a) (1) genommen werden, zwar unendlich gross, aber nur von der Ordnung des Quadrates dieses Abstandes ist, so erhalten wir

$$\iint dS\, U' \delta U = 0 \quad \text{und} \quad \iint dS\, U \delta U' = 0.$$

Folglich geht (a) (1) über in

$$\iiint \left(\frac{dU}{dx}\frac{dU'}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dU'}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dU'}{dz} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= 4\pi \iiint \varrho U' \, dx\, dy\, dz = 4\pi \iiint \varrho' U \, dx\, dy\, dz.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass das erste Glied, dividirt durch 4π, gleich dem Verlust an potentieller Energie ist, von welchem die Annäherung der beiden Massen begleitet ist, wenn sie aus unendlicher gegenseitiger Entfernung sich in die relative Lage bewegen, die sie wirklich einnehmen.

Ohne S als unendlich gross vorauszusetzen, sehen wir, dass das zweite Glied von (a) (1), durch 4π dividirt, der directe Ausdruck für den Verlust an wechselseitiger Energie zwischen M' und einer Masse ist, welche aus dem innerhalb S liegenden Theile von M und einer auf S mit der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi}\,\delta\,U'$ vertheilten Masse besteht; das dritte Glied ist der entsprechende Ausdruck für M und für die in ähnlicher Weise bestimmten Theile von M'.

549. Verlust an potentieller Energie bei der Condensation einer Masse. — Wenn statt der beiden in irgend einer Weise vertheilten Massen M und M' nur zwei Massenpunkte m_1, m_2 gegeben sind, so ist der Verlust an wechselseitiger potentieller Energie, der eintritt, wenn man den unendlich weit von einander entfernten Punkten gestattet, einander bis auf die Entfernung $D(1, 2)$ zu nähern, gleich

$$\frac{m_1 m_2}{D(1,2)}.$$

Wird jetzt einem dritten Massenpunkte gestattet, in die Nähe der beiden ersteren zu kommen, so geht aufs neue potentielle Energie im Betrage

$$\frac{m_1 m_3}{D(1,3)} + \frac{m_2 m_3}{D(2,3)}$$

verloren. Betrachten wir eine beliebige Anzahl Massenpunkte, die auf diese Weise in eine gewisse Lage zu einander gelangen, so erhalten wir für den ganzen Verlust an potentieller Energie

$$E = \Sigma\Sigma\,\frac{m m'}{D},$$

wo m, m' die Massen irgend zweier der Punkte, D den Abstand derselben bezeichnen, und wo die Summation $\Sigma\Sigma$ sich auf alle Paare von je zwei Punkten, jedes Paar nur einmal genommen, bezieht. Bezeichnet v das Potential aller Massen, mit Ausschluss von m, in dem von m eingenommenen Punkte, so wird der Ausdruck eine einfache Summe von so viel Gliedern, als Massen vorhanden sind. Wir können dieselbe in folgender Weise schreiben: —

$$E = {}^1\!/_2\,\Sigma m v;$$

der Factor $^1/_2$ muss hinzugefügt werden, weil $\Sigma m v$ jedes Glied wie

$\frac{m_1 m_2}{D(1,2)}$ zweimal enthalten würde. Wenn die Punkte im Grenzfall eine continuirliche Masse bilden, welche in einem Punkte (x, y, z) die Dichtigkeit ϱ hat, so haben wir nur die Summe als ein Integral zu schreiben und erhalten

$$E = {}^1/_2 \int\int\int \varrho v dx dy dz;$$

dies ist der Verlust an potentieller Energie, welcher erfolgt, wenn eine Quantität schweren Stoffs sich aus einem Zustande unendlich dünner Vertheilung (d. h. aus einem Zustande, in welchem die Dichtigkeit überall unendlich klein ist) in den Zustand verdichtet, in dem sie sich in irgend einem Körper von endlicher Ausdehnung befindet.

Zu einer wichtigen analytischen Transformation dieses Ausdrucks wird man durch die vorhergehende Interpretation des Zusatzes A (a) geführt; man erhält mittels derselben*)

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int\int\left(\frac{dv^2}{dx^2} + \frac{dv^2}{dy^2} + \frac{dv^2}{dz^2}\right) dx dy dz,$$

oder

$$E = \frac{1}{8\pi}\int\int\int R^2 dx dy dz,$$

wenn R die Resultante der Kraft im Punkte (x, y, z) bezeichnet und die Integration sich durch den ganzen Raum erstreckt.

Eingehende Interpretationen des übrigen Theils des Zusatzes A für den Fall eines constanten α und der allgemeinen Sätze und Formeln desselben, welche diese Beschränkung nicht enthalten, namentlich auch der dort aufgestellten der Minimum-Probleme sind für die Dynamik unzusammendrückbarer Flüssigkeiten und für die physikalische Theorie der Verbreitung elektrischer und magnetischer Kräfte durch einen von homogener oder heterogener Masse erfüllten Raum von Wichtigkeit. Wir werden hierauf zurückkommen, wenn wir uns mit diesen Gegenständen speciell beschäftigen werden.

550. Methode von Gauss. — Die Art, in welcher Gauss Green's Sätze unabhängig bewies, lässt sich unmittelbarer und leichter in Ausdrücke der Energie übertragen, wenn man die gewöhnlich angenommene Vorstellung von Kräften festhält, welche einfach zwischen zwei von einander entfernten Massenpunkten wirken, ohne dass eine dazwischen liegende Masse irgend einen Beistand oder Einfluss ausübte. Um z. B. zu beweisen, dass eine gegebene Quantität Materie Q in einer, aber auch nur einer Weise sich so über eine gegebene endliche Oberfläche S (die geschlossen

*) Nichol's Cyclopaedia, 2d Ed. 1860. Magnetism, Dynamical Relations of.

oder offen sein kann) vertheilen lässt, dass das Potential auf dieser ganzen Oberfläche überall denselben Werth habe, zeigt er (1), dass das Integral

$$\int\int\int\int \frac{\varrho\varrho' \, d\sigma \, d\sigma'}{PP'}$$

einen der Bedingung

$$\int\int \varrho \, d\sigma = Q$$

unterworfenen Minimum-Werth hat (ϱ ist eine Function der Lage eines Punktes P auf S; ϱ' ist der Werth, den diese Function in P' hat; $d\sigma$ und $d\sigma'$ sind die Elemente von S in diesen Punkten) und (2) dass dieses Minimum nur durch eine bestimmte Vertheilung der Werthe von ϱ erzeugt wird. Nach dem, was wir soeben (§ 549) gesehen haben, ist das erstere dieser Integrale doppelt so gross, als die potentielle Energie einer unendlich grossen Anzahl auf S vertheilter unendlich kleiner Massentheilchen, die einander abstossen: dies Minimum-Problem ist also (§ 292) bloss die analytische Fassung des Problems, zu bestimmen, wie diese Massentheilchen vertheilt werden müssen, um sich in stabilem Gleichgewichte zu befinden.

Ebenso ist Gauss' zweites Minimum-Problem, welches das erstere als einen besonderen Fall in sich schliesst, nämlich das Problem, ϱ so zu bestimmen, dass

$$\int\int (\tfrac{1}{2} v - \Omega) \varrho \, d\sigma$$

ein der Bedingung

$$\int\int \varrho \, d\sigma = Q$$

unterworfenes Minimum werde, wo Ω eine willkürlich gegebene Function der Lage von P und

$$v = \int\int \frac{\varrho' \, d\sigma'}{PP'}$$

ist, bloss eine analytische Fassung der Frage: Wie muss eine gegebene Quantität abstossender Massentheilchen, die auf eine Oberfläche S beschränkt sind, vertheilt werden, damit die gesammte potentielle Energie, welche aus den zwischen den Massenpunkten wechselseitig wirkenden Kräften, wie auch aus den Kräften herrührt, die ein fest gegebener anziehender oder abstossender Körper (dessen Potential in P gleich Ω ist) auf sie ausübt, ein Minimum werde; mit anderen Worten (§ 292): wie werden die beweglichen Massenpunkte sich unter dem Einfluss all dieser Kräfte gruppiren?

Siebentes Capitel.

Statik fester und flüssiger Körper.

551. Gleichgewicht eines starren Körpers. — Wie wir schon in § 454 dargelegt haben, sind für die vorliegende Untersuchung das dritte Bewegungsgesetz und die Folgerungen, die sich aus demselben ziehen lassen, erforderlich. Diese letzteren sind für unser jetziges Vorhaben ausführlich genug in dem allgemeinen Ausspruch Lagrange's (§ 293) und in der Ausdehnung desselben auf die Frictionskräfte (§ 452) vereinigt. Wir beginnen mit dem Fall eines starren Körpers oder Systems, worunter wir eine Gruppe materieller Punkte verstehen, welche durch die wechselseitig zwischen ihnen wirkenden Kräfte nicht in Beziehung auf äussere Körper, wohl aber in Beziehung auf einander in bestimmten Lagen festgehalten werden. Es ist diese Voraussetzung näherungsweise bei allen festen Körpern erfüllt, so lange die einwirkenden Kräfte nicht stark genug sind, die inneren molecularen Reactionen bis zu einem wahrnehmbaren Betrage zu überwinden. Wir lassen zunächst eine allgemeine Untersuchung folgen; einfachere Methoden für specielle Fälle werden später behandelt werden.

I. Nehmen wir an, es finde bloss eine Translation des Körpers nach irgend einer Richtung hin statt. Wenn dann alle Kräfte parallel dieser Richtung zerlegt werden, so wird jede Componente denselben Weg hindurch gearbeitet haben. Da aber Gleichgewicht bestehen soll, so wird keine Arbeit geleistet, und somit ist die Summe der Componenten Null.

Damit also ein starrer Körper sich im Gleichgewicht befinde, ist erforderlich, dass die (algebraische) Summe der nach jeder beliebigen Richtung genommenen Componenten aller auf ihn wirkenden Kräfte Null sei.

Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn jene Summe für drei beliebig angenommene Richtungen, die nicht einer Ebene angehören, verschwindet; denn jede Translation lässt sich in Componenten zerlegen, die drei solchen Linien parallel sind. In praktischen Fällen wählt man gewöhnlich drei zu einander senkrechte Richtungen.

II. Wir wollen weiter annehmen, es finde bloss eine Rotation des Körpers durch einen unendlich kleinen Winkel um irgend eine Axe statt. Dann ist (§ 240) die von den Kräften geleistete Gesammtarbeit das Product aus dem Rotationswinkel in die (algebraische) Summe der in Beziehung auf die Axe genommenen Momente der Kräfte. Des Gleichgewichts wegen muss dieses Product Null sein.

Damit also ein starrer Körper sich im Gleichgewicht befinde, ist erforderlich, dass die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf jede beliebige Axe Null sei.

Da eine Rotation um eine beliebige Axe ersetzt werden kann durch Translationen parallel irgend dreien (nicht in einer Ebene liegenden) durch einen Punkt gehenden Axen und Rotationen um diese Axen, so ist für das Gleichgewicht, ausser der in (I) angegebenen Bedingung, nur noch erforderlich, dass die Summen der Momente der Kräfte in Beziehung auf drei durch einen Punkt gehende zu einander senkrechte Axen verschwinden.

III. Wenn die Kräfte sämmtlich in einer Ebene liegen, so reduciren sich die obigen sechs Bedingungen auf drei, nämlich auf: —

Die Summen der in irgend zwei (zu einander senkrechten) Richtungen genommenen Componenten der Kräfte müssen einzeln verschwinden.

Die Summe der Momente in Beziehung auf irgend eine zur Ebene der Kräfte senkrechte Axe muss verschwinden.

(a) **Analytischer Ausdruck des Gleichgewichts eines starren Körpers.** — Sind X, Y, Z die rechtwinkligen Componenten der auf den Punkt P (x, y, z) des starren Körpers wirkenden Kraft, und erfährt der Körper bloss eine Translation, welche parallel den Axen die Componenten ξ, η, ζ hat, so ist offenbar

$$\xi \Sigma(X) + \eta \Sigma(Y) + \zeta \Sigma(Z)$$

der Ausdruck der geleisteten Arbeit. Nach Lagrange's Form des Newton'schen Princips muss dieser Ausdruck verschwinden, wenn sich

der Körper unter der Einwirkung der Kräfte im Gleichgewicht befinden soll. Nun sind aber die Grössen ξ, η, ζ von einander unabhängig und können ganz beliebige Werthe haben. Es muss folglich

$$\Sigma(X) = 0, \quad \Sigma(Y) = 0, \quad \Sigma(Z) = 0$$

sein. Dies sind in der That dieselben Bedingungen wie die, welche wir schon (§ 455) für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes erhalten haben.

(b) Weiter wollen wir voraussetzen, der Körper erfahre eine Rotation um eine beliebige Axe. Da der Anfangspunkt ein beliebiger Punkt ist, so können wir annehmen, die Axe ginge durch ihn hindurch. Die Rotation sei unendlich kleinen simultanen Rotationen ω_x, ω_y, ω_z um die Axen der x, y, z äquivalent (§ 96). Dann ersehen wir aus § 95 leicht, dass die den Axen parallelen Componenten der Verschiebung, welche der Punkt P (x, y, z) erfährt, die Grössen

$$\omega_y z - \omega_z y, \quad \omega_z x - \omega_x z, \quad \omega_x y - \omega_y x$$

sind. Die von den einwirkenden Kräften geleistete Gesammtarbeit ist folglich

$$\Sigma\{X(\omega_y z - \omega_z y) + Y(\omega_z x - \omega_x z) + Z(\omega_x y - \omega_y x)\}$$

oder

$$\omega_x \Sigma(Zy - Yz) + \omega_y \Sigma(Xz - Zx) + \omega_z \Sigma(Yx - Xy).$$

Da dieser Ausdruck verschwinden muss, und da die Grössen ω_x, ω_y, ω_z nothwendig von einander unabhängig sind, so erhalten wir die drei weiteren Bedingungen

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

(c) Wenn kein Gleichgewicht stattfindet, so erhalten wir als Resultante der Kräfte offenbar

I. Die Kräfte $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$, welche im Anfangspunkt (der jeder beliebige Punkt sein kann) angreifen, und deren Richtungen den Axen parallel sind. Ihre Resultante sei R und habe die Richtungscosinus l, m, n.

II. Die Momente oder Kräftepaare

$$\Sigma(Zy - Yz), \quad \Sigma(Xz - Zx), \quad \Sigma(Yx - Xy),$$

die beziehungsweise um die Axen drehen.

Diese Kräftepaare können durch $G\lambda$, $G\mu$, $G\nu$ dargestellt werden, wo $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ist. Die physikalische Bedeutung dieser Grössen wird alsbald zu Tage treten.

(d) Wenn die Kräfte in einer Ebene liegen, etwa in der xy Ebene, so erhalten wir nur drei Bedingungen, nämlich

$$\Sigma(X) = 0, \quad \Sigma(Y) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

552. Resultante beliebiger Kräfte. — Wenn ein starrer Körper unter der Einwirkung beliebiger Kräfte sich nicht im Gleichgewicht befindet, so muss ein Agens, welches ihrer Resultante (von welcher Art diese auch sein mag) gleich und entgegengesetzt ist, im Verein mit jenen Kräften offenbar Gleichgewicht erzeugen.

Diese umgekehrte Resultante muss daher im Allgemeinen sechs Bedingungen genügen. Eine Anzahl von Kräften, die auf einen starren Körper wirken, ist also nur in speciellen Fällen einer einzigen Kraft äquivalent; diese Kräfte können aber auf unendlich viele Arten auf zwei Kräfte reducirt werden, indem vier Bedingungen sich entbehren lassen.

553. **Kräftepaare.** — Bevor wir dazu übergehen, die eben erhaltenen allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden, ist es zweckmässig, die grosse von Poinsot erfundene Vereinfachung einzuführen, welche der Gebrauch der Kräftepaare mit sich führt. In § 234 haben wir schon die Definition eines Kräftepaares gegeben und gezeigt, dass die Summe der Momente seiner Kräfte in Beziehung auf alle zu seiner Ebene senkrechten Axen dieselbe ist. Das Paar kann also in irgend eine neue Lage seiner Ebene oder in irgend eine andere parallele Ebene verschoben werden, ohne dass seine Wirkung auf den starren Körper eine andere würde. Ebenso kann man, ohne den statischen Effect eines Kräftepaars zu ändern, den Arm desselben durch einen beliebigen Winkel in der Ebene der Kräfte drehen und die Länge des Armes und die Grösse der Kräfte nach Belieben ändern, wenn nur das Moment unverändert bleibt. Folglich wird, wie wir schon in § 234 sahen, ein Kräftepaar vollständig durch seine Axe dargestellt. Nach der in § 234 getroffenen Uebereinkunft muss die Axe eines Kräftepaars, welches eine Rotation in der Richtung der Zeiger einer Uhr zu erzeugen strebt, durch die Rückseite der Uhr gezogen werden, und umgekehrt. Es lässt sich dies leicht mit Hülfe der nebenstehenden einfachen Figur dem Gedächtniss einprägen: die Pfeilspitzen zeigen beziehungsweise die Richtung der Rotation und der Axe an.

Fig. 22.

554. **Zusammensetzung von Kräftepaaren.** — Kräftepaare werden vereinigt und zerlegt, indem man ihre Axen nach dem Parallelogramm-Gesetz in einer Weise behandelt, welche mit der nach unseren früheren Betrachtungen für lineare und angulare Geschwindigkeiten und Kräfte erforderlichen identisch ist. Es ergibt sich dies unmittelbar aus § 551, II, kann aber auch leicht synthetisch bewiesen werden. Um nämlich die Componente eines Kräftepaars, das in einer Ebene A liegt, für eine beliebige gegen A geneigte Ebene B zu finden, lassen wir (§ 553) den Arm des Paars mit dem Durchschnitt beider Ebenen zusammenfallen. Die Kräfte liegen dann in A, senkrecht zu dieser Durchschnittslinie, und man

erhält ihre Componenten für die Ebene B, wenn man mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebenen multiplicirt. In diesem Verhältniss ist daher, da der Arm derselbe geblieben ist, das Moment der Componenten in B verringert. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist aber gleich dem Winkel zwischen zwei auf den Ebenen gezogenen Senkrechten, d. h. gleich dem Winkel, den die Axe des Paars mit der Axe der Componente einschliesst. Die Länge der Axe der Componente, die ja gleich dem Moment derselben ist, verhält sich also zur Länge der Axe des ursprünglichen Paars, wie der Cosinus des Neigungswinkels der Axen zur Einheit.

Ein Kräftepaar G, dessen Axe die Richtungscosinus λ, μ, ν hat, ist danach drei Kräftepaaren $G\lambda$, $G\mu$, $G\nu$ äquivalent, welche beziehungsweise um die Axen der x, y, z drehen. Hieran schliessen sich unmittelbar die am Schluss des § 95 gemachten Bemerkungen. Wir ersehen daraus auch die Bedeutung der Symbole des § 551 (c) II.

555. Zerlegung einer Kraft in eine Kraft und ein Kräftepaar. — Eine Kraft F, die in irgend einem Punkte A eines Körpers angreift, kann in Grösse und Richtung unverändert in einen beliebigen anderen Punkt B versetzt werden, wenn noch ein Kräftepaar eingeführt wird, dessen Moment gleich demjenigen ist, welches die in A angreifende Kraft F in Beziehung auf B hat. Denn nach dem Princip der Vereinigung von Kräften können wir in B in der zur Richtung der gegebenen Kraft F parallelen Linie ein Paar gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte F und $-F$ anbringen. Die Kraft F in A und die Kraft $-F$ in B bilden das angegebene Kräftepaar, und ausserdem haben wir noch die Kraft F in B.

Anwendung auf das Gleichgewicht eines starren Körpers. — Hieraus erhalten wir sofort die bereits zweimal (§ 551) ermittelten Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers. Jede Kraft kann nach einem beliebigen, als Coordinatenanfang angenommenen Punkte versetzt werden, wenn zugleich das entsprechende Paar eingeführt wird. Die Kräfte, die jetzt in einem Punkte angreifen, müssen nach den im Capitel VI. entwickelten Principien einander das Gleichgewicht halten, und das resultirende Kräftepaar, also seine für drei beliebige zu einander senkrechte Linien genommenen Componenten müssen verschwinden.

556. Darstellung der Kräfte durch die Seiten eines Polygons. — Wenn also Kräfte nicht bloss der Grösse und Richtung, sondern auch ihren Wirkungslinien nach, durch die in derselben Ordnung genommenen Seiten eines beliebigen ebenen oder unebenen

Polygons dargestellt werden, so sind sie einem einzigen Kräftepaar äquivalent. Denn wenn man sie in einen beliebigen Anfangspunkt versetzt, so halten sie sich nach dem Polygon der Kräfte (§§ 27, 256) das Gleichgewicht. Wenn das Polygon eben ist, so ist seine doppelte Fläche das Moment des Paares; ist das Polygon uneben, so ist die Componente des Paares für irgend eine Axe doppelt so gross, als die Fläche der Projection auf eine zu dieser Axe senkrechte Ebene. Die Axe des ganzen Paars ist in diesem Falle senkrecht zu der Ebene (§ 236), für welche die Projection der Fläche ein Maximum ist.

557. **Kräfte, die den Seiten eines Dreiecks proportional und senkrecht zu denselben sind.** — Die Linien, welche in den Mitten der Seiten eines Dreiecks auf diesen Seiten senkrecht stehen, schneiden einander in einem Punkte und bilden mit einander dieselben Winkel, wie die entsprechenden Dreiecksseiten, wenn deren Richtungen alle im Sinne eines Umlaufs genommen werden. Wenn man also in den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks in der Ebene desselben nach innen zu ziehende Kräfte anbringt, deren Grössen den Seiten proportional sind, so erzeugen sie Gleichgewicht. Dasselbe ist für jede ebene Figur richtig, wie man erkennt, wenn man dieselbe in Dreiecke zertheilt. Später werden wir zeigen, dass, wenn man in den Trägheitsmittelpunkten der Grenzflächen eines beliebigen geschlossenen Polyëders Kräfte angreifen lässt, die senkrecht gegen diese Flächen nach innen ziehen und den Grössen der Flächen proportional sind, man gleichfalls ein System erhält, das sich im Gleichgewicht befindet.

558. **Zusammensetzung einer Kraft und eines Kräftepaars.** — Ein Kräftepaar und eine Kraft, deren Richtung gegen die Ebene des Paars geneigt ist, können auf ein kleineres Kräftepaar, dessen Ebene zur Richtung der Kraft senkrecht ist, und eine der gegebenen gleiche und parallele Kraft reducirt werden. Denn das Kräftepaar lässt sich in zwei Paare zerlegen, von denen das eine in einer Ebene liegt, welche die Richtung der gegebenen Kraft enthält, während die Ebene des zweiten zur Kraft senkrecht steht, und dass die Kraft und das in derselben Ebene liegende Paar einer gleich grossen und in einer parallelen Richtung, wenngleich in einer anderen Linie wirkenden Kraft äquivalent sind, ist bloss die Umkehrung des § 555.

559. **Zusammensetzung beliebiger auf einen starren Körper wirkenden Kräfte.** — Nach dem Vorhergehenden können beliebig viele auf einen starren Körper wirkende Kräfte auf

eine in einem beliebigen Punkte angreifende Kraft und ein Kräftepaar zurückgeführt werden (§ 551). Diese Kraft und das Paar lassen sich (§ 558) auf eine gleiche in einer bestimmten Linie des Körpers wirkende Kraft und ein Kräftepaar reduciren, dessen Ebene zur Kraft senkrecht ist, und welches das kleinste Paar ist, das als ein Theil der Resultante der gegebenen Kräfte erscheinen kann. Die bestimmte Linie, in welcher die letzterhaltene Kraft wirkt, heisst die Central-Axe; sie ist offenbar die Linie, in Beziehung auf welche das Moment der gegebenen Kräfte am kleinsten ist.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung des § 551 (c) wollen wir voraussetzen, der Anfangspunkt der Coordinaten werde in den Punkt (x', y', z') verlegt. Die resultirende Kraft hat dann noch die den Axen parallelen Componenten $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$, oder Rl, Rm, Rn. Die Kräftepaare sind aber

$$\Sigma[Z(y-y') - Y(z-z')],\ \Sigma[X(z-z') - Z(x-x')],\ \Sigma[Y(x-x') - X(y-y')],$$

oder

$$G\lambda - R(ny' - mz'),\ G\mu - R(lz' - nx'),\ G\nu - R(mx' - ly').$$

Die Bedingungen, dass die resultirende Kraft zur Ebene des resultirenden Paares senkrecht sei, sind

$$\frac{G\lambda - R(ny' - mz')}{l} = \frac{G\mu - R(lz' - nx')}{m} = \frac{G\nu - R(mx' - ly')}{n}.$$

Diese beiden Gleichungen zwischen x', y', z' sind die Gleichungen der Centralaxe.

Wir können dieselben auch dadurch erhalten, dass wir die Bedingungen suchen, unter welchen das resultirende Kräftepaar

$$\sqrt{[G\lambda - R(ny' - mz')]^2 + [G\mu - R(lz' - nx')]^2 + [G\nu - R(mx' - ly')]^2},$$

die Variationen von x', y', z' als von einander unabhängig angesehen, ein Minimum werde. Diese Methode liefert uns drei Gleichungen (da die nach x', y', z' genommenen partiellen Differentialquotienten des obigen Ausdrucks einzeln verschwinden müssen), welche sich auf die beiden schon erhaltenen reduciren lassen, und von denen wir nur die erste hinschreiben. Es ist

$$n\{G\mu - R(lz' - nx')\} - m\{G\nu - R(mx' - ly')\} = 0.$$

Aus den einfachsten Eigenschaften der Kräftepaare folgt, dass das resultirende Paar in allen Punkten der Centralaxe dieselbe Grösse hat; es lässt sich dies übrigens auch leicht aus den obigen Gleichungen herleiten.

560. Vereinigung zu zwei Kräften. — Man kann die resultirende Kraft mit einer der Kräfte des resultirenden Paares vereinigen, also eine beliebige Anzahl auf einen starren Körper wirkender Kräfte auf zwei Kräfte reduciren, deren Richtungen einander nicht schneiden, und zwar kann diese Reduction offenbar auf unendlich viele Arten erfolgen. Es gibt aber einen Fall, in wel-

chem das Resultat **symmetrisch** ist, und dieser verdient deshalb besonders hervorgehoben zu werden.

Wir nehmen an, die Centralaxe des Systems sei gefunden. Durch einen beliebigen Punkt C dieser Axe ziehen wir senkrecht zu derselben eine Linie AA', so dass $CA = CA'$ ist. Für die in der Richtung der Centralaxe wirkende Kraft R substituiren wir (nach § 561) in jedem Endpunkte von AA' eine Kraft $\frac{1}{2}R$. Ferner wählen wir die Linie AA', die wir a nennen wollen, zum Arm des Kräftepaares. Dann haben wir in jedem Endpunkt von a zwei Kräfte, nämlich eine zur Centralaxe senkrechte Kraft $\frac{G}{a}$ und eine der Centralaxe parallele Kraft $\frac{1}{2}R$. Durch Vereinigung dieser beiden Kräfte erhalten wir zwei beziehungsweise durch A und A' gehende Kräfte, deren jede von der Grösse $\left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{G^2}{a^2}\right)^{1/2}$ und zu AA' senkrecht ist, und die zu beiden Seiten der durch AA' und die Centralaxe gelegten Ebene um den Winkel $\arctan \frac{2G}{Ra}$ geneigt sind.

561. Zusammensetzung paralleler Kräfte. — Ein sehr einfacher, aber wichtiger Fall ist der einer beliebigen Anzahl in verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifenden **parallelen** Kräfte.

Damit Gleichgewicht bestehe, muss hier offenbar die (algebraische) Summe der Kräfte gleich Null sein; auch müssen ihre Momente in Beziehung auf irgend zwei zur gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte senkrechte Axen verschwinden.

Ist P eine der Kräfte, (x, y, z) ihr Angriffspunkt, (l, m, n) ihre Richtungscosinus (also auch die Richtungscosinus aller übrigen Kräfte) und R die Resultante, die im Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ angreift, so erhalten wir $\Sigma(P) = R$ und

$$\Sigma(Pny - Pmz) = Rn\bar{y} - Rm\bar{z},$$

sowie zwei andere ähnliche Gleichungen. Daraus folgt

$$\Sigma(P) = R,$$

$$\Sigma(Px) = R\bar{x},\ \Sigma(Py) = R\bar{y},\ \Sigma(Pz) = R\bar{z}.$$

Die Lösung ist bestimmt und führt zu einem besonderen Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, dessen Lage von den Grössen l, m, n unabhängig ist. Wir schliessen daraus: —

Wenn kein Gleichgewicht besteht, so ist die Resultante einer Anzahl solcher Kräfte eine der (algebraischen) Summe derselben gleiche Kraft, welche in einem bestimmten Punkte im Körper, dem

sogenannten Mittelpunkt der parallelen Kräfte, angreift. Die Lage dieses Punktes hängt von den relativen Grössen und von den Angriffspunkten, nicht aber von der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte ab.

562. Schwerpunkt. — Aus den Formeln des § 230 erhellt, dass, wenn in die verschiedenen Angriffspunkte dieser Kräfte Massen gesetzt werden, welche den Kräften proportional sind, der Trägheitsmittelpunkt dieser Massen derselbe Punkt im Körper, wie der Mittelpunkt der parallelen Kräfte sein wird. Folglich lassen sich die Gegenwirkungen, welche die verschiedenen Theile eines starren Körpers einer Beschleunigung in parallelen Richtungen entgegensetzen, in aller Strenge auf eine im Trägheitsmittelpunkt angreifende Kraft reduciren. Dasselbe gilt näherungsweise von der Wirkung, welche die Schwerkraft auf einen starren Körper ausübt, dessen Dimensionen klein im Verhältniss zu denjenigen der Erde sind, und daher wird der Trägheitsmittelpunkt auch zuweilen (§ 230) der Schwerpunkt genannt. Die Schwerkraft kann aber, ausser bei einem centrobarischen Körper (§ 527), im Allgemeinen nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden, und wenn dies möglich ist, so geht diese Kraft nicht durch einen in Beziehung auf den Körper in allen seinen Lagen festen Punkt.

563. Parallele Kräfte, deren algebraische Summe Null ist. — In einem Falle hat man den am Schluss des § 561 gegebenen Ausspruch zu modificiren, nämlich wenn die algebraische Summe der gegebenen Kräfte verschwindet. In diesem Falle ist die Resultante ein Kräftepaar, dessen Ebene der Richtung der Kräfte parallel ist. Ein gutes Beispiel hierfür liefert eine magnetisirte Stahlmasse von geringen Dimensionen, welche nur der Einwirkung des Erdmagnetismus unterworfen ist. Wie wir später sehen werden, befindet sich in jedem Element der Masse dasselbe Quantum des sogenannten Nord- und Süd-Magnetismus; die Elemente sind daher gleichen und entgegengesetzten Kräften unterworfen, welche sämmtlich der Linie der Inclination parallel sind. Eine Compassnadel wird daher vom Erdmagnetismus im Ganzen weder angezogen noch abgestossen, sondern es erleidet nur ihre Richtung eine Aenderung, wie wenn sie unter dem Einfluss eines Kräftepaars stände.

564. Bedingungen für das Gleichgewicht dreier Kräfte. — Wenn drei auf einen starren Körper wirkende Kräfte Gleichgewicht erzeugen, so müssen ihre Richtungen in einer Ebene liegen und einander entweder in einem Punkte schneiden oder parallel sein. Dies zu beweisen, wollen wir eine Betrachtung einführen, welche

uns in der Statik der biegsamen Körper und der Flüssigkeiten in mehreren Untersuchungen von grossem Nutzen sein wird.

Physikalisches Axiom. — Wenn beliebige auf einen festen oder flüssigen Körper wirkende Kräfte Gleichgewicht erzeugen, so können wir, ohne das Gleichgewicht zu stören, annehmen, dass irgend welche Theile des Körpers festgelegt, oder starr, oder starr und festgelegt werden.

Dies Princip wollen wir auf den vorliegenden Fall anwenden. Nehmen wir zwei beliebige Punkte des Körpers, welche beziehungsweise in den Wirkungslinien zweier der Kräfte liegen, als fest an, so darf die dritte Kraft in Beziehung auf die Verbindungslinie dieser Punkte kein Moment haben, d. h. ihre Richtung muss durch diese Verbindungslinie hindurchgehen. Nun können wir aber zwei ganz beliebige Punkte der Wirkungslinien nehmen; folglich gehören die Richtungen der drei Kräfte einer Ebene an, und drei in einer Ebene liegende Kräfte können nur dann einander das Gleichgewicht halten, wenn ihre Richtungen entweder durch einen Punkt gehen oder parallel sind.

565. Gleichgewicht unter der Wirkung der Schwerkraft. — Es ist leicht und nützlich, verschiedene Gleichgewichtsfälle zu betrachten, in denen auf einen starren Körper keine anderen Kräfte wirken, als die Schwere und der normale oder tangentiale Druck zwischen dem Körper und festen Unterlagen. So leuchtet ein, dass, wenn nur ein Punkt des Körpers festgelegt ist, sein Schwerpunkt in der durch diesen Punkt gehenden Verticalen liegen muss; denn sonst würden sein Gewicht und die Reaction der Unterlage ein Kräftepaar bilden, das durch keine Gegenwirkung aufgehoben würde. Ferner sehen wir, dass bei stabilem Gleichgewicht der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkt liegen muss. Auf diese Weise können wir einen Körper von beliebiger Form auf einer Nadelspitze in stabiles Gleichgewicht bringen, wenn wir mit demselben eine Masse von solcher Grösse starr verbinden, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt unter die Nadelspitze zu liegen kommt.

566. Wagsteine. — Einen interessanten Gleichgewichtsfall liefern uns die sogenannten Wagsteine, bei denen, durch natürliche oder künstliche Processe, die untere Oberfläche einer lockeren Felsmasse auf eine convexe Form gebracht ist, die annähernd sphärisch sein möge, während die Felslage, auf der sie im Gleichgewichtszustande ruht, convex oder concav und zwar gleichfalls annähernd sphärisch, wenn nicht eben ist. Eine auf einer sphärischen

Oberfläche ruhende Kugel, welche an einer Stelle in der Nähe ihrer Oberfläche aus einem schwereren Stoffe als an den übrigen Stellen besteht, ist daher ein Repräsentant solcher Fälle.

Es sei O der Krümmungsmittelpunkt des festen Körpers, O' die Lage, welche der Krümmungsmittelpunkt des darauf liegenden beweglichen Körpers im Gleichgewichtszustande einnimmt. Wir nehmen zwei beliebige unendlich kleine gleiche Bogen PQ, Pp an und ziehen QR durch Q so, dass $\measuredangle O'QR = \measuredangle POp$ wird. Wenn die Punkte Q und p durch eine Verschiebung aufeinander fallen, so wird QR offenbar eine Verticale sein, und wenn der Schwerpunkt G, welcher in OPO' liegen muss, wenn der bewegliche Körper seine Gleichgewichtslage einnimmt, zur Linken von QR liegt, so wird das Gleichgewicht stabil sein. Das Gleichgewicht ist folglich stabil, wenn G tiefer als R liegt, sonst nicht.

Fig. 23.

Sind jetzt ϱ und σ die Krümmungsradien OP und $O'P$ der beiden Oberflächen, und ϑ der Winkel POp, so ist der Winkel $QO'R = \frac{\varrho\vartheta}{\sigma}$, und wir haben in dem Dreieck $QO'R$ (§ 112)

$$RO' : \sigma = \sin\vartheta : \sin\left(\vartheta + \frac{\varrho\vartheta}{\sigma}\right)$$

$$= \sigma : \sigma + \varrho \text{ (näherungsweise).}$$

Folglich ist

$$PR = \sigma - \frac{\sigma^2}{\sigma + \varrho} = \frac{\varrho\sigma}{\varrho + \sigma},$$

und daher muss, wenn das Gleichgewicht stabil sein soll,

$$PG < \frac{\varrho\sigma}{\varrho + \sigma}$$

sein. Wenn die untere Oberfläche eben ist, so ist ϱ unendlich gross, und die Bedingung geht (wie in § 291) über in

$$PG < \sigma.$$

Ist die untere Oberfläche concav, so hat man das Zeichen von ϱ zu ändern und erhält als Bedingung

$$PG < \frac{\varrho\sigma}{\varrho - \sigma},$$

welcher Ausdruck nicht negativ sein kann, da ϱ in diesem Falle numerisch grösser als σ sein muss.

567. Gleichgewicht um eine Axe. — Wenn zwei Punkte fest sind, so ist die einzige dem System mögliche Bewegung eine Rotation um eine feste Axe. Der Schwerpunkt muss dann in der durch jene Punkte gehenden Verticalebene und unter der Verbindungslinie derselben liegen.

568. Gleichgewicht auf einer festen Oberfläche. — Wenn ein starrer Körper auf einer festen Oberfläche ruht, so wird es im Allgemeinen nur drei Berührungspunkte zwischen beiden geben (§ 427), und der Körper wird sich in stabilem Gleichgewicht befinden, wenn die von seinem Schwerpunkt aus gezogene Verticallinie die Ebene dieser drei Punkte innerhalb des Dreiecks trifft, dessen Ecken sie bilden. Denn wenn eine dieser Stützen entfernt wird, so hat der Körper offenbar das Bestreben, nach dieser Stütze hin zu fallen; jede derselben hindert also den Körper, um die Verbindungslinie der beiden anderen zu rotiren. So z. B. steht ein Körper in stabilem Gleichgewicht auf einer geneigten Ebene (falls die Reibung stark genug ist, um ein Gleiten zu verhindern), wenn die durch seinen Schwerpunkt gezogene Verticallinie die Ebene innerhalb der Basis, d. h. des Flächenstücks trifft, das von der kürzesten Linie begrenzt wird, die man um den mit der Ebene in Berührung stehenden Theil ziehen kann. Daher kann ein Körper, der auf einer horizontalen Ebene nicht stehen kann, auf einer geneigten Ebene zum Stehen gebracht werden.

569. Satz von Pappus. — Wir wollen hier einen von Pappus entdeckten, aber gewöhnlich dem Guldinus zugeschriebenen merkwürdigen Satz erwähnen, da er in einigen Fällen zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers mit Erfolg angewandt wird, obschon er in Wirklichkeit nur eine von den geometrischen Eigenschaften des Trägheitsmittelpunktes ausspricht. Der Beweis folgt leicht aus § 230. Der Satz lautet: —

Wenn ein durch eine Curve umgrenzter Theil einer Ebene um eine in der Ebene liegende Axe durch irgend einen Winkel rotirt, so ist der Rauminhalt der erzeugten Oberfläche gleich dem Product aus dem erzeugenden Ebenentheil in die Länge des von seinem Schwerpunkte beschriebenen Weges, und die Grösse des gekrümmten Theils der Oberfläche gleich dem Product aus der Länge der Curve in die Länge des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Weges.

570. Die allgemeinen Principien, nach welchen die Kräfte zu behandeln sind, die aus der Gebundenheit eines Systems und von der

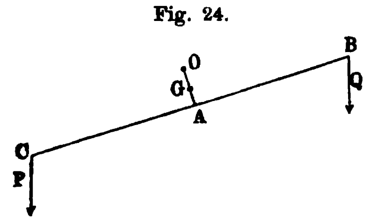
Reibung herrühren, sind schon oben (§§ 293, 329, 452) angegeben. Zur Erläuterung der Anwendung dieser Principien lassen wir einige Beispiele folgen, und zwar wollen wir das Gleichgewicht eines starren Körpers in einigen der wichtigeren praktischen Fälle von Gebundenheit betrachten.

571. **Maschinen.** — Die Anwendung der Principien der Statik auf die einfachen Maschinen und die, wenn auch noch so zusammengesetzten, Combinationen derselben, fordert Nichts weiter, als dass man die kinematischen Relationen (wie in §§ 79, 85, 102, u. s. w.) feststelle und sodann in die Dynamik übertrage. Dies geschieht mittels des Newton'schen Princips (§ 269) oder mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten (§ 289), bei dessen Anwendung aber besondere Aufmerksamkeit auf die Einführung der Kräfte der Reibung (wie in § 452) zu richten ist. Dies Verfahren kann in keinem Falle andere Schwierigkeiten involviren als solche, wie sie die Bestimmung der geometrischen Bedingungen irgend einer unendlich kleinen Verschiebung mit sich bringt, und dann die Lösung der Gleichungen, zu denen uns die Uebertragung in die Dynamik führt. Wir wollen uns daher nicht dabei aufhalten, eine dieser Fragen zu discutiren, sondern, bevor wir diesen Theil unseres Gegenstandes für einige Zeit verlassen, nur noch einige Beispiele betrachten, die keine grosse Schwierigkeit darbieten. Die schon entwickelten Principien werden im übrigen Theil dieses Werkes beständig benutzt werden, und werden wir noch oft Gelegenheit finden, ihren Nutzen und die Art und Weise, wie sie anzuwenden sind, an Beispielen zu erläutern.

Wir wollen mit dem Fall einer Wage beginnen, deren nähere Untersuchung uns (§ 431) noch obliegt.

572. Beispiel I. **Die Wage.** — Wir nehmen an, die Verbindungslinie der Punkte, in welchen die Wagschalen an die Arme befestigt sind, stehe senkrecht auf der Linie, welche den Schwerpunkt des Balkens mit dem Unterstützungspunkt verbindet. Offenbar darf der Schwerpunkt des Balkens nicht in die Spitze der Schneide fallen, auf welcher der Balken ruht, da derselbe sonst in jeder Lage im Gleichgewicht sein würde. Wir wollen erstens voraussetzen, die Arme seien von ungleicher Länge.

Fig. 24.



Es sei O der Unterstützungspunkt, G der Schwerpunkt, M

7*

die Masse des Balkens, und es werde angenommen, derselbe komm wenn die Schalen die Gewichte P und Q enthalten, in einer Lag zur Ruhe, die mit der horizontalen Richtung einen Winkel ϑ bi det (Fig. 24).

Empfindlichkeit. — Nehmen wir die Momente in Beziehu auf den Punkt O und setzen dabei der Einfachheit wegen vora die Kräfte seien nach dem in § 220 erläuterten Princip gemess so erhalten wir

$$Q(AB.\cos\vartheta + OA.\sin\vartheta) + M.OG.\sin\vartheta$$
$$= P(AC.\cos\vartheta - OA.\sin\vartheta).$$

Hieraus ergibt sich

$$\tan\vartheta = \frac{P.AC - Q.AB}{(P+Q).OA + M.OG}.$$

Wenn die Arme gleich sind, so geht dies über in

$$\tan\vartheta = \frac{(P-Q)\,AB}{(P+Q).OA + M.OG}.$$

Danach ist die Empfindlichkeit (§ 431) der Wage um so grös (1) je länger die Arme sind, (2) je kleiner die Masse des Balk ist, (3) je näher der Unterstützungspunkt der Verbindungsli der Punkte ist, in welchen die Schalen an dem Balken befest sind, (4) je näher der Unterstützungspunkt dem Schwerpunkt Balkens liegt. Wenn der Unterstützungspunkt in der Ver dungslinie der Aufhängungspunkte der Schalen liegt, so ist Empfindlichkeit für dieselbe Differenz der Belastungen der S len unabhängig von der Grösse dieser Belastungen.

Stabilität. — Um die Stabilität zu bestimmen, haben wir Dauer der Oscillationen zu suchen, welche eintreten, wenn die W eine geringe Ablenkung aus der Gleichgewichtslage erfährt. Rücksicht auf ein späteres Capitel wird sich zeigen, dass die G chung der Bewegung näherungsweise

$$\{Mk^2 + (P+Q)AB^2\}\ddot{\vartheta} + Qg(AB\cos\vartheta + OA\sin\vartheta)$$
$$+ Mg\,OG\sin\vartheta - Pg\,(AC\cos\vartheta - OA\sin\vartheta) = 0$$

ist, wo k den Gyrationsradius (§ 281) des Balkens bezeichnet. W den die Arme und ihre Belastungen als gleich vorausgesetzt, erhalten wir für die Dauer einer unendlich kleinen Oscillation

$$\pi\sqrt{\frac{Mk^2 + 2P.\overline{AB}^2}{(2P.OA + M.OG)g}}.$$

ür eine gegebene Belastung ist die Stabilität also um so grösser, !) je kleiner die Länge des Balkens ist, (2) je kleiner seine Masse t, (3) je kleiner sein Gyrationsradius ist, (4) je weiter der Unter- ;ützungspunkt von dem Balken und von dem Schwerpunkt dessel- en entfernt ist. Diese Erfordernisse sind, mit Ausnahme der zwei- m, den für die Empfindlichkeit ermittelten direct entgegengesetzt, nd daher bleibt nichts Anderes übrig, als einen angemessenen ompromiss zu schliessen. Je geringer aber die Masse des Bal- ens ist, um so besser ist die Wage, sowohl hinsichtlich der Em- findlichkeit, als auch der Stabilität.

Die oben gegebene allgemeine Gleichung zeigt, dass die Em- findlichkeit zunimmt, wenn man die Länge und den Gyrations- dius eines Armes verringert und zugleich die entsprechende Be- stung in solchem Grade vergrössert, dass das Gleichgewicht erhal- n bleibt. Diese Form der Wage ist zuweilen von Nutzen.

Beispiel II. **Eine Stange auf einer glatten Stütze.** — ie Gleichgewichtslage einer Stange AB zu finden, welche auf inem glatten horizontalen Balken D ruht und mit ihrem tieferen nde gegen eine dem Balken parallele glatte verticale Wand drückt.

Die Figur 25 stellt einen Verticaldurchschnitt der Stange dar, ie offenbar in einer zur Mauer und dem Balken senkrechten Ebene egen muss. Das Gleichgewicht ist augenscheinlich instabil.

Es wirken in diesem Falle nur drei Kräfte, nämlich: der Druck der Wand auf die Stange, in horizontaler Richtung; der Druck des Balkens auf die Stange, senkrecht zu derselben; das Gewicht der Stange, welches im Schwerpunkt derselben vertical nach nten zieht. Ist die halbe Länge a der Stange und der Abstand b des Balkens von der Wand bekannt, so haben wir, um die Gleichgewichtslage zu fixiren, nur den Winkel CAB zu bestimmen, den die Stange mit der Wand bildet. Wird dieser Winkel ϑ genannt, so ist $AD = \frac{b}{\sin\vartheta}$.

Fig. 25.

Um die Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln, haben wir in eine horizontale und eine verticale Componente zu zerlegen. adurch erhalten wir zunächst die Bedingungen

$$R - S\cos\vartheta = 0, \quad (1)$$

$$W - S\sin\vartheta = 0. \quad (2)$$

Weiter nehmen wir die Momente in Beziehung auf A und erhalten

$$S.AD - W.a \sin\vartheta = 0,$$

oder

$$S.b - W.a \sin^2\vartheta = 0. \tag{3}$$

Da diese drei Gleichungen nur die drei unbekannten Grössen R, S, ϑ enthalten, so bestimmen sie die Aufgabe vollständig. Aus (2) und (3) folgt

$$\sin^3\vartheta = \frac{b}{a}, \text{ wodurch } \vartheta \text{ bestimmt wird.}$$

Dann ist nach (2)

$$S = \frac{W}{\sin\vartheta},$$

und endlich nach (1)

$$R = S\cos\vartheta = W\,cotan\,\vartheta.$$

Beispiel III. **Eine Stange auf rauhen Stützen.** — Als Zusatz wollen wir noch den Fall betrachten, in welchem die Wand und der Balken des vorigen Beispiels rauh sind, und zwar sei μ der Coefficient der statischen Reibung für beide. Wenn die Stange in die Gleichgewichtslage gebracht wird, die wir eben für den Fall, in welchem keine Reibung eintreten kann, bestimmt haben, so wird auch unter den jetzt vorliegenden Verhältnissen keine Reibung ins Leben gerufen werden, da die Stange nicht das Bestreben hat, eine Bewegung anzunehmen, ein solches Bestreben also auch nicht zu überwinden ist. Wird das Ende A der Stange immer weiter nach unten gerückt, so wird immer mehr Reibung erweckt, um das Streben der Stange, zwischen der Wand und dem Balken hinunterzufallen, zu überwinden. Endlich gelangen wir zu einer Grenzlage, über welche hinaus der Endpunkt A nicht gebracht werden darf, ohne dass die Stange wirklich hinunterfiele. In dieser Lage wirkt die Reibung in A nach oben und ist μ mal so gross, als der Druck auf die Wand. Die Reibung in D ist μ mal so gross, als der Druck auf die Stange, und wirkt in der Richtung DB. Setzen wir in diesem Falle $\sphericalangle CAD = \vartheta_1$, so gehen unsere drei Gleichungen über in

$$R_1 + \mu S_1 \sin\vartheta_1 - S_1 \cos\vartheta_1 = 0, \tag{1₁}$$

$$W - \mu R_1 - S_1 \sin\vartheta_1 = 0, \tag{2₁}$$

$$S_1 b - Wa \sin^2\vartheta_1 = 0. \tag{3₁}$$

Da die Richtungen beider Reibungskräfte durch A gehen, so erscheint keine derselben in (3_1). Dies ist der Grund, warum es

zweckmässiger ist, die Momente in Beziehung auf A zu nehmen, als in Beziehung auf irgend einen anderen Punkt.

Werden R_1 und S_1 aus diesen Gleichungen eliminirt, so erhalten wir die Formel

$$(4_1) \qquad 1 - \frac{a}{b} \sin^3 \vartheta_1 = \mu \frac{a}{b} \sin^2 \vartheta_1 (\cos \vartheta_1 - \mu \sin \vartheta_1),$$

aus der sich ϑ_1 bestimmen lässt. Ist das geschehen, so liefert (3_1) den Werth von S_1 und jede der beiden anderen Gleichungen den Werth von R_1.

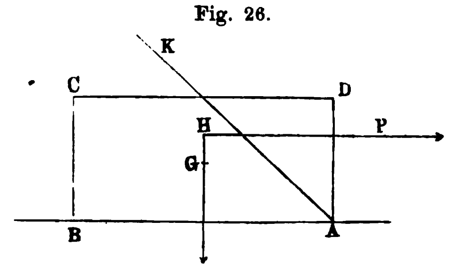
Wird der Endpunkt A der Stange von der Lage aus, in welcher ohne Mitwirkung der Reibung Gleichgewicht besteht, in die Höhe gerückt, so nimmt die Stange das Bestreben an, auf der anderen Seite des Balkens hinunterzufallen. Je höher A rückt, desto mehr Reibung wird erweckt, bis die Stange eine durch den Winkel ϑ_2 bestimmte Lage annimmt, in welcher die Reibung ihren grössten Werth, das μfache des Druckes, erreicht. Auf diese Weise finden wir eine zweite Grenzlage für die Stabilität. Zwischen beiden Grenzlagen befindet sich die Stange überall im Gleichgewicht.

Es ist nützlich zu bemerken, dass die Richtung der Reibung in diesem zweiten Falle stets derjenigen im ersteren Falle entgegengesetzt ist, und dass man dieselben Gleichungen zur Bestimmung beider Grenzlagen benutzen kann, wenn man den analytischen Kunstgriff anwendet, das Zeichen von μ zu ändern. Auf diese Weise erhalten wir aus (4_1) für ϑ_2 die Gleichung

$$1 - \frac{a}{b} \sin^3 \vartheta_2 = - \mu \frac{a}{b} \sin^2 \vartheta_2 (\cos \vartheta_2 + \mu \sin \vartheta_2).$$

Beispiel IV. **Ein Block auf einer rauhen Ebene.** — Ein Block, dessen Grenzflächen senkrecht auf einander stehen, liegt auf einer rauhen Horizontalebene, und es wirkt auf ihn eine horizontale

Fig. 26.



Kraft, deren Wirkungslinie von zwei verticalen Grenzflächen gleich weit entfernt ist. Man soll bestimmen, wie gross die Kraft

sein muss, damit sie zur Erzeugung einer Bewegung genüge, und untersuchen, ob diese Bewegung in einem Gleiten oder einem Umfallen des Blockes besteht.

Wenn die Kraft P den Körper umzuwerfen strebt, so leuchtet ein, dass derselbe sich um die Kante A drehen wird; daher wirken der Druck R der Ebene und die Reibung S an dieser Kante. Unsere statischen Bedingungen sind natürlich

$$R = W,$$
$$S = P,$$
$$Wb = Pa,$$

wo b die halbe Länge des Blocks und a der Abstand der Kraft P von der Ebene ist. Daraus folgt

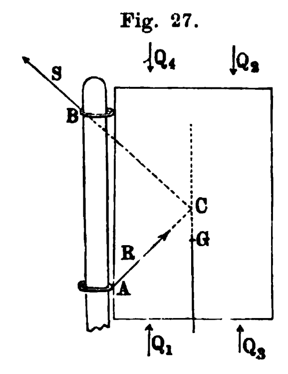
$$S = \frac{b}{a} W.$$

Nun kann S nicht grösser als μR sein; folglich darf $\frac{b}{a}$ nicht grösser als μ sein, wenn es möglich sein soll, den Körper durch eine horizontale Kraft in der für P gegebenen Linie umzustürzen.

Dieses Problem und andere der Art lassen sich mittels einer einfachen geometrischen Construction lösen, welche, wie sich leicht ersehen lässt, bloss eine graphische Darstellung des obigen Verfahrens ist. Wenn wir nämlich die Richtungen der einwirkenden Kraft und des Gewichtes bis zu ihrem Durchschnitt in H verlängern und in A einen Winkel BAK construiren, dessen Cotangente gleich dem Reibungscoefficienten ist, so wird die Kraft den Körper umzustürzen suchen oder nicht, je nachdem H über oder unter AK liegt.

Beisiel V. **Unterstützung einer Masse durch zwei Ringe, die um einen rauhen Pfosten gehen.** — Eine Masse, etwa ein Thor, wird von zwei Ringen A und B getragen, welche lose um einen rauhen verticalen Pfosten gehen. Wenn Gleichgewicht besteht, so muss offenbar in A der dem Thore am nächsten liegende und in B der vom Thore am weitesten entfernte Theil des Ringes mit dem Pfosten in Berührung sein. Die auf die Ringe ausgeübten Druckkräfte R und S werden augenscheinlich die in der Figur angegebenen Richtungen AC, CB haben. Wenn

Fig. 27.



: Masse nur der Einwirkung der Schwerkraft unterliegt, so muss : Wirkungslinie ihres Gewichtes W durch den Punkt C gehen 564), und es leuchtet ein, dass, wie klein auch der Reibungsefficient sein mag (wenn überhaupt nur eine Reibung vorhanden), Gleichgewicht immer möglich ist, wenn der Abstand des Schwernkts vom Pfosten gross genug ist im Vergleich zum Abstande der iden Ringe.

Wenn die Masse gerade im Begriff ist hinabzugleiten, so wird e Reibung in ihrer vollen Kraft ins Leben gerufen, und jeder r Winkel, welchen R und S mit dem Horizont bilden, ist gleich m Ruhewinkel. Ziehen wir dieser Bedingung gemäss AC, BC, ist die Bedingung fürs Gleichgewicht, dass der Schwerpunkt nicht zwischen dem Pfosten und der durch C gehenden Vertilen liege. Liegt G, wie in der Figur, in dieser Verticallinie, wird eine in Q_1 nach oben zu, oder eine in Q_2 nach unten zu irkende Kraft das Streben der Masse, hinunterzufallen, aufhem; dagegen wird eine in Q_3 nach oben zu oder in Q_4 nach unten ı gerichtete Kraft ein sofortiges Gleiten bewirken.

Durch eine ähnliche Untersuchung lässt sich der Druck einer chieb- oder Zugvorrichtung bestimmen und der Punkt ermitteln, ı welchem eine Kraft angreifen muss, um Bewegung zu erzeugen. Vir überlassen dies dem Leser.

573. Nachdem wir so in Kürze das Gleichgewicht eines starm Körpers betrachtet haben, wollen wir, bevor wir uns zur Unterıchung der Deformation elastischer fester Körper wenden, einige ebergangsfälle behandeln, in deren jedem eine besondere Voraustzung der Betrachtung zu Grunde gelegt wird, wodurch eine beächtliche Menge analytischer Schwierigkeiten vermieden werden.

574. **Gleichgewicht einer biegsamen und unausdehnaren Schnur.** — Ausgezeichnete Beispiele dieser Art liefert die tatik einer biegsamen und unausdehnbaren Schnur oder Kette, die n ihren beiden Endpunkten befestigt und der Einwirkung beliebiger Kräfte unterworfen ist. Die Curve, in welcher die Kette in rgend einem Falle herabhängt, soll eine Kettenlinie genannt verden, obgleich dieser Ausdruck gewöhnlich nur im Falle einer leichförmigen Schnur gebraucht wird, auf welche keine Kraft auser der Schwere wirkt.

575. **Es sind drei Untersuchungsmethoden möglich.** — Wir können die Gleichgewichtsbedingungen jedes Elements einzeln etrachten, oder auch die allgemeine Bedingung (§ 292), dass im Falle eines beliebigen conservativen Kräftesystems die gesammte

potentielle Energie ein Minimum ist, anwenden; endlich können wir auch, namentlich wenn die Schwere die einzige äussere Kraft ist, das Gleichgewicht eines endlichen Theils der Kette betrachten, der dann als ein starrer Körper behandelt wird (§ 564).

576. Gleichungen des Gleichgewichts in Beziehung auf die Tangente und die osculatorische Ebene. — Die erste dieser drei Methoden liefert für die Kettenlinie im ganz allgemeinen Falle unmittelbar die drei folgenden Gleichungen des Gleichgewichts: —

(1) Das Verhältniss der Aenderung der Spannung in einem Curvenbogen zur Länge dieses Bogens ist gleich der für die Längeneinheit genommenen tangentialen Componente der einwirkenden Kraft.

(2) Die Krümmungsebene der Schnur enthält die normale Componente der einwirkenden Kraft, und der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der Seite des Bogens, nach welcher diese Kraft nicht hinwirkt.

(3) Die Krümmung ist in jedem Punkte gleich der für die Längeneinheit genommenen normalen Componente der einwirkenden Kraft, dividirt durch die Spannung, welche die Schnur in demselben Punkte hat.

Der erste dieser Sätze sagt einfach, dass ein unendlich kleines Element der Schnur sich, was eine tangentiale Bewegung betrifft, im Gleichgewicht befindet. Die beiden anderen Sätze drücken aus, dass die Componente der an den beiden Endpunkten eines unendlich kleinen Bogens vorhandenen Spannungen, genommen längs der durch den Mittelpunkt dieses Bogens gehenden Normalen, direct entgegengesetzt und gleich der normalen Componente der einwirkenden Kraft und gleich dem ganzen Betrage derselben für den Bogen ist. Denn die Ebene der Tangenten, in welchen jene Spannungen wirken, ist (§ 8) die Krümmungsebene. Ist nun ϑ der Winkel zwischen beiden Tangenten (oder der unendlich kleine Winkel, welcher dem von ihren positiven Richtungen gebildeten Winkel an π fehlt) und T das arithmetische Mittel ihrer Grössen, so ist die längs der Halbirungslinie des von ihren positiven Richtungen gebildeten Winkels genommene Componente ihrer Resultante genau gleich $2\,T \sin \frac{1}{2}\,\vartheta$ oder, da ϑ unendlich klein ist, gleich $T\vartheta$. Wir erhalten folglich $T\vartheta = N\delta s$, wenn δs die Länge des Bogens und $N\delta s$ die gesammte auf ihn wirkende normale Kraft ist. Nach § 9 haben wir aber $\vartheta = \frac{\delta s}{\varrho}$, wenn ϱ der Krümmungsradius ist, mithin

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{N}{T},$$

und dies ist die oben in (3) in Worten ausgesprochene Gleichung.

577. Integral der Spannung. — Aus § 576 (1) sehen wir, dass, wenn die auf einen jeden Punkt der Schnur einwirkenden Kräfte ein conservatives System bilden, und wenn alle gleichen unendlich kleinen Längselemente der Schnur eine Kraft von derselben Grösse und derselben Richtung erfahren, sobald sie durch eine Bewegung der Schnur in gleiche Lage gebracht werden, die Differenz der Spannungen der Schnur in irgend zweien ihrer Punkte in der Gleichgewichtslage gleich der Differenz der Potentiale (§ 485) der Kräfte in den von diesen Punkten eingenommenen Lagen ist. Welches daher auch die Lage ist, in der das Potential gleich Null gerechnet wird, die Spannung der Schnur ist in jedem Punkte gleich dem Werthe, den das um eine Constante vermehrte Potential am Orte jenes Punktes hat.

578. Gleichungen des Gleichgewichts in cartesischen Coordinaten. — Statt die Componenten der Kräfte in der Richtung der Tangente und senkrecht zu dieser Richtung zu nehmen, können wir dieselben sämmtlich parallel einer beliebigen festen Richtung zerlegen. Wir finden auf diese Weise, dass die für die Einheit der Länge der Schnur genommene Componente der einwirkenden Kraft in jedem Punkte gleich dem Verhältniss der Abnahme der der festen Richtung dieser Componente parallelen Spannung zur Einheit der Länge der Schnur ist. Wählen wir daher drei beliebige zu einander senkrechte feste Richtungen, so erhalten wir drei Differentialgleichungen, welche für die analytische Behandlung der Kettenlinien mittels der Methode der rechtwinkligen Coordinaten geeignet sind.

Diese Gleichungen sind

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) = -\sigma X \\[2ex] \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) = -\sigma Y \\[2ex] \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) = -\sigma Z, \end{cases}$$

wo s die Länge der Schnur von einem beliebigen Punkte an bis zu einem Punkte P bezeichnet, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind; X, Y, Z sind die für die Masseneinheit der Schnur genommenen Componenten der in P angreifenden Kräfte; σ ist die Masse eines in P liegenden Elements der Schnur, dividirt durch die Länge dieses Elements; endlich ist T die Spannung der Schnur im Punkte P.

Mittels dieser Gleichungen kann man die Sätze (1), (2) und (3) des §. 576 auf folgende Weise analytisch beweisen: — Werden die Gleichungen addirt, nachdem die erste mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz multiplicirt worden ist, so folgt, der Relation

$$\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\, d\,\frac{dz}{ds} = \tfrac{1}{2}\, d\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = 0$$

wegen,

$$(2)\quad dT = -\sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -\sigma\left(X\,\frac{dx}{ds} + Y\,\frac{dy}{ds} + Z\,\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

und diese Formel enthält den Satz (1) des § 576. Wird weiter dT und T eliminirt, so erhalten wir

$$(3)\quad \begin{cases} X\left(\dfrac{dy}{ds}\, d\,\dfrac{dz}{ds} - \dfrac{dz}{ds}\, d\,\dfrac{dy}{ds}\right) + Y\left(\dfrac{dz}{ds}\, d\,\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{dx}{ds}\, d\,\dfrac{dz}{ds}\right) \\ \qquad + Z\left(\dfrac{dx}{ds}\, d\,\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{dy}{ds}\, d\,\dfrac{dx}{ds}\right) = 0; \end{cases}$$

diese Gleichung zeigt (§§ 9, 26), dass die Resultante von X, Y, Z in der osculatorischen Ebene liegt, und ist folglich der analytische Ausdruck von § 576 (2). Werden endlich die Gleichungen (1) addirt, nachdem man die erste mit $d\,\frac{dx}{ds}$, die zweite mit $d\,\frac{dy}{ds}$, die dritte mit $d\,\frac{dz}{ds}$ multiplicirt hat, so ergibt sich

$$(4)\quad T = -\sigma\,\frac{\left(X\,d\,\frac{dx}{ds} + Y\,d\,\frac{dy}{ds} + Z\,d\,\frac{dz}{ds}\right)ds}{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

und dies ist der analytische Ausdruck von § 576 (3).

579. Methode der Energie. — Dieselben Gleichungen des Gleichgewichts lassen sich aus der Bedingung herleiten, welcher die Energie im Falle des Gleichgewichts genügen muss; analytisch geschieht dies leicht mittels der Methoden der Variationsrechnung.

Es sei V das Potential der äusseren Kräfte im Punkte (x, y, z) für die Einheit der Masse der Schnur. Dann ist die potentielle Energie einer beliebig gegebenen Länge der Schnur in irgend einer wirklichen Lage zwischen zwei gegebenen festen Punkten gleich

$$\int V\sigma\, ds.$$

Dies Integral, das für die gegebene Länge der Schnur zwischen den gegebenen Punkten zu nehmen ist, muss ein Minimum sein, während das unbestimmte Integral s, von einem Endpunkt an bis zum Punkte (x, y, z) genommen, durch die Aenderungen der Lagen dieses Punktes nicht geändert wird. Nach den Principien der Variationsrechnung muss daher

$$\delta \int V\sigma\, ds + \int \lambda\, \delta\, ds = 0$$

sein, wo λ eine zu eliminirende Function von x, y, z ist.

Nun ist σ eine Function von s, und da s sich nicht ändert, wenn x, y, z in $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ (die Coordinaten, welche derselbe Punkt der Kette in einer anderen Lage hat) übergehen, so erhält man

$$\delta(\sigma V) = \sigma\delta V = -\sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Ferner ist

$$\delta ds = \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{ds}.$$

Wenn wir diese beiden Formeln auf die vorige Gleichung anwenden und das letzte Glied derselben auf die gewöhnliche Weise partiell integriren, so erhalten wir

$$\int ds \left\{\left[\sigma X + \frac{d}{ds}\left(\overline{V\sigma+\lambda}\frac{ds}{dx}\right)\right]\delta x + \left[\sigma Y + \frac{d}{ds}\left(\overline{V\sigma+\lambda}\frac{ds}{dy}\right)\right]\delta y \right.$$
$$\left. + \left[\sigma Z + \frac{d}{ds}\left(\overline{V\sigma+\lambda}\frac{ds}{dz}\right)\right]\delta z\right\} = 0,$$

und hieraus endlich

$$\frac{d}{ds}\left\{(V\sigma+\lambda)\frac{dx}{ds}\right\} + X\sigma = 0,$$
$$\frac{d}{ds}\left\{(V\sigma+\lambda)\frac{dy}{ds}\right\} + Y\sigma = 0,$$
$$\frac{d}{ds}\left\{(V\sigma+\lambda)\frac{dz}{ds}\right\} + Z\sigma = 0.$$

Wird hierin T für $V\sigma+\lambda$ geschrieben, so stimmen diese Gleichungen mit § 578 (1) überein.

580. Die gemeine Kettenlinie. — Die Form der gemeinen Kettenlinie (§ 574) kann natürlich mit Zugrundelegung der Differentialgleichungen (§ 578) der Kettenlinie im Allgemeinen untersucht werden. Es ist aber zweckmässig und lehrreich, diese Curve zu behandeln, ohne eins der schon erhaltenen Resultate zu benutzen, und dadurch eine Erläuterung der in § 575 dargelegten dritten Methode zu geben.

Dritte Methode. — Wenn die Kette im Gleichgewicht sich befindet, so können wir voraussetzen, ein beliebiger Bogen derselben werde starr, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Die einzigen auf diesen starren Körper wirkenden Kräfte sind die Spannungen in seinen Endpunkten und sein Gewicht. Die Richtungen dieser drei Kräfte müssen nach § 564 einer Ebene angehören, und da eine derselben vertical ist, so liegt die ganze Curve in einer Verticalebene. Diese Ebene sei die xz Ebene, und es seien x_0, z_0; x_1, z_1 die Coordinaten der Endpunkte des als starr angesehenen Bogens, s_0 und s_1 Bogenlängen von einem beliebig gewählten Curvenpunkte an bis zu den Punkten (x_0, z_0), (x_1, z_1), endlich T_0 und T_1 die Spannungen in diesen Punkten. Nehmen wir dann die horizontalen Componenten der Kräfte, so finden wir

$$T_0\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = T_1\left(\frac{dx}{ds}\right)_1;$$

$T\left(\frac{dx}{ds}\right)$ ist folglich in der ganzen Curve constant. Ferner führen die verticalen Componenten der Kräfte zu der Gleichung

$$T_1\left(\frac{dz}{ds}\right)_1 - T_0\left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = \sigma\,(s_1 - s_0),$$

wenn das Gewicht der Masseneinheit als Einheit der Kraft genommen wird.

Ist also T_0 die Spannung im tiefsten Punkte der Curve, wo $\frac{dz}{ds} = 0$ und $s = 0$ ist, und T die Spannung in einem beliebigen Punkte (x, z) der Curve, so erhalten wir

$$T = T_0\frac{ds}{dx} = \sigma s\frac{ds}{dz}. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$T_0\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \sigma,$$

oder

$$T_0\frac{d^2z}{dx^2} = \sigma\frac{ds}{dx} = \sigma\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{2}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$\log\left\{\frac{dz}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right\} = \frac{\sigma}{T_0}x + C',$$

und die Constante ist Null, wenn wir den Anfangspunkt so wählen, dass $x = 0$ ist, wenn man $\frac{dz}{dx} = 0$ hat, d. h. da, wo die Kette horizontal ist. Es ist dann

$$\frac{dz}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = e^{\frac{\sigma}{T_0}x}, \tag{3}$$

folglich

$$\frac{dz}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\sigma}{T_0}x} - e^{-\frac{\sigma}{T_0}x}\right),$$

und wir erhalten durch nochmalige Integration

$$z + C'' = \frac{T_0}{2\sigma}\left(e^{\frac{\sigma}{T_0}x} + e^{-\frac{\sigma}{T_0}x}\right).$$

Hierfür kann man

$$z = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{4}$$

schreiben, die gewöhnliche Gleichung der Kettenlinie, wenn die x Axe in der Entfernung a oder $\frac{T_0}{\sigma}$ unter dem horizontalen Element der Kette angenommen wird.

Die Coordinaten dieses Elements sind danach $x = 0$, $z = \frac{T_0}{\sigma} = a$. Der letztere Ausdruck zeigt, dass

$$T_0 = \sigma a,$$

ıs also die Spannung im tiefsten Punkt der Kette (und somit auch die rizontale Componente der Spannung in jedem Punkte) gleich dem Geeht einer Länge a der Kette ist.

Nun ist $T = T_0 \frac{ds}{dx}$ [nach (1)] $= \sigma z$ [nach (4)], und daraus schliesı wir Folgendes: —

Die Spannung in einem Punkte ist gleich dem Gewicht eines ıeils der Kette, welcher gleich der verticalen Ordinate dieses Punkı ist.

581. Entsprechendes kinetisches Problem. — Aus § 576 gt unmittelbar, dass, wenn ein Massenpunkt, der die Einheit r Masse enthält, irgend eine Kettenlinie entlang mit einer Geıwindigkeit $\dot{s}$ bewegt wird, welche gleich dem numerischen Maass der Spannung in jedem Punkte ist, die diese Bewegung des Punkı erzeugende Kraft mit der Resultante der an demselben Orte f die Kettenlinie einwirkenden äusseren Kraft in derselben Richng liegt und gleich dem Product aus T in die für die Länneinheit genommene Grösse dieser Kraft ist. Denn wenn wir mit die Tangentiale und (wie früher) mit N die normale Componente r in irgend einem Punkte P der Kettenlinie thätigen, für die Länneinheit genommenen Kraft bezeichnen, so ist nach § 576 (1) S e für die Längeneinheit, folglich $S\dot{s}$ die für die Zeiteinheit geımmene Grösse der Variation von $\dot{s}$. Es ist also

$$\ddot{s} = S\dot{s} = ST,$$

er (§ 259) die tangentiale Componente der auf den in Bewegung findlichen Punkt einwirkenden Kraft ist gleich ST. Weiter ist ch § 576 (3)

$$NT = \frac{T^2}{\varrho} = \frac{\dot{s}^2}{\varrho},$$

ler die Centrifugalkraft des in Bewegung befindlichen Punktes in m Krümmungskreise seiner Bahn, d. h. die normale Componente r auf ihn wirkenden Kraft, ist gleich NT. Endlich hat diese raft nach (2) dieselbe Richtung wie N. Wir sehen daher, dass e Richtung der gesammten auf den Punkt wirkenden Kraft dielbe ist, wie diejenige der Resultante von S und N, und dass ihre rösse das T-fache der Grösse dieser Resultante ist.

Oder nehmen wir in der Differentialgleichung des § 578

$$\frac{ds}{T} = dt$$

an, so ergibt sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - T\sigma X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - T\sigma Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = - T\sigma Z,$$

welche Formeln denselben Schluss gestatten.

Wenn σ constant ist und die Kräfte einem conservativen System angehören, so haben wir nach § 578 (2), wenn V das Potential in einem beliebigen Punkte der Schnur ist,

$$T = \sigma V + C.$$

Ist also $U = \frac{1}{2}(\sigma V + C)^2$, so gehen jene Gleichungen über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dU}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dU}{dz}.$$

Die Integrale dieser mit der Kettenlinie verträglichen Gleichungen sind nur die, für welche die Constante der Energie so beschaffen ist, dass man $\dot{s}^2 = 2U$ hat.

582. Beispiele. — Wir sehen somit, wie man aus den un geläufigeren Problemen der Kinetik eines Massenpunktes unmittelbar merkwürdige Fälle von Kettenlinien herleiten kann. Wenn z. B. ein Massenpunkt unter der Einwirkung einer constanten in parallelen Linien wirkenden Kraft steht, so bewegt er sich (Ca VIII) in einer Parabel von verticaler Axe, und seine Geschwindigkeit ist in jedem Punkte gleich derjenigen, welche die Kraft erzeugt, wenn sie einen Weg hindurch wirkt, welcher gleich dem Abstande des Punktes von der Direktrix ist. Wird dieser Abstand mit z und die constante Kraft mit f bezeichnet, so ist in der zugehörigen parabolischen Kettenlinie

$$T = \sqrt{2fz},$$

und die auf die Kettenlinie wirkende Kraft ist der Axe parallel und für die Längeneinheit gleich

$$\frac{f}{\sqrt{2fz}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{f}{2z}}.$$

Wenn also die auf die Kettenlinie wirkende Kraft die Schwere ist, so muss ihre Axe vertical (der Scheitel ist bei stabilem Gleichgewicht natürlich unten) und die für die Längeneinheit genommene Masse in einem beliebigen Punkte der Quadratwurzel des Abstandes dieses Punktes von der Direktrix umgekehrt proportional sein. Daraus geht hervor, dass das Gesammtgewicht irgend eines Bogens der Horizontalprojection desselben proportional ist. Weiter werden wir später bei der Betrachtung der Cometenbewegungen beweisen, dass sich ein materieller Punkt in einer Parabel bewegt, wenn eine nach einem festen Punkte hin gerichtete Kraft auf ihn wirkt, die sich

umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von diesem Punkte ändert, und wenn seine Geschwindigkeit diejenige ist, die er durch einen Fall von einer unendlich entfernten Ruhelage aus erlangt haben würde. Da diese Geschwindigkeit in einem Abstande r gleich $\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$ ist, so folgt mit Rücksicht auf § 581, dass eine Schnur in derselben Parabel herabhängt, wenn sie unter dem Einflusse einer nach demselben Centrum hin gerichteten Kraft von der Grösse

$$\frac{\mu}{r^2} : \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{\mu}{2r^3}}$$

steht. Wenn aber die Länge der Schnur zwischen den beiden festen Punkten geändert wird, während die Centralkraft noch demselben Gesetze folgt, so wird die geänderte Kettenlinie nicht mehr parabolisch, sondern die Bahn eines materiellen Punktes sein, auf welchen eine Centralkraft von der Grösse

$$\left(C + \sqrt{\frac{2\mu}{r}}\right)\sqrt{\frac{\mu}{2r^3}}$$

wirkt; denn die Spannung ist jetzt im Abstande r vom Anfangspunkte nicht mehr $\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, sondern (§ 581) $C + \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$.

583. Umkehrung der Aufgabe. — Wenn es sich darum handelt, die gegen einen gegebenen festen Punkt gerichtete Kraft zu bestimmen, unter deren Einwirkung eine Schnur in einer beliebig gegebenen ebenen Curve herabhängt, deren Ebene diesen festen Punkt enthält, so können wir die Antwort unmittelbar aus der Lösung des entsprechenden Problems der Theorie der „centralen Kräfte“ entnehmen. Aber auch die allgemeinen Gleichungen, § 578, lassen sich immer mit Leichtigkeit anwenden, wie z. B. auf den folgenden umgekehrten Fall der Gravitationskettenlinie, der zuweilen von Nutzen ist: —

Man soll den Querschnitt für jeden Punkt einer aus gleichförmigem Material bestehenden Kette von der Beschaffenheit bestimmen, dass, wenn ihre Endpunkte fest sind, die von ihrem Gewichte erzeugte Spannung in jedem Punkte der Stärke (d. i. der Grösse des Schnittes) in diesem Punkte proportional sei. Ferner soll man die Form der Curve bestimmen, in welcher die Kette herabhängt, und welche man die Kettenlinie gleichförmiger Stärke nennt.

Da hier die Schwere die einzige äussere Kraft ist, so befindet sich die ganze Kette in einer Verticalebene. Eine horizontale Linie dieser Ebene wollen wir zur x Axe nehmen. Ist μ das für die Längeneinheit genommene Gewicht der Kette im Punkte (x, z), so gehen unsere Gleichungen [§ 578 (1)] über in

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = \mu.$$

Der Voraussetzung nach ist aber T proportional μ, also etwa $T = b\mu$. Ist also μ_0 der Werth, welchen μ in dem am tiefsten gelegenen Punkte hat, so folgt aus der ersteren Gleichung

$$\mu = \mu_0 \frac{ds}{dx},$$

und mit Rücksicht hierauf geht die zweite Gleichung über in

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{b}\,\frac{ds}{dx},$$

oder in

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{b}\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right].$$

Eine erste Integration liefert jetzt

$$\arctan\frac{dz}{dx} = \frac{x}{b},$$

und wir brauchen keine Constante hinzuzufügen, wenn wir die x Axe so wählen, dass sie die Curve in ihrem tiefsten Punkte berührt. Wird die letzte Gleichung integrirt, so folgt

$$\frac{z}{b} = -\log\cos\frac{x}{b},$$

und auch hier ist keine Constante hinzuzufügen, wenn der tiefste Punkt der Curve zum Coordinatenanfangspunkt genommen wird. Diese Gleichung kann auf die Form

$$\sec\frac{x}{b} = e^{\frac{z}{b}}$$

gebracht werden, und diese Form lässt erkennen, dass die Curve verticale Asymptoten hat, deren Horizontalabstand von einander πb beträgt. Danach ist es leicht, für beliebige Data über die Dehnbarkeit und die specifische Schwere des angewandten Materials die grösste in irgend einem Falle erreichbare Spannweite zu berechnen.

584. Eine biegsame Schnur auf einer glatten Fläche. — Wenn eine vollkommen biegsame Schnur über eine glatte Oberfläche gespannt wird, und wenn in allen ihren Punkten keine andere Kraft, als der Widerstand dieser Oberfläche auf sie wirkt, so wird sie, falls sie sich in stabilem Gleichgewicht befindet, eine Linie bilden, von welcher jedes beliebige Stück kleiner ist, als jede andere zwischen denselben Punkten auf der Oberfläche gezogene Linie. Denn (§ 564) ihr Gleichgewicht kann weder gestört, noch instabil

gemacht werden, dadurch dass man in zwei beliebigen Punkten, in denen sie auf der Oberfläche ruht, Haken über sie setzt, durch die sie frei hindurchgleiten kann, und für den zwischen diesen Punkten liegenden Theil ist die Bedingung des stabilen Gleichgewichts die eben angegebene.

Da in diesem Falle keine tangentiale Kraft auf die Schnur wirkt, und da die Normalkraft, der sie unterliegt, die Richtung der an die Oberfläche gezogenen Normalen hat, so muss (§ 576) ihre osculatorische Ebene die Oberfläche überall unter rechten Winkeln schneiden. Diese Betrachtungen, die sich leicht in die reine Geometrie übertragen lassen, führen zur Fundamental-Eigenschaft der auf irgendwelchen Oberflächen gezogenen geodätischen Linien. Die analytischen Untersuchungen der §§ 578, 579 bilden, wenn man sie auf den Fall einer zwischen zwei gegebenen Punkten über eine gegebene glatte Oberfläche gespannten Kette von nicht gegebener Länge anwendet, den directen analytischen Beweis dieser Eigenschaft.

In diesem Falle liegt es auf der Hand, dass die Spannung der Schnur in allen Punkten die nämliche, und dass der Druck, welchen die Oberfläche auf die Schnur ausübt [§ 576 (3)], in jedem Punkte der Krümmung derselben proportional ist.

585. Eine biegsame Schnur auf einer rauhen Fläche. — Da keine der vorhandenen Oberflächen vollkommen glatt ist, so kann eine Schnur oder Kette sich in Ruhe befinden, auch wenn sie längs einer so langen geodätischen Linie auf einem convexen starren Körper ausgespannt ist, dass die Länge zwischen ihren Endpunkten kein Minimum ist. In der Praxis, wie z. B. beim Binden einer Schnur um eine Kugel, ist es aber zur dauernden Sicherheit nöthig, in einer Reihe von Punkten, die so nahe an einander liegen, dass jeder freie Theil der Curve auf der Oberfläche ein wirkliches Minimum werde, Häkchen oder dergleichen anzubringen und dadurch die Schnur zu verhindern, zur Seite abzugleiten.

586. Ein um einen rauhen Cylinder gewundenes Seil. — Einen in der Praxis wichtigen Fall dieser Art liefert die Betrachtung eines um einen rauhen Cylinder gewundenen Seils. Wir wollen voraussetzen, dasselbe liege in einer zur Axe senkrechten Ebene, da wir durch diese Annahme die Frage erheblich vereinfachen, ohne die Anwendbarkeit der Lösung merklich zu beeinträchtigen. Zur Vereinfachung wollen wir weiter annehmen, dass auf das Seil keine Kräfte wirken, ausser den Spannungen und der Reaction des Cylinders. In der Praxis ist dies der Voraussetzung äquivalent, dass

die Spannungen und die Reactionen sehr gross seien im Vergleich mit dem Gewicht des Seils oder der Kette. Diese Voraussetzung ist freilich in einigen wichtigen Fällen unzulässig, besonders in Fällen, wie sie bei der Anwendung des Princips auf die beim Legen unterseeischer Kabel benutzten Hemmungen, auf Dynamometer und auf Winden mit horizontalen Axen vorkommen.

Wenn R der Widerstand in Richtung der Normale ist, den die Längeneinheit der Schnur in irgend einem Punkte vom Cylinder erfährt, wenn ferner T und $T + \delta T$ die Spannungen in den Endpunkten eines Bogens δs sind, und wenn $\delta \vartheta$ der Winkel zwischen den Richtungen dieser Spannungen ist, so haben wir, wie in § 576,

$$T \delta \vartheta = R \delta s,$$

und die ins Leben gerufene Reibung ist offenbar gleich δT. Wenn das Seil im Begriff ist, eine gleitende Bewegung anzunehmen, so hat die Reibung ihren grössten Werth, und dann können wir setzen

$$\delta T = \mu R \delta s = \mu T \delta \vartheta.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$T = T_0 e^{\mu \vartheta},$$

und diese Formel zeigt, dass die Spannung des Seils für gleiche successive Gesammtkrümmungen (§ 10) in geometrischer Progression zunimmt. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie gross die Spannung auf diese Weise werden kann, wollen wir $\mu = 0{,}5$; $\vartheta = \pi$ annehmen; dann ist

$$T = T_0 e^{0{,}5\pi} = 4{,}81\ T_0 \text{ (näherungsweise).}$$

Wenn also das Seil drei Mal um den Pfosten oder Cylinder gewunden wird, so stehen die Spannungen seiner Endpunkte im Augenblick, wo es im Begriff ist, eine Bewegung anzunehmen, in dem Verhältniss

$$(4{,}81)^6 : 1 \text{ oder ungefähr } 12390 : 1.$$

Wir sehen daraus, wie ein einziger Mann mittels der Reibung leicht die Bewegung des grössten Schiffes hemmen kann, dadurch dass er einfach ein Seil mehrmals um einen Pfosten wickelt. In ähnlicher Weise wird die Reibung in vielen anderen Fällen, namentlich bei Dynamometern, mit grossem Nutzen angewandt.

587. Mit Hülfe der vorhergehenden Betrachtung kann der Leser leicht selbst die Formeln für die Lösung des allgemeinen Problems ausarbeiten, in welchem ein einer rauhen Oberfläche aufliegendes Seil unter der Einwirkung beliebiger Kräfte steht. Diese

Formeln sind nicht so wichtig oder interessant, dass sie hier Platz finden sollten.

588. **Elastische Drähte.** — Einen länglichen Körper von elastischem Material werden wir der Kürze wegen allgemein einen Draht nennen. Ein bis zu irgend einem Grade gebogener oder gedrillter Draht bietet, wenn nur der Krümmungsradius und der reciproke Werth der Drillung (§ 119) überall sehr gross sind im Vergleich mit der grössten Querdimension, einen Fall dar, in welchem, wie wir sehen werden, die Lösung der allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers entweder in endlichen Ausdrücken angegeben, oder auf vergleichsweise leichte Fragen reducirt werden kann, die hinsichtlich der mathematischen Bedingungen mit einigen der elementarsten Probleme der Hydrokinetik, der Elektricität und der Wärmeleitung übereinstimmen. Diese Probleme sind übrigens nur zu dem Zwecke zu lösen, um gewisse von dem Querschnitt des Drahtes und der elastischen Beschaffenheit seiner Substanz abhängige Constanten zu bestimmen, welche ein Maass für seinen Widerstand gegen eine Biegung und Drillung liefern. Wenn die Biegungs- und Drillungsconstanten, wie wir jetzt voraussetzen, durch theoretische Berechnung oder auf experimentellem Wege bestimmt sind, so wird die Untersuchung der Gestalt und der Drillung einer beliebigen Länge des Drathes, unter der Einwirkung beliebiger Kräfte, welche keine Verletzung der oben ausgesprochenen Bedingung hervorbringen, ein Gegenstand der mathematischen Analysis, dessen Behandlung nur die Principien und Formeln aus der Geometrie oder Kinematik erfordert, welche die Theorie der Krümmung (§§ 5 bis 13) und der Drillung (§§ 119 bis 123) ausmachen.

589. Bevor wir auf die allgemeine Theorie der elastischen festen Körper eingehen, werden wir nach dem in § 573 angegebenen Plane die dynamischen Eigenschaften eines vollkommen elastischen Drahtes untersuchen und seine Gleichgewichtsbedingungen bestimmen. Wir lassen dabei keine andere Bedingung oder Beschränkung der Umstände, als die in § 588 angegebene zu, und setzen keine besondere Beschaffenheit der Substanz (isotropische oder krystallinische, faserige oder blättrige Structur) voraus. Der folgende kurze geometrische Excurs ist eine passende Einleitung: —

590. **Zusammensetzung und Zerlegung von Krümmungen in einer Curve.** — Wie man Krümmungen mit einander oder mit Drillungen geometrisch verbindet, erhellt aus den oben gegebenen Definitionen und Principien über die Krümmung (§§ 5 bis 13)

und Drillung (§§ 119 bis 123) und aus der in § 96 erörterten Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten. Wenn z. B. eine Linie OT eines starren Körpers beständig der Tangente PT in einem Punkte P parallel bleibt, der sich mit der Einheit der Geschwindigkeit längs einer ebenen oder gewundenen Curve bewegt, so besitzt der Körper um eine zu OT und zum Krümmungsradius senkrechte Axe (d. h. senkrecht zur osculatorischen Ebene) eine Winkelgeschwindigkeit, die numerisch gleich der Krümmung ist. Ausserdem kann man den Körper mit einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit um OT rotiren lassen. Wenn z. B. eine Linie OA desselben beständig einer Querlinie (§ 120) PA parallel bleibt, so wird die Componente der Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers um OT in jedem Augenblick gleich der Drillung (§ 120) sein, welche in diesem Punkte der Curve die Querlinie um deren Tangente erfährt. Weiter kann die Winkelgeschwindigkeit um OA in Componenten um zwei Linien OK, OL zerlegt werden, die zu einander und zu OT senkrecht sind, und die Gesammtkrümmung der Curve lässt sich demgemäss in zwei Krümmungscomponenten zerlegen, deren Ebenen beziehungsweise senkrecht zu jenen beiden Linien sind. Die Grösse jeder dieser Krümmungscomponenten ist natürlich gleich dem Product aus der Gesammtkrümmung in den Cosinus des Neigungswinkels zwischen ihrer Ebene und der osculatorischen Ebene, und somit leuchtet ein, dass jede Krümmungscomponente einfach die Krümmung der Projection der gegebenen Curve auf die Ebene der Componente ist*).

591. Gesetze der Biegung und Torsion. — Die vollständige Theorie der elastischen Drähte zeigt, wie man die Constanten des Widerstandes, den der Körper einer Biegung und Torsion entgegensetzt, aus der Form seines Querschnitts und den geeigneten Daten in Betreff der elastischen Eigenschaften seiner Substanz theoretisch bestimmen kann. Ausserdem lehrt sie einfach, dass der unter der Einwirkung der Kräfte stehende Draht, so lange seine Deformation die in § 588 angegebene Grenze nicht überschreitet, folgenden Gesetzen gehorcht: —

*) Die Krümmung der Projection einer Curve auf eine Ebene, die mit der osculatorischen Ebene den Winkel α bildet, ist $\frac{1}{\varrho}\cos\alpha$, wenn die Ebene der Tangente parallel ist, und $\frac{1}{\varrho\cos^2\alpha}$, wenn die Ebene der Hauptnormale (oder dem Radius der absoluten Krümmung) parallel ist. Es ist nicht schwer, jeden dieser Ausdrücke zu beweisen.

Die gesammte Wechselwirkung zwischen den Theilen des Drahtes zu beiden Seiten des Querschnitts in irgend einem Punkte (es ist dies natürlich die Wirkung der Masse, welcher der Schnittebene unendlich nahe auf der einen Seite liegt, auf die Masse, welche sich in unendlich kleiner Entfernung auf der anderen Seite der Schnittebene befindet) werde auf eine einzige durch irgend einen Punkt des Schnittes gehende Kraft und auf ein einziges Kräftepaar reducirt. Dann sind

I. die Drillung und Krümmung des Drahtes in der Nähe dieses Schnittes von der Kraft unabhängig und hängen nur von dem Kräftepaare ab.

II. Die Krümmungen und die Grössen der Drillung, die von mehreren Kräftepaaren einzeln erzeugt werden, geben als geometrische Resultante diejenige Krümmung und Drillung, die durch eine der Resultante jener Kräftepaare gleiche Wechselwirkung wirklich erzeugt werden.

592. Wir fügen hinzu, obgleich es für unseren jetzigen Zweck nicht nöthig ist, dass es in dem Querschnitt einen bestimmten Punkt von der Beschaffenheit gibt, dass, wenn man ihn als den Punkt wählt, in welchen die Kräfte versetzt werden, ein höherer Grad der Annäherung für die Erfüllung dieser Gesetze erlangt wird, als wenn irgend ein anderer Punkt des Schnittes gewählt würde. Diesen Punkt, der, wenn der Querschnitt des Drahtes aus einer gleichförmigen Substanz besteht, der Trägheitsmittelpunkt der Schnittfläche ist, werden wir allgemein den elastischen Mittelpunkt oder den Mittelpunkt der Elasticität des Schnittes nennen. Derselbe hat die folgende wichtige Eigenschaft: — Die Verbindungslinie der elastischen Mittelpunkte oder, wie wir sie nennen werden, die elastische Centrallinie ändert ihre Länge nicht merklich, wenn man den Draht innerhalb der (§ 588) angegebenen Grenzen einer beliebigen Biegung und Drillung unterwirft. Die Ausdehnung oder Zusammenziehung, welche die vernachlässigte resultirende Kraft erzeugt (wenn diese überhaupt eine solche Richtung hat, dass sie eine derartige Wirkung hervorbringt), wird bewirken, dass die Linie, die in aller Strenge ihre Länge unverändert beibehält, in jedem Theil des Drahtes, der eine endliche Krümmung hat, nur unendlich wenig von der elastischen Centrallinie abweicht. In jedem geraden Drahttheil wird es freilich offenbar keine Linie geben, die ihre Länge unverändert beibehielte; da aber die ganze Verlängerung im Vergleich mit den Wirkungen, mit denen wir es zu thun haben, unendlich klein sein würde, so bildet dieser Fall keine Ausnahme von dem ausgesprochenen Satze.

593. Rotationen, welche einer Biegung und Torsion entsprechen. — Betrachten wir jetzt einen Draht von überall gleichförmiger Substanz und Form, der von Natur gerade ist. Durch seine noch gerade elastische Centrallinie denken wir uns zwei beliebige zu einander senkrechte Coordinatenebenen gelegt, welche den durch P gehenden Normalschnitt in den Linien PK und PL schneiden. Diese beiden Linien (von denen wir annehmen, dass sie zu der Substanz gehören und sich mit derselben bewegen) werden mit einander und mit der Tangente PT an die Centrallinie Winkel bilden, deren jeder nur unendlich wenig von einem Rechten abweicht, wie auch der Draht innerhalb der angegebenen Grenzen gebogen oder gedrillt wird. Es seien nun $\varkappa$ und λ die Krümmungscomponenten (§ 590) in den beiden durch PT gelegten zu PK und PL senkrechten Ebenen, und τ die Drillung (§ 120) des Drahtes in P. Wir haben in § 590 gesehen, dass, wenn sich P mit der Einheit der Geschwindigkeit die Curve entlang bewegt, ein starrer Körper mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen OK, OL, OT, welche beständig PK, PL, PT parallel bleiben, beziehungsweise die Winkelgeschwindigkeiten $\varkappa$, λ, τ um diese Axen haben wird. Wenn also der Punkt P und die Linien PK, PL, PT in Ruhe bleiben, während der Draht von seinem anfänglichen Zustande aus in einen anderen Zustand gebogen und gedrillt wird, so werden die durch irgend einen P unendlich nahe liegenden Punkt P' gehenden Coordinatenaxen $P'K'$, $P'L'$, $P'T'$ eine Rotation erleiden, die aus $\varkappa . PP'$ um $P'K'$, $\lambda . PP'$ um $P'L'$ und $\tau . PP'$ um $P'T'$ besteht.

594. Potentielle Energie der elastischen Kraft in einem gebogenen und gedrillten Drahte. — Betrachten wir jetzt die ins Leben gerufenen elastischen Kräfte, so sehen wir, dass, wenn dieselben ein conservatives System bilden, die zum Biegen und Drillen eines Drahttheils aus seinem undeformirten in seinen wirklichen Zustand erforderliche Arbeit nur von seiner Gestalt in diesen beiden Zuständen abhängt. Bezeichnet demnach $w . PP'$ die Grösse dieser Arbeit für die unendlich kleine Länge PP' des Drahtes, so muss w eine Function von $\varkappa$, λ, τ sein; wenn also K, L, T die Componenten des resultirenden Kräftepaars aller Kräfte bezeichnen, die auf den durch P' gehenden Schnitt wirken müssen, um den Theil PP' in seinem deformirten Zustande zu erhalten, so ergibt sich aus §§ 240, 272, 274, dass

$$(1) \qquad K\delta\varkappa = \delta_\varkappa w, \quad L\delta\lambda = \delta_\lambda w, \quad T\delta\tau = \delta_\tau w$$

ist, wo $\delta_\varkappa w$, $\delta_\lambda w$, $\delta_\tau w$ die Zunahmen von w sind, welche beziehungsweise den unendlich kleinen Zunahmen $\delta\varkappa$, $\delta\lambda$, $\delta\tau$ von $\varkappa, \lambda, \tau$ entsprechen.

595. Wie sehr nun auch die Gestalt irgend einer endlichen Länge des Drahtes geändert werden möge, die Bedingung des § 588 fordert offenbar, dass die Aenderung der Gestalt in jedem unendlich kleinen Theil, d. h. die Deformation (§ 154) der Substanz überall sehr klein sei (sie müsste unendlich klein sein, wenn die Theorie in aller Strenge sollte angewendet werden können). Mit Rücksicht hierauf zeigt das Princip der Superposition von Krümmungen und Drillungen (§ 591, II), dass, wenn jede der Grössen $\varkappa, \lambda, \tau$ in einem Verhältniss vergrössert oder verringert wird, jede der Grössen K, L, T in demselben Verhältniss zu- oder abnimmt, folglich w in dem Quadrat dieses Verhältnisses; denn der Winkel, durch welchen jedes Kräftepaar wirkt, ändert sich in demselben Verhältniss wie die Grösse des Paars. Algebraisch ausgedrückt heisst dies: w ist eine homogene quadratische Function von $\varkappa$, λ, τ.

Auf diese Weise erhalten wir, wenn A, B, C, a, b, c sechs Constanten bezeichnen,

$$w = \tfrac{1}{2}\,(A\varkappa^2 + B\lambda^2 + C\tau^2 + 2a\lambda\tau + 2b\tau\varkappa + 2c\varkappa\lambda); \tag{2}$$

folglich ist nach § 594 (1)

$$\begin{cases} K = A\varkappa + c\lambda + b\tau \\ L = c\varkappa + B\lambda + a\tau \\ T = b\varkappa + a\lambda + C\tau. \end{cases} \tag{3}$$

Durch die bekannte Reduction der homogenen quadratischen Function können diese Ausdrücke natürlich auf die folgenden einfachen Formen gebracht werden: —

$$\begin{cases} w = \tfrac{1}{2}\,(A_1\theta_1^2 + A_2\theta_2^2 + A_3\theta_3^2) \\ L_1 = A_1\theta_1,\ L_2 = A_2\theta_2,\ L_3 = A_3\theta_3, \end{cases} \tag{4}$$

wo θ_1, θ_2, θ_3 lineare Functionen von $\varkappa$, λ, τ sind, und wenn man diese Functionen darauf beschränkt, dass sie die Ausdrücke für die um drei zu einander senkrechte Axen genommenen Componenten der als Winkelgeschwindigkeiten um die Axen PK, PL, PT angesehenen Rotationen $\varkappa$, λ, τ sind, so sind die Lagen der neuen Axen PQ_1, PQ_2, PQ_3 und die Werthe von A_1, A_2, A_3 bestimmt; die letzteren sind nämlich die Wurzeln der aus (A, B, C, a, b, c) gebildeten kubischen Determinantengleichung des § 181 (11). Wir schliessen daraus Folgendes: —

596. Die drei Hauptaxen der torquirenden Biegung. — Es gibt im Allgemeinen durch jeden Punkt P der Mittellinie eines Drahtes drei bestimmte, zu einander senkrechte Richtungen PQ_1, PQ_2, PQ_3 von der Beschaffenheit, dass, wenn man auf irgend zwei

Theile des Drahtes in Ebenen, die zu einer dieser Richtungen senkrecht sind, entgegengesetzte Kräftepaare wirken lässt, jeder dazwischen liegende Theil eine Rotation in einer Ebene erfährt, die den Ebenen der Paare parallel ist. Die Momente der Kräftepaare, die erforderlich sind, um eine Rotation von der Einheit der Geschwindigkeit um diese drei Axen zu erzeugen, werden die Hauptwiderstandsmomente des Drahtes gegen eine Deformation (torquirende Biegung) genannt. Sie sind die Elemente, die wir in der vorstehenden Untersuchung mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet haben.

597. Wenn der in § 593 vorgestellte starre Körper Trägheitsmomente von der Grösse A_1, A_2, A_3 um drei durch O gehende Hauptaxen hat, die beständig den durch P gehenden Hauptwiderstandsaxen parallel bleiben, während P sich mit der Einheit der Geschwindigkeit den Draht entlang bewegt, so wird das Moment seiner Bewegungsgrösse um irgend eine Axe gleich dem Moment der Componente des Deformationskräftepaars um die durch P gehende parallele Axe sein. Dies ergibt sich aus der Uebereinstimmung der vorhergehenden Formeln mit denen, die wir unten (Cap. IX) für das Moment der Bewegungsgrösse eines rotirenden starren Körpers erhalten werden.

598. Die drei Hauptspiralen. — Die Form, welche der Draht annimmt, wenn er unter der Einwirkung von Kräftepaaren die um eine der drei Hauptaxen drehen, zur Ruhe kommt, ist natürlich eine gleichförmige Schraubenlinie, deren Axe eine zu dieser Hauptaxe parallele Linie ist, und welche einem Cylinder aufliegt, dessen Radius durch die Bedingung bestimmt wird, dass die ganze Rotation, die das eine Ende des Drahtes aus seinem undeformirten Zustande erfährt, während das andere Ende festgehalten wird, gleich der von dem einwirkenden Kräftepaar erzeugten Rotation ist.

Es sei l die Länge des Drahtes von einem festgehaltenen Ende E bis zum anderen Ende E', wo ein Kräftepaar L in einer Ebene wirkt, welche auf der durch einen beliebigen Punkt des Drahtes gehenden Hauptaxe PQ_1 senkrecht steht. Da die Grösse der Rotation für die Längeneinheit $\frac{L}{A_1}$ beträgt [§ 595 (4)], so beläuft sie sich im Ganzen auf $l\frac{L}{A_1}$. Dies ist daher der Steigungswinkel der Schraubenlinie auf dem Cylinder, dem sie aufliegt. Bezeichnet also r den Radius dieses Cylinders und i_1 die Neigung der Schraubenlinie gegen die Axe desselben (es ist dies die Neigung von PQ_1 gegen die Länge des Drahtes), so erhalten wir

$$r \frac{Ll}{A_1} = l \sin i_1,$$

folglich

$$r = \frac{A_1 \sin i_1}{L}. \tag{5}$$

599. Fall, in welchem die elastische Centrallinie eine Normalaxe der Torsion ist. — In den für die Praxis wichtigsten Fällen, namentlich in denjenigen, in welchen die Substanz isotropisch ist (was bei den gewöhnlichen Metalldrähten nahezu der Fall ist), oder in Stäben oder Stangen von faseriger oder krystallinischer Structur, bei denen eine Axe der elastischen Symmetrie die Längsrichtung des Körpers hat, fällt, wie wir später sehen werden, eine der drei Normalaxen der torquirenden Biegung mit der Länge des Drahtes zusammen, und die beiden anderen sind senkrecht zu derselben; die erstere Axe ist eine Axe reiner Torsion, die beiden letzteren sind Axen reiner Biegung. Daher bringen Kräftepaare, welche um die Axe des Drahtes nach entgegengesetzten Richtungen drehen, nur eine Drillung hervor, die von keiner Biegung begleitet ist, während Kräftepaare, die in einer der beiden Hauptbiegungsebenen nach entgegengesetzten Richtungen wirken, den Draht in einen Kreis umbiegen. Die ungebogene gerade Linie, die der Draht unter der ersteren Voraussetzung bildet, und die Kreisbogen, in die er durch Kräftepaare in den beiden Hauptebenen der Biegung verwandelt wird, sind die drei Hauptspiralen des allgemeinen Problems in diesem Falle.

600. Fall gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen. — In dem noch specielleren Falle, in welchem zwei Hauptwiderstandsmomente gegen eine Biegung gleich sind, ist jede durch die Länge des Drahtes gehende Ebene eine Hauptebene der Biegung und der Widerstand gegen eine Biegung in allen gleich. Dies ist offenbar bei einem gewöhnlichen runden Draht oder Stab der Fall, oder bei einem Draht von quadratischem Durchschnitt. Wir werden später sehen, dass es sich ebenso mit einem Stabe von isotropischem Material und von einem beliebig geformten Normalschnitt verhält, der um alle in seiner Ebene durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehenden Axen kinetische Symmetrie (§ 285) hat.

601. Wenn in diesem Falle das eine Ende des Drahtes oder Stabes festgehalten wird, während man auf das andere Ende in irgend einer Ebene ein Kräftepaar wirken lässt, so wird eine gleichförmige Spirale um eine zur Ebene des Paares senkrechte Axe erzeugt werden. Die zur Axe der Spirale parallelen Linien der

Substanz sind aber nicht ihren anfänglichen Lagen parallel, wie es (§ 598) in jeder der drei Hauptspiralen des allgemeinen Problems der Fall ist, und die Linien, welche auf der Oberfläche des Drahtes der Richtung parallel gezogen sind, die der Draht hat, wenn er gerade ist, werden nicht Spirallinien von gleicher Steigung, wie bei jeder der Hauptspiralen des allgemeinen Problems, sondern verwandeln sich gewissermaassen in secundäre Spiralen, welche die von der Centrallinie des deformirten Drahtes gebildete Hauptspirale umkreisen. Wenn wir endlich im vorliegenden Falle voraussetzen, der Normalschnitt des Drahtes sei kreisförmig, und gleichförmige Spiralen längs seiner Oberfläche ziehen, wenn er in der angenommenen Art deformirt ist (zwei dieser Spiralen sind z. B. die Linien, in denen er von dem eingeschriebenen und dem umschriebenen Cylinder berührt wird), so werden diese Linien nicht gerade, sondern um den Draht gehende Spiralen, wenn demselben gestattet wird, in seinen natürlichen geraden und ungedrillten Zustand zurückzukehren.

In § 595 möge PQ_1 mit der Centrallinie des Drahtes zusammenfallen und $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = B$ sein, so dass A den Widerstand gegen eine Torsion, B denjenigen gegen eine Biegung misst. Während das eine Ende des Drahtes festgehalten wird, wirke auf das andere Ende um eine Axe, die mit der Länge einen Winkel ϑ bildet, ein Kräftepaar G ein. Dann werden die für die Längeneinheit genommenen Grössen der Drillung und Biegung nach § 595 (4) beziehungsweise

$$\frac{G \cos \vartheta}{A} \text{ und } \frac{G \sin \vartheta}{B}$$

sein. Da die letztere Grösse dasselbe wie die Krümmung ist (§ 9), und da die Spirale die Neigung ϑ gegen ihre Axe hat, so folgt [§ 126, oder § 590, Anmerkung], dass $\frac{B \sin \vartheta}{G}$ der Krümmungsradius der Projection der Spirale auf eine zur Axe senkrechte Ebene, d. h. der Radius des Cylinders ist, dem die Spirale aufliegt.

602. Deformation eines Drahtes in eine gegebene Spiralform und eine gegebene Drillung. — Ein Draht, der in allen Richtungen von gleicher Biegsamkeit ist, kann offenbar in irgend einer festgesetzten Spiralform erhalten und in einem beliebigen Grade gedrillt werden, dadurch dass man das eine Ende festhält und am anderen Ende eine bestimmte Kraft und ein bestimmtes Kräftepaar anbringt. Die Richtung der Kraft muss der Axe der Spirale parallel sein, und die Kraft muss mit dem Kräftepaar ein System ausmachen, für welches diese Linie die Centralaxe (§ 559) ist; denn sonst könnte nicht in jedem Normalschnitt der Spirale dasselbe System von Kräften sein, die einander das Gleichgewicht

halten. Man erkennt alles dieses leicht, wenn man voraussetzt, dem Draht werde erst durch irgend welche Mittel die angegebene Deformation ertheilt, und es werden sodann an seinen Enden senkrecht zu seiner Axe zwei starre Ebenen starr befestigt, welche ihrerseits durch eine in der Axe liegende Stange in starrer Verbindung stehen. Der dann sich selbst überlassene spiralförmige Draht muss nothwendig im Gleichgewicht sein, obschon sein Gleichgewicht, wenn er (für seine Form und den Grad seiner Drillung) zu lang ist, instabil sein kann. Die Kraft in der Richtung der Centralaxe und das Kräftepaar bestimmen sich durch die Bedingung, dass aus demselben, wenn die Kraft nach Poinsot's Verfahren in den elastischen Mittelpunkt irgend eines Normalschnittes versetzt wird, zwei Kräftepaare erhalten werden, die zusammen den elastischen Kräftepaaren der Biegung und Torsion äquivalent sind.

Es sei α die Neigung der Spirale gegen die zu ihrer Axe senkrechte Ebene, r der Radius des Cylinders, auf dem sie liegt, τ die für die Längeneinheit genommene Grösse der Drillung, welche der Draht in seiner Spiralform besitzt. Dann ist die Krümmung (§ 126) gleich $\frac{\cos^2\alpha}{r}$, und ihre Ebene in irgend einem Punkte der Spirale muss mit der zur Axe senkrechten Ebene den Winkel α einschliessen, da sie die Tangente an die Spirale und den Durchmesser des durch jenen Punkt gehenden Cylinders enthält. Folglich sind die in dieser und in der durch die Axe des Cylinders gehenden Ebene genommenen Componenten des Biegungs-Kräftepaars beziehungsweise

$$\frac{B\cos^2\alpha}{r}\cos\alpha \quad \text{und} \quad \frac{B\cos^2\alpha}{r}\sin\alpha.$$

In denselben Ebenen sind die Componenten des Torsions-Kräftepaars

$$A\tau\sin\alpha \quad \text{und} \quad -A\tau.\cos\alpha.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher

$$(6)\qquad \begin{cases} G = \dfrac{B\cos^2\alpha}{r}\cos\alpha + A\tau\sin\alpha \\ -Rr = \dfrac{B\cos^2\alpha}{r}\sin\alpha - A\tau\cos\alpha, \end{cases}$$

und diese Formeln geben die expliciten Werthe des erforderten Kräftepaars G und der Kraft R, welche letztere als positiv gerechnet wird, wenn sie so gerichtet ist, dass sie die Spirale ausspannt, oder wenn die Enden des oben vorausgesetzten starren Stabes durch die an den Enden der Spirale befestigten Platten einwärts gedrückt werden.

Wenn wir $R = 0$ machen, so gelangen wir wieder zu dem oben in § 601 betrachteten Falle. Wird andererseits $G = 0$ vorausgesetzt, so folgt

$$\tau = -\frac{1}{r}\frac{B}{A}\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$$

und

$$R = -\frac{B}{r^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{A\tau}{r\cos\alpha}.$$

Wir schliessen daraus: —

603. Bestimmung der Drillung, durch welche die Wirkung auf eine einzige Kraft reducirt wird. — Ein in allen Richtungen gleich biegsamer Draht kann durch eine einfache in der Richtung seiner Axe wirkende Kraft zwischen zwei starren Platten, die mit seinen Enden starr verbunden sind, in einer beliebigen festgesetzten Spiralform erhalten werden, vorausgesetzt dass ihm zugleich ein gewisser Grad von Drillung ertheilt ist. Diese Kraft bestimmt sich durch die Bedingung, dass ihr Moment in Beziehung auf die durch irgend einen Punkt der Spirale zu der durch denselben Punkt gehenden osculatorischen Ebene senkrechte Linie dem zurückbiegenden Elasticitätskräftepaar gleich und entgegengesetzt sein muss. Die Grösse der Drillung ist (nach der einfachen Gleichung der Torsion) diejenige, welche dem Moment der so bestimmten Kraft in Beziehung auf die in irgend einem Punkte an die Spirale gelegte Tangente entspricht. Da die Richtung der Kraft, der vorhergehenden Bedingung gemäss, eine solche ist, dass die Enden der Spirale zusammengepresst werden, so ist die Richtung der Drillung im Drahte der Richtung der Windung (§ 9) seiner Centrallinie entgegengesetzt.

604. Spiralfedern. — Die Principien und Formeln (§§ 593, 603), mit denen wir uns bisher beschäftigt haben, lassen sich unmittelbar auf die Theorie der Spiralfedern anwenden. Bevor wir daher unsere Untersuchung der elastischen Curven schliessen, werden wir einen kurzen Excurs über diesen merkwürdigen und praktisch wichtigen Gegenstand machen.

Eine gewöhnliche Spiralfeder besteht aus einem gleichförmigen Draht, der im undeformirten Zustande die Form einer regelmässigen Schraubenlinie hat; die Hauptaxen der Biegung und Torsion sind überall in Beziehung auf die Curve ähnlich gelegen. Wenn die Spiralfeder richtig gebraucht wird, so wirken an Armen oder Platten, die an den Endpunkten starr befestigt sind, Kräfte von solcher Beschaffenheit auf sie ein, dass die Form, auf die diese Kräfte sie bringen, immer noch eine regelmässige Schraubenlinie ist. Diese Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn man (während das eine Ende festgehalten wird) auf das andere Ende eine unendlich kleine Kraft und ein unendlich kleines Kräftepaar in der Richtung der Axe und in einer zur Axe senkrechten Ebene wirken, und die

Kraft und das Kräftepaar sodann allmälig bis zu einer beliebigen Grösse zunehmen lässt, während sie beziehungsweise immer in der Richtung der Axe der geänderten Spirale und in der zu dieser Axe senkrechten Ebene bleiben. Es würde jedoch nutzlose Mühe verursachen, das Problem detaillirt auszuarbeiten, ausser für den Fall (§ 599), in welchem eine der Hauptaxen mit der Tangente an die Centrallinie zusammenfällt und daher eine Axe reiner Torsion ist. In der Praxis entsprechen auch die Spiralfedern immer dieser Bedingung. Einen anderen interessanten Fall erhalten wir durch die Annahme (die sich praktisch leicht realisiren lässt, aber nicht erfüllt sein darf, wenn man eine gute Spiralfeder haben will), der Normalschnitt des Drahtes sei so gestaltet und in Beziehung auf die Spirale so gelegen, dass die Ebenen des grössten und des kleinsten Biegungswiderstandes gegen die Tangentialebene des Cylinders schräg geneigt sind. Wird auf eine solche Spiralfeder an ihren Enden in der regelmässigen Weise eingewirkt, so muss sie sich in ihrer ganzen Länge um einen gewissen Betrag um ihre elastische Centrallinie drehen, damit das hervorgebrachte Biegungskräftepaar genau in der osculatorischen Ebene der neuen Spirale liege, was, wie wir sofort sehen werden, der Fall sein muss. Aber Alles, was uns bei dieser merkwürdigen Wirkung interessirt, wird später (§ 624) im Falle eines offenen Kreisbogens, welcher durch ein in seiner Ebene drehendes Kräftepaar in einen Kreisbogen von grösserem oder kleinerem Radius deformirt wird, eingehend behandelt werden, und wollen wir uns der Kürze und Einfachheit wegen bei der Betrachtung der Spiralfedern, die wir jetzt beginnen, auf die Fälle beschränken, in welchen der Draht einer Biegung in jeder Richtung denselben Widerstand leistet, oder in welchen die beiden Hauptebenen des (grössten und kleinsten oder des kleinsten und grössten) Widerstandes gegen eine Biegung in jedem Punkte beziehungsweise mit der Tangentialebene des Cylinders und der die Centrallinie des Drahtes berührenden Normalebene zusammenfallen.

605. Wenn die auf das bewegliche Ende der Feder in der Richtung der Axe wirkende Kraft nach Poinsot's Verfahren (§ 555) in irgend einen Punkt der elastischen Centrallinie versetzt wird, so liefert sie ein Kräftepaar in der durch jenen Punkt und die Axe der Spirale gehenden Ebene. Die Resultante dieses Kräftepaars und des Paars, das, wie wir voraussetzen, an dem beweglichen Ende in der zur Axe der Spirale senkrechten Ebene dreht, ist das wirksame Biegungs- und Drillungskräftepaar, und da dasselbe in einer

zur Tangentialebene an den Cylinder senkrechten Ebene liegt, so muss diejenige Componente desselben, welche die Biegung erzeugt, gleichfalls senkrecht zu dieser Ebene sein, folglich in der osculatorischen Ebene der Spirale liegen. Dieses componirende Kräftepaar unterhält daher einfach eine Krümmung, welche von der natürlichen Krümmung des Drahtes verschieden ist, während das andere Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Centrallinie ist, reine Torsion unterhält. Die Gleichungen des Gleichgewichts sind der blosse mathematische Ausdruck dieser Ergebnisse.

Wird wie früher (§ 602) jedes der Biegungs- und Torsionskräftepaare in Componenten zerlegt, deren Ebenen durch die Axe der Spirale gehen und senkrecht zu derselben sind, so erhalten wir

$$(7)\quad \begin{cases} G = B\left(\dfrac{\cos^2 \alpha}{r} - \dfrac{\cos^2 \alpha_0}{r_0}\right) \cos \alpha' + A\tau \sin \alpha' \\ -Rr = B\left(\dfrac{\cos^2 \alpha}{r} - \dfrac{\cos^2 \alpha_0}{r_0}\right) \sin \alpha' - A\tau \cos \alpha' \\ \tau = \dfrac{\cos \alpha \sin \alpha}{r} - \dfrac{\cos \alpha_0 \sin \alpha_0}{r_0} \text{ (nach § 126);} \end{cases}$$

darin bezeichnet A den Torsionswiderstand, B den Widerstand, welchen der Draht in der osculatorischen Ebene der Spirale einer Biegung entgegensetzt; r_0 den Radius des Cylinders und α_0 die Neigung der Spirale gegen denselben, so lange sie nicht deformirt ist; r und α dieselben Parameter der Spirale, wenn sie unter der Einwirkung der in der Richtung der Axe thätigen Kraft R und des Kräftepaars G steht; endlich τ die Grösse der Drillung beim Uebergange aus dem undeformirten in den deformirten Zustand.

Diese Gleichungen geben die expliciten Ausdrücke der Kraft und des Kräftepaars, die erforderlich sind, um eine bestimmte Aenderung der Spirale zu erzeugen; sie bestimmen aber auch die Parameter α', r' der geänderten Curve, falls die Kraft und das Kräftepaar gegeben sind.

Da es hauptsächlich die äussere Wirkung der Feder ist, die uns in praktischen Anwendungen interessirt, so wollen wir die Parameter α, r der Spirale durch die folgenden Annahmen eliminiren: —

$$(8)\quad \begin{cases} x = l \sin \alpha,\ \varphi = \dfrac{l \cos \alpha}{r} \\ x_0 = l \sin \alpha_0,\ \varphi_0 = \dfrac{l \cos \alpha_0}{r_0}; \end{cases}$$

darin bezeichnet l die Länge des Drahtes; φ den Winkel zwischen den Ebenen, welche durch die beiden Enden des Drahtes und die Axe gehen; x den Abstand der Ebenen, welche durch die Endpunkte gehen und zur Axe senkrecht sind; φ_0 und x_0 bezeichnen für den undeformirten Zustand dasselbe, was φ und x im deformirten Zustande, so dass wir (φ, x) und (φ_0, x_0) als die Coordinaten des beweglichen Endes in Beziehung auf das feste in beiden Lagen der Feder ansehen können. Die vorhergehenden Gleichungen gehen durch diese Annahmen über in

fährt fort, solche kleine Kreisbogen zu zeichnen, deren Radien in entsprechender Weise zunehmen, wie die Abstände ihrer Mittelpunkte von der Richtung der Kraft kleiner werden. Die beigefügten Figuren sind aber nicht in dieser Weise, sondern einfach nach den Formen gezeichnet, welche eine flache Stahlfeder wirklich annahm; die Feder war so schmal, dass ihre Gestalt in den Fällen, in welchen einige ihrer Theile einander kreuzten, durch die dadurch bedingte Windung der Curve (§ 7) nicht sehr gestört wurde. Die Art der Anlegung der Kraft ist hinlänglich in den Figuren angedeutet worden.

Gleichung der ebenen elastischen Curve. — Es sei die Richtung der Kraft die x-Axe und ϱ der Krümmungsradius in irgend einem Punkte (x, y) der Curve. Dann verwandelt sich die oben ausgesprochene dynamische Bedingung in

$$\varrho y = \frac{B}{T} = a^2, \tag{1}$$

wo B den Biegungswiderstand, T die Spannung der Feder und a einen von diesen Elementen abhängigen linearen Parameter der Curve bezeichnet. Nach der gewöhnlichen Formel für ϱ^{-1} ist daher

$$y = \frac{a^2 \frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Wird dies mit $2\,dy$ multiplicirt und darauf integrirt, so folgt

$$y^2 = C - \frac{2a^2}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2}}, \tag{3}$$

und endlich

$$x = \int \frac{(y^2 - C)\,dy}{(4a^4 - C^2 + 2Cy^2 - y^4)^{1/2}}, \tag{4}$$

was die Gleichung der Curve in Form eines elliptischen Integrals ist.

Wird in dem ersteren Integral, (3), $\frac{dy}{dx} = 0$ gesetzt, so erhält man

$$y = \pm (C \pm 2a^2)^{1/2}; \tag{5}$$

das obere Zeichen innerhalb der Klammer liefert Punkte des grössten Abstandes von der Axe, das untere Zeichen Punkte, für welche dieser Abstand ein Minimum ist, wenn es reelle Punkte der Art gibt. Folglich gibt es, wenn $C < 2a^2$ ist, zu beiden Seiten der Linie der Kraft Punkte, welche von dieser Linie gleiche grösste Abstände haben, aber keine reellen Punkte, für welche die Abstände Minima seien; hierin sind also die in den Figuren 28 bis 32 (a. f. S.) dargestellten Fälle enthalten. Wenn dagegen $C > 2a^2$ ist, so gibt es sowohl reelle Minima als Maxima; dies ist also der Fall der Figur 34. Wir bemerken, dass die analytischen Gleichungen in diesem Falle zwei congruente abgesonderte Curven um-

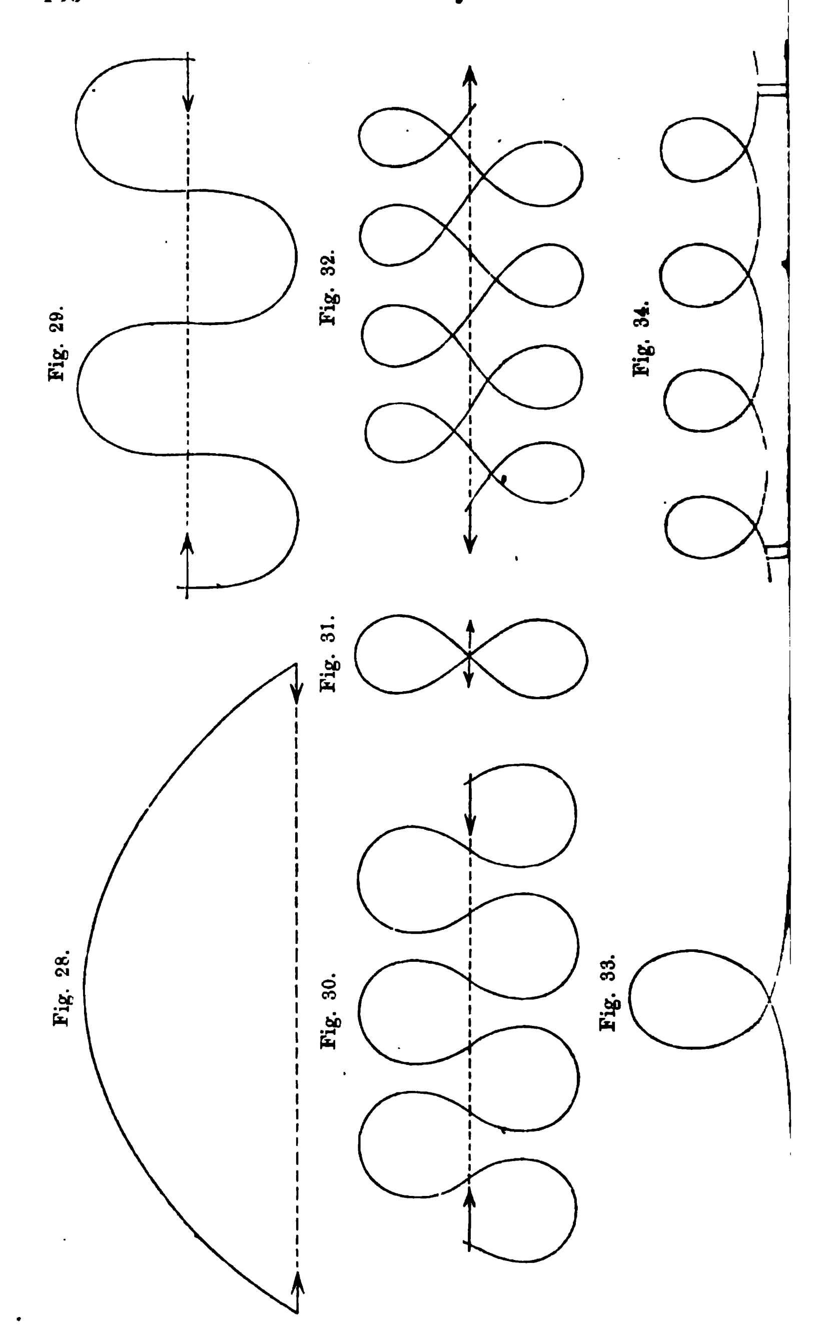


Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

Fig. 34.

hat, da die Länge von O_1T Eins ist, in Beziehung auf die Axen OX, OY, OZ beziehungsweise die Momente

$$0, \quad R\frac{dz}{ds}, \quad -R\frac{dy}{ds}.$$

Folglich sind die Momente der hierdurch in irgend einer Zeit erzeugten Bewegungsgrösse (es sind dies einfach ihre Zeitintegrale), da $s = t$ ist,

$$0, \quad R(z - z_0), \quad -R(y - y_0),$$

wenn (y_0, z_0) und (y, z) die Coordinaten von P zu Anfang und zu Ende der Zeit sind. Dies sind aber genau die Zunahmen, welche die componirenden Kräftepaare der torquirenden Biegung im Drahte von der ersten zur zweiten Lage von P erfahren. Wenn also die componirenden Momente der Bewegungsgrösse des Körpers beim Beginn der Zeit gleich den componirenden Kräftepaaren der torquirenden Biegung des Drahtes im Punkte (x_0, y_0, z_0) sind, so wird die Wirkung der Kraft R, während der Punkt O festgehalten wird, darin bestehen, dass das Moment seiner Bewegungsgrösse beständig mit dem Kräftepaar der torquirenden Biegung des Drahtes in Uebereinstimmung erhalten bleibt, und dass folglich seine Linien O_1T, O_1K, O_1L den entsprechenden durch P gehenden Linien im Drahte parallel bleiben, welcher von P mit der Einheit der Geschwindigkeit durchlaufen wird.

Dieser sehr bemerkenswerthe Satz ist von Kirchhoff entdeckt worden, dem wir auch die erste ganz allgemeine Untersuchung über die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung eines elastischen Drahtes verdanken*).

610. Der auf diese Weise dargelegte Vergleich zwischen dem statischen Problem der Biegung und Drillung eines Drahtes und dem kinetischen Problem der Rotation eines starren Körpers liefert eine interessante Veranschaulichung oder gewissermaassen graphische Darstellung eines jeden dieser Vorgänge durch den andern. Den Nutzen, der hierdurch für eine vollständige geistige Aneignung beider Gegenstände erwächst, muss Jeder empfinden, der den Gewinn an physikalischer Einsicht höher schätzt, als das mechanische Durcharbeiten mathematischer Ausdrücke, welcher letzteren Arbeit sich in der letzten Zeit leider so Viele gewidmet haben, die zu besseren Dingen in der Wissenschaft befähigt waren.

Im Capitel IX, wo wir uns mit dem kinetischen Problem besonders beschäftigen, werden wir Gelegenheit haben, die Rotationen zu untersuchen, welche den Spiralen der §§ 601 bis 603 entsprechen, und auch den allgemeinen Charakter der elastischen Curven

---

*) Crelle's Journal 1859. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes.

anzugeben, welche einigen der weniger einfachen Fälle von Rotationsbewegung entsprechen.

611. Das gemeine Pendel und die elastische Curve. — Für jetzt beschränken wir uns auf ein Beispiel, welches, soweit es den Vergleich zwischen dem statischen und dem kinetischen Problem betrifft, das einfachste von allen ist — die elastische Curve von Johann Bernoulli und das gemeine Pendel. Auf einen gleichförmigen geraden Draht, der entweder in allen Ebenen seine ganze Länge hindurch gleich biegsam ist, oder in zwei Ebenen seine ganze Länge hindurch Richtungen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes hat, wirken in einer dieser Ebenen eine Kraft und ein Kräftepaar ein, die am einen Ende entweder direct, oder vermittels eines mit demselben starr verbundenen Armes angreifen, während das andere Ende festgehalten wird. Die Kraft und das Kräftepaar können natürlich (§ 558) auf eine einzige Kraft reducirt werden; der äusserste Fall, in welchem sich bei dieser Reduction statt einer Kraft ein Kräftepaar ergibt, ist mathematisch insofern im allgemeinen Fall enthalten, als das Kräftepaar einer in einem unendlich grossen Abstande wirkenden unendlich kleinen Kraft äquivalent ist. Um jede Beschränkung des Problems zu vermeiden, müssen wir voraussetzen, diese Kraft wirke auf einen mit dem Drahte starr verbundenen Arm, obschon die Kraft in jedem Falle, in welchem ihre Richtung den Draht schneidet, direct in diesen Schnittpunkt versetzt werden kann, ohne dass dadurch die Umstände für den Drahttheil zwischen diesem Punkte und dem festen Ende geändert würden. Unter diesen Umständen wird der Draht in eine Curve gebogen, welche ganz in der durch das feste Ende und die Richtung der Kraft gehenden Ebene liegt, und deren Krümmung (§ 599) in jedem Punkte, wie zuerst Johann Bernoulli gezeigt hat, einfach dem Abstand des Punktes von der Richtung der Kraft proportional ist. Die Curve, welche dieser Bedingung genügt, hat offenbar zwei unabhängige Parameter, von denen der eine passend als die mittlere Proportionale a zwischen dem Krümmungsradius in irgend einem Punkte und dem Abstand dieses Punktes von der Richtung der Kraft angesehen wird, während der andere der grösste Abstand b des Drahtes von der Kraftlinie ist. Wenn man irgend einen Werth für jeden dieser Parameter wählt, so ist es leicht, die entsprechende Curve mit einem hohen Grade von Genauigkeit zu verzeichnen. Man beginnt mit einem kleinen Kreisbogen, welcher eine in der gegebenen grössten Entfernung von der Kraftlinie gezogene Gerade am einen Ende berührt, und

$$
(11)\quad\begin{cases}
E = \frac{1}{2l^3}\left\{\left(B\frac{x^2}{l^2-x^2}+A\right)\varphi^2\delta x^2 + 2(A-B)x\varphi\delta x\delta\varphi\right. \\
\qquad\qquad\qquad\left. + [B(l^2-x^2)+A x^2]\,\delta\varphi^2\right\}, \\
R = \frac{1}{l^3}\left\{\left(B\frac{x^2}{l^2-x^2}+A\right)\varphi^2\delta x + (A-B)x\varphi\,\delta\varphi\right\}, \\
L = \frac{1}{l^3}\{(A-B)x\varphi\delta x + [B(l^2-x^2)+A x^2]\,\delta\varphi\}.
\end{cases}
$$

Beispiel 1. — Für eine Spirale von 45° Neigung ist

$$x^2 = \tfrac{1}{2}\,l^2 \text{ und } \varphi^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{l^2}{r^2};$$

die Formeln gehen also über in

$$
(12)\quad\begin{cases}
R = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{l r^2}\,[(A+B)\,\delta x + (A-B)\,r\delta\varphi], \\
L = \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{l r}\,[(A-B)\,\delta x + (A+B)\,r\delta\varphi].
\end{cases}
$$

Es ist sehr lehrreich, diesen Fall sorgfältig zu studiren und nöthigenfalls durch ein Modell zu erläutern, das sich aus gewöhnlichem Eisen- oder Stahldraht leicht herstellen lässt.

Beispiel 2. — Es sei $\frac{x}{l}$ sehr klein. Wir können dann das Quadrat dieser Grösse vernachlässigen und erhalten $\varphi = \frac{l}{r}$, also

$$L = \frac{B}{l}\,\delta\varphi \text{ und } R = \frac{A}{l r^2}\,\delta x.$$

Die erstere dieser beiden Formeln ist einfach die Gleichung der directen Biegung (§ 595). Die Interpretation der zweiten Formel ist folgende: —

608. Spiralfeder von unendlich kleiner Neigung. Torsionswage. — Bei einer Spiralfeder von unendlich kleiner Neigung gegen die zu ihrer Axe senkrechte Ebene ist die in dem beweglichen Ende durch eine in der Axe der Spirale wirkende Kraft hervorgebrachte Verschiebung eine einfache geradlinige Translation in der Richtung der Axe und gleich der Länge des Kreisbogens, durch welchen eine gleich grosse Kraft das freie Ende eines dem Radius des Cylinders gleichen starren Hebelarmes fortbewegen würde, welcher den Draht zu torquiren hätte; dabei ist angenommen, dass der Draht der Spirale gerade gestreckt worden sei, sein eines Ende vollkommen festgehalten werde, und dass der Hebel am anderen Ende normal zur Länge des Drahtes und so befestigt sei, dass er sich nur um eine mit der Axenlinie des Drahtes zusammenfallende Axe drehen kann. Dieser Ausspruch rührt von J. Thomson*) her, welcher

*) Camb. u. Dubl. Math. Journ. 1848.

zeigte, dass, wenn man eine Spiralfeder von unendlich kleiner Neigung ausspannt, die ausgeübte Wirkung und die benutzte elastische Eigenschaft dieselben wie bei einer Torsionswage sind, welche denselben Draht, aber gerade gestreckt, enthält (§ 433). Diese Theorie ist, wie J. Thomson experimentell zeigte, für die meisten praktischen Anwendungen hinlänglich genau, da die gewöhnlich angefertigten und gebrauchten Spiralfedern von sehr kleiner Neigung sind. Es ist nicht schwer, aus den vorhergehenden Formeln in jedem Falle die für die vorhandene Neigung erforderliche Correction zu finden. Das Fundamentalprincip, dass Spiralfedern hauptsächlich vermittels der Torsion wirken, scheint zuerst von Binet im Jahre 1814 entdeckt worden zu sein*).

609. Kirchhoff's Vergleich der Biegung und Drillung eines Drahtes mit der Rotation eines starren Körpers. — Wir kehren jetzt zum Falle eines gleichförmigen Drahtes zurück, der, wenn Nichts auf ihn einwirkt, gerade und ungedrillt (d. h. cylindrisch oder prismatisch) ist, und nehmen an, es wirke auf den Draht, dessen eines Ende in einer gegebenen Richtung festgehalten wird, keine Kraft von aussen, ausser derjenigen eines am anderen Ende befestigten starren Rahmens, auf welchen in einer gegebenen Linie AB eine Kraft R und in einer zu dieser Linie senkrechten Ebene ein Kräftepaar G wirkt. Die Gestalt und die Drillung, die der Draht haben wird, wenn er sich im Gleichgewicht befindet, werden durch die Bedingung bestimmt, dass in jedem Punkte P seiner Länge die Torsion und die Biegung die sind, welche das Kräftepaar G in Verbindung mit dem durch Versetzung der Kraft R nach P erhaltenen Kräftepaare erzeugt. Es folgt daraus, dass der starre Körper des § 597, der sich in der vorgeschriebenen Weise um den festen Punkt O bewegt, und der nur einer constanten in dem Punkte $,T$ in einer zu AB parallelen Linie $,TD$ angreifenden Kraft von der Grösse R unterworfen ist, sich weiter in der vorgeschriebenen Weise bewegen wird, wenn man ihn in irgend einem Augenblick sich selbst überlässt.

Dies zu beweisen, nehmen wir an, der Körper werde gezwungen, sich in der vorgeschriebenen Weise zu bewegen, und zugleich wirke auf ihn die Kraft R in der Linie $,TD$. Nehmen wir dann die Coordinaten-Axe OX parallel dieser Linie an und bezeichnen mit x, y, z die Coordinaten von P zu irgend einer Zeit t, so sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinus von O,T, und die in der Linie $,TD$ wirkende Kraft R

*) St. Venant, Comptes Rendus. Sept. 1864.

$$
(9)\quad \begin{cases}
L = \frac{B}{l^3} \{ \sqrt{(l^2 - x^2)}\, \varphi - \sqrt{(l^2 - x_0^2)}\, \varphi_0 \} \sqrt{(l^2 - x^2)} \\
\qquad\qquad + \frac{A}{l^3} (x\varphi - x_0 \varphi_0)\, x \\
R = - \frac{B}{l^3} \{ \sqrt{(l^2 - x^2)}\, \varphi - \sqrt{(l^2 - x_0^2)}\, \varphi_0 \} \frac{x\varphi}{\sqrt{(l^2 - x^2)}} \\
\qquad\qquad + \frac{A}{l^3} (x\varphi - x_0 \varphi_0)\, \varphi.
\end{cases}
$$

Hier sehen wir, dass $L\,d\varphi + R\,dx$ das Differential einer Function der beiden unabhängig Veränderlichen x, φ ist. Wird diese Function mit E bezeichnet, so erhalten wir

$$
(10)\quad \begin{cases}
E = \frac{1}{2} \frac{B}{l^3} \{ \sqrt{(l^2 - x^2)}\, \varphi - \sqrt{(l^2 - x_0^2)}\, \varphi_0 \}^2 \\
\qquad + \frac{1}{2} \frac{A}{l^3} (x\varphi - x_0 \varphi_0)^2, \\
L = \frac{dE}{d\varphi}, \quad R = \frac{dE}{dx},
\end{cases}
$$

ein Resultat, das wir aus dem allgemeinen Princip der Energie leicht hätten herleiten können, und zwar auf folgende Weise: —

606. Die potentielle Energie der deformirten Feder ist, wie man leicht aus § 595 (4) ersieht,

$$\tfrac{1}{2} [B (\varpi - \varpi_0)^2 + A \tau^2]\, l,$$

wenn A den Widerstand gegen eine Torsion, B den Widerstand gegen eine Biegung in der Krümmungsebene, ϖ und ϖ_0 die Krümmungen des Drahtes im deformirten und undeformirten Zustande und τ die Drillung des Drahtes im deformirten Zustande bezeichnen; dabei wird vorausgesetzt, dass die Drillung im undeformirten Zustande Null sei. Die Kraft in der Richtung der Axe und das Kräftepaar, die erforderlich sind, um zu bewirken, dass die Axe der von der Feder gebildeten Spirale irgend eine gegebene Länge habe, und dass die durch ihre Enden und die Axe gelegten Ebenen irgend einen gegebenen Winkel einschliessen, sind natürlich (§ 272) gleich den Aenderungen der potentiellen Energie, genommen beziehungsweise für die Einheit der Aenderung dieser Coordinaten. Man hat aber sorgfältig zu beachten, dass die Bewegung etwas complicirt wird, wenn man die mit dem einen Ende der Feder starr verbundene Platte festhält, so dass die Tangente an diesem Ende fixirt wird, und die Bewegung der anderen Platte so regulirt, dass die zwischen beiden Platten liegende Feder beständig genau spiralförmig erhalten wird; denn wenn sich die Form der Feder ändert, so ändern sich auch der Radius des Cylinders, die Neigung der Axe

der Spirale zu der festen Richtung der Tangente am festen Ende und die Lage des Punktes, in welchem die Axe von der Ebene geschnitten wird, welche senkrecht zu ihr steht und durch das feste Ende der Feder geht. Die wirksamen Componenten einer beliebigen unendlich kleinen Bewegung des beweglichen Endes sind seine Verschiebung parallel der augenblicklichen Lage der Axe der Spirale und seine Rotation um diese Axe (zwei Grade von Freiheit); ausserdem wird dieses Ende im Allgemeinen eine unendlich kleine Verschiebung in einer gewissen Richtung und eine Rotation um eine gewisse Linie erfahren, von denen jede zu dieser Axe senkrecht ist und aus den beiden Graden von freier Bewegung durch die Bedingung bestimmt wird, dass die Curve eine genaue Spirale bleibt.

607. Beim praktischen Gebrauch der Spiralfedern ist diese Bedingung nicht streng erfüllt, sondern statt dessen gewöhnlich einer der beiden folgenden Pläne befolgt: —

(1) Man lässt eine einfache Kraft allein wirken, die zwei bestimmte, so weit es möglich ist in der Axe der undeformirten Spirale liegende Punkte der beiden Enden von einander entfernt oder einander nähert; oder

(2) Man hält das eine Ende fest und lässt das andere, ohne eine Rotation zu gestatten, in einer festen Richtung fortgleiten, die so weit es möglich ist, mit der Richtung der Axe der undeformirten Spirale zusammenfällt. Die vorstehende Untersuchung lässt sich auf die unendlich kleine Verschiebung jedes dieser beiden Fälle anwenden: im Falle (1) ist das Kräftepaar gleich Null gesetzt, und im Falle (2) ist die Rotationsbewegung um die augenblickliche Axe der Spirale gleich Null.

Für unendlich kleine Verschiebungen sei in (10)

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi \text{ und } x = x_0 + \delta x,$$

so dass jetzt

$$L = \frac{dE}{d\delta\varphi}, \quad R = \frac{dE}{d\delta x}$$

ist. Dann erhalten wir, wenn in jeder Formel nur die Glieder vom niedrigsten Grade in Beziehung auf δx und $\delta\varphi$ beibehalten werden, und x und φ statt x_0 und φ_0 geschrieben wird,

Nehmen wir $L_0 = 0$, $M_0 = 0$, $N_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$ an, so ergibt sich Folgendes: —

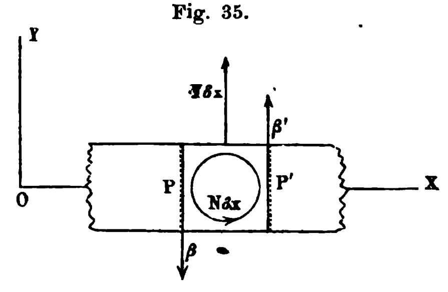
615. In dem einfachen und wichtigen Falle eines von Natur geraden Drahtes, auf den in seiner ganzen Länge beliebig vertheilte Kräfte, aber keine Kräftepaare wirken, besteht die in einem völlig freien, weder von einer Kraft, noch von einem Kräftepaar angegriffenen Ende erfüllte Bedingung darin, dass sowohl die Krümmung, als auch die Grösse ihrer Variation, genommen für die vom Ende aus gerechnete Einheit der Länge, an diesem Ende Null ist. Mit anderen Worten: Die Krümmungen in Punkten, welche dem Ende unendlich nahe liegen, verhalten sich im Allgemeinen wie die Quadrate (in besonderen Fällen wie gewisse höhere Potenzen) ihrer Abstände vom Ende. Dieselben Gesetze gelten für die von den Kräften hervorgebrachte Aenderung der Krümmung, wenn der undeformirte Draht nicht gerade ist, wenn aber die übrigen Umstände die oben angegebenen sind.

616. Ein gerader Stab wird unendlich wenig gebogen. — Um ein sehr einfaches Beispiel des Gleichgewichts eines Drahtes zu geben, welcher Kräften unterworfen ist, die in seiner ganzen Länge wirken, wollen wir voraussetzen, der Draht sei von Natur gerade, und die Richtungen der einwirkenden Kräfte, sowie die Axen der Kräftepaare seien sämmtlich senkrecht zu seiner Länge, die Kräfte und Kräftepaare aber nicht gross genug, um dem Draht eine mehr als unendlich wenig von einer Geraden abweichende Form zu geben. Damit weiter diese Kräfte und Kräftepaare keine Torsion erzeugen, mögen die drei Axen der torquirenden Biegung senkrecht zum Draht und parallel demselben sein. Wir werden aber das Problem nicht noch mehr durch die Annahme beschränken, der Schnitt des Drahtes sei gleichförmig, da wir dadurch einige der für die Praxis wichtigsten Anwendungen (auf Wagebalken, Hebel in Maschinerien, Balken in der Architektur und Ingenieurkunst) ausschliessen würden. Es ist lehrreicher, die Gleichungen des Gleichgewichts für diesen Fall direct zu ermitteln, als sie aus den Gleichungen herzuleiten, die oben für das weit umfassendere allgemeine Problem ausgearbeitet sind. Das besondere Princip für den vorliegenden Fall lautet einfach: In jeder durch die Länge des Drahtes gehenden Ebene ist der nach der Länge des Drahtes genommene zweite Differentialquotient des Biegungskräftepaars überall gleich der für die Längeneinheit genommenen einwirkenden Kraft, vermindert um den ersten Differentialquotienten des einwirkenden Kräftepaars. Im Verein mit den directen Gleichungen (§ 599)

zwischen den Componenten der Biegungskräftepaare liefert dies die erforderten Gleichungen des Gleichgewichts.

In der Figur 35, welche einen Schnitt des Drahtes in der Ebene xy darstellt, sei $OP = x$, $PP' = \delta x$. Ferner mögen Y und N die für

Fig. 35.



die Einheit der Länge des Drahtes gerechneten Componenten der einwirkenden Kraft und des einwirkenden Kräftepaars in der Ebene der Zeichnung sein, so dass $Y\delta x$ und $N\delta x$ die Grössen der Kraft und des Kräftepaars in dieser Ebene sind, welchen die Theile des Drahtes zwischen P und P' wirklich ausgesetzt sind.

Die Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten des durch P gehenden Normalschnitts liegenden Theilen der Substanz lässt sich auf eine Kraft*) und ein Kräftepaar reduciren. Die den Axen OY und OZ parallelen Componenten der Kraft seien wie früher (§ 614) β und γ, die in den Ebenen XOY und XOZ genommenen Componenten des Kräftepaars ζ und η; die entsprechenden Grössen für P' seien β', γ' und ζ', η'. Die zwischen diesen beiden Schnitten befindliche Substanz ist im Gleichgewicht unter diesen von der zu beiden Seiten unmittelbar daran grenzenden Materie ausgeübten Einwirkungen und unter der Wirkung der Kraft und des Kräftepaars, die sie von aussen angreifen. Die Componenten der letzteren in der Ebene XOY sind beziehungsweise gleich $Y\delta x$ und $N\delta x$. Folglich erhalten wir für das Gleichgewicht des Theils PP' rücksichtlich der zu OY parallelen Kräfte die Bedingung

$$-\beta + Y\delta x + \beta' = 0,$$

und rücksichtlich der in der Ebene XOY wirkenden Kräftepaare

$$-\zeta + N\delta x + \zeta' + \beta\delta x = 0;$$

das Glied $\beta\delta x$ in der zweiten Gleichung ist das Moment des Kräftepaars, welches von den nur unendlich wenig verschiedenen Kräften β, β' gebildet wird, die in entgegengesetzt-parallelen Richtungen durch P und P' gehen. Nun ist

$$\beta' - \beta = \frac{d\beta}{dx}\delta x \text{ und } \zeta' - \zeta = \frac{d\zeta}{dx}\delta x;$$

folglich liefern die vorhergehenden Gleichungen

*) Diese Kräfte, von denen jede in der Ebene des Schnittes des festen Körpers ihren Sitz hat, welche die Theile der Substanz trennt, zwischen denen sie wirken, sind eine Art Schiebungskräfte. Siehe unten § 662.

$$\alpha = T\frac{dx}{ds} - \left(M + \frac{d\eta}{ds}\right)\frac{dz}{ds} + \left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right)\frac{dy}{ds}.$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für β und γ, und durch Einsetzung derselben in (1) folgt

$$(4)\quad \begin{cases} X = -\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dx}{ds} - \left(M + \frac{d\eta}{ds}\right)\frac{dz}{ds} + \left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right)\frac{dy}{ds}\right\} \\ Y = -\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dy}{ds} - \left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \left(L + \frac{d\xi}{ds}\right)\frac{dz}{ds}\right\} \\ Z = -\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dz}{ds} - \left(L + \frac{d\xi}{ds}\right)\frac{dy}{ds} + \left(M + \frac{d\eta}{ds}\right)\frac{dx}{ds}\right\}. \end{cases}$$

Ausserdem erhalten wir aus (2)

$$(5)\quad 0 = \frac{dx}{ds}\left(L + \frac{d\xi}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\left(M + \frac{d\eta}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\left(N + \frac{d\zeta}{ds}\right).$$

Um den mathematischen Ausdruck der Umstände zu vervollständigen, erübrigt nur noch, die Gleichungen der torquirenden Biegung einzuführen. Zu diesem Zwecke nehmen wir in dem durch P gehenden Normalschnitt zwei beliebige zu einander senkrechte Linien PK, PL der Substanz des Drahtes als Coordinatenaxen an. Die Componenten der Krümmung (§ 589) in den zu diesen Linien senkrechten und durch die Tangente PT gehenden Ebenen seien, wenn der Draht undeformirt ist, $\varkappa_0$, λ_0, wenn er deformirt ist, $\varkappa$, λ. Ferner werde die Grösse der Drillung (§ 119), welche jede der Coordinatenaxen um die Tangente von Punkt zu Punkt den Draht entlang hat, mit τ_0 bezeichnet, wenn der Draht undeformirt ist, mit τ im entgegengesetzten Falle, so dass $\tau - \tau_0$ die Grösse der durch die einwirkenden Kräfte in P erzeugten Drillung ist. Dann erhalten wir [§ 595 (3)]

$$(6)\quad \begin{cases} \xi l + \eta m + \zeta n = A(\varkappa - \varkappa_0) + c\,(\lambda - \lambda_0) + b\,(\tau - \tau_0) \\ \xi l' + \eta m' + \zeta n' = c\,(\varkappa - \varkappa_0) + B(\lambda - \lambda_0) + a\,(\tau - \tau_0) \\ \xi\frac{dx}{ds} + \eta\frac{dy}{ds} + \zeta\frac{dz}{ds} = b\,(\varkappa - \varkappa_0) + a\,(\lambda - \lambda_0) + C(\tau - \tau_0), \end{cases}$$

wo (l, m, n), $(l' m' n')$, $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ die Richtungen von PK, PL, PT bezeichnen, so dass

$$(7)\quad \begin{cases} l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds} = 0,\ l'\frac{dx}{ds} + m'\frac{dy}{ds} + n'\frac{dz}{ds} = 0 \\ ll' + mm' + nn' = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1,\quad l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1 \end{cases}$$

ist.

Werden jetzt, wie in § 593, Linien O,K, O,L, O,T gezogen, jede von der Längeneinheit und beständig parallel PK, PL, PT, und lässt man den Punkt P die Curve mit der Einheit der Geschwindigkeit durchlaufen, so ist die parallel zu O,T genommene Geschwindigkeitscomponente von $,L$, oder die parallel zu O,K und mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Geschwindigkeitscomponente von $,T$ gleich $\varkappa$ (§ 593). Da Aehnliches für λ und τ gilt, so ist

$$(8)\quad \begin{cases} \varkappa = -\left(l' \dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds} + m' \dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds} + n' \dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}\right) \\ \lambda = +\left(l \dfrac{d\dfrac{dx}{ds}}{ds} + m \dfrac{d\dfrac{dy}{ds}}{ds} + n \dfrac{d\dfrac{dz}{ds}}{ds}\right) \\ \tau = + \left(l' \dfrac{dl}{ds} + m' \dfrac{dm}{ds} + n' \dfrac{dn}{ds}\right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (7) reduciren (l, m, n), $(l', m' n')$ auf ein variabeles Element; es ist dies die Coordinate, durch welche die Lage der Substanz des Drahtes in Beziehung auf die Tangente irgend eines Punktes der Centralcurve bestimmt wird. Weiter drücken die Gleichungen (8) $\varkappa, \lambda, \tau$ durch diese Coordinate und die drei cartesischen Coordinaten x, y, z von P aus. Die über den ungezwängten Zustand des Drahtes festgesetzten Bestimmungen liefern $\varkappa_0$, λ_0, τ_0 als Functionen von s. Dann geben die Gleichungen (6) jede der Grössen ξ, η, ζ ausgedrückt durch s, die vier Coordinaten und die nach s genommenen Differentialquotienten derselben. Werden diese Werthe in (4) und (5) eingesetzt, so erhalten wir vier Differentialgleichungen, welche in Verbindung mit

$$(9)\qquad \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

die fünf Gleichungen ausmachen, vermittels welcher die fünf unbekannten Grössen (die vier Coordinaten und die Spannung T) sich durch s ausdrücken lassen, oder vermittels welcher, nach Elimination von s und T, die beiden Gleichungen der Curve gefunden und die Coordinate für den Grad der Drehung des Normalschnitts um die Tangente durch x, y, z ausgedrückt werden.

Die Grenzbedingungen für irgend welche bestimmten Umstände lassen sich mittels der Gleichungen (2) leicht mathematisch ausdrücken. Wenn z. B. eine gegebene Kraft und ein gegebenes Kräftepaar direct an einem freien Ende angebracht sind, oder wenn das Problem auf einen Theil des Drahtes beschränkt ist, der nach einer Richtung hin im Punkte Q aufhört, und wenn auf den durch Q gehenden Normalschnitt des betrachteten Drahttheils in Folge der jenseits Q angreifenden Kräfte eine gegebene Kraft $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ und ein gegebenes Kräftepaar (ξ_0, η_0, ζ_0) einwirken, so werden die Gleichungen, welche die Grenzbedingungen ausdrücken, folgende sein:

$$(10)\quad \left.\begin{cases} \xi = \xi_0, \quad -\dfrac{d\xi}{ds} = L_0 + \left(\gamma_0 \dfrac{dy}{ds} - \beta_0 \dfrac{dz}{ds}\right) \\ \eta = \eta_0, \quad -\dfrac{d\eta}{ds} = M_0 + \left(\alpha_0 \dfrac{dz}{ds} - \gamma_0 \dfrac{dx}{ds}\right) \\ \zeta = \zeta_0, \quad -\dfrac{d\zeta}{ds} = N_0 + \left(\beta_0 \dfrac{dx}{ds} - \alpha_0 \dfrac{dy}{ds}\right) \end{cases}\right| \text{wenn } s = s_0;$$

darin bezeichnet s_0 die Länge des Drahtes von dem Punkte an, von welchem aus s gemessen wird, bis zum Punkte Q, und L_0, M_0, N_0 sind die Werthe von L, M, N in Q.

verglichenen starren Körper wirkende Kraft die in der Verticalen durch den Schwerpunkt wirkende Schwerkraft sein. Daher ist es zweckmässig, nicht die Einheit als die Geschwindigkeit für den Vergleichungspunkt auf dem gebogenen Drahte zu wählen, sondern die Geschwindigkeit, welche die Schwerkraft in einem Körper erzeugen würde, der einen Weg von der Höhe $\frac{a}{2}$ hindurch fällt, und diese Constante a (§ 611) ist dann die Länge des isochronen einfachen Pendels. Wenn also die Kraftlinie einer elastischen Curve vertical gehalten wird und ein Punkt P sich mit einer constanten Geschwindigkeit von der Grösse $\sqrt{ga}$ (wo a die mittlere Proportionale zwischen dem Krümmungsradius in irgend einem Punkte und dem Abstande dieses Punktes von der Kraftlinie ist) durch dieselbe bewegt, so wird die Tangente in P beständig einem einfachen Pendel von der Länge a parallel sein, das ihr in irgend einem Augenblick parallel gerichtet und mit der nämlichen Winkelgeschwindigkeit in Bewegung gesetzt ist. Die Figuren 28, ..., 32 entsprechen den Vibrationen des Pendels. Die Figur 33 entspricht dem Falle, in welchem das Pendel gerade seine Lage instabilen Gleichgewichts nach Ablauf einer unendlich langen Zeit erreichen würde. Die Figur 34 entspricht Fällen, in welchen das Pendel unaufhörlich mit periodisch zu- und abnehmender Geschwindigkeit in einer Richtung herumfliegt. Der Grenzfall, in welchem die elastische Curve kreisförmig ist, entspricht einem Pendel, das mit einer unendlichen Winkelgeschwindigkeit herumfliegt, die im Laufe einer Umdrehung natürlich nur eine unendlich kleine Aenderung erleidet. Ein bemerkenswerthes Ergebniss ist, dass die Rectification der elastischen Curve dasselbe analytische Problem ist, wie die Bestimmung der Zeit, welche das Pendel zur Beschreibung eines beliebig gegebenen Winkels gebraucht.

614. Ein Draht von beliebiger Form unter der Einwirkung beliebig vertheilter Kräfte und Kräftepaare. — Bisher haben wir unsere Untersuchung der Form und der Drillung eines in gezwängtem Zustande befindlichen Drahtes auf einen solchen Theil desselben beschränkt, der selbst keiner unmittelbaren Einwirkung äusserer Kräfte ausgesetzt ist, sondern nur von seinen Enden her die Wirkung zweier sich gegenseitig im Gleichgewicht haltender Kraftsysteme fortleitet und überträgt. Auf diese Weise haben wir von der Untersuchung ausgeschlossen die für die Praxis wichtigen Fälle einer Curve, welche durch ihr eigenes Gewicht, oder durch

die Centrifugalkraft deformirt wird, oder welche Gleichgewichtsbedingungen von der Art erfüllt, wie wir sie später bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen nach dem D'Alembert'schen Princip zu benutzen haben werden. Wir wenden uns jetzt zu einer völlig allgemeinen Erforschung des Gleichgewichts einer Curve, die in ihrer ganzen Länge gleichförmig ist, oder nicht; die im ungezwängten Zustande gerade oder beliebig gebogen und gedrillt ist; die durch keine Bedingung hinsichtlich der Lagen der drei Hauptaxen der torquirenden Biegung (§ 596) beschränkt ist, und auf die beliebig vertheilte Kräfte und Kräftepaare einwirken.

Es seien α, β, γ die Componenten der Kraft und ξ, η, ζ die Componenten des Kräftepaars, aus denen die Wechselwirkung zwischen der Materie auf der einen und der anderen Seite des durch den Punkt (x, y, z) gehenden Normalschnitts besteht. Dann sind die Componenten für den durch $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$ gehenden Normalschnitt

$$\alpha + \frac{d\alpha}{ds}\delta s, \quad \beta + \frac{d\beta}{ds}\delta s, \quad \gamma + \frac{d\gamma}{ds}\delta s.$$

$$\xi + \frac{d\xi}{ds}\delta s, \quad \eta + \frac{d\eta}{ds}\delta s, \quad \zeta + \frac{d\zeta}{ds}\delta s.$$

Sind also $X\delta s$, $Y\delta s$, $Z\delta s$ und $L\delta s$, $M\delta s$, $N\delta s$ die Componenten der Kraft und des Kräftepaars, welche auf den zwischen jenen Normalschnitten liegenden Theil δs des Drahtes einwirken, so erhalten wir (§ 551) für das Gleichgewicht dieses Theils des Drahtes

$$(1) \qquad -X = \frac{d\alpha}{ds}, \; -Y = \frac{d\beta}{ds}, \; -Z = \frac{d\gamma}{ds}$$

und (wenn die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung, wir $\delta y \delta s$, vernachlässigt werden)

$$-L\delta s = \frac{d\xi}{ds}\delta s + \gamma\delta y - \beta\delta z, \text{ u. s. w.},$$

oder

$$(2) \qquad \begin{cases} -L = \dfrac{d\xi}{ds} + \gamma\dfrac{dy}{ds} - \beta\dfrac{dz}{ds} \\ -M = \dfrac{d\eta}{ds} + \alpha\dfrac{dz}{ds} - \gamma\dfrac{dx}{ds} \\ -N = \dfrac{d\zeta}{ds} + \beta\dfrac{dx}{ds} - \alpha\dfrac{dy}{ds}. \end{cases}$$

Aus diesen sechs Gleichungen (1) und (2) lassen sich α, β, γ mittels der folgenden zweckmässigen Annahme

$$(3) \qquad \alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds} = T$$

eliminiren, wo T die Componente der Kraft bedeutet, welche auf den Normalschnitt längs der Tangente an die Mittellinie wirkt. Hieraus und aus der zweiten und dritten der Gleichungen (2) ergibt sich

fassen, die symmetrisch zu beiden Seiten der Kraftlinie liegen, und von denen nur eine in der Figur gezeichnet ist.

Der Fall $C = 2a^2$ endlich ist der der Fig. 33. Für ihn nimmt das letzte Integral eine logarithmische Form an. Es ist nämlich

$$x = \int \frac{y\,dy}{(4a^2 - y^2)^{1/2}} - \int \frac{2a^2\,dy}{y(4a^2 - y^2)^{1/2}},$$

oder, wenn man die Integrationen ausführt und die Constante so wählt, dass die y Axe die Axe der Symmetrie werde,

$$x = -(4a^2 - y^2)^{1/2} + a \log \frac{2a + (4a^2 - y^2)^{1/2}}{y}. \tag{6}$$

Wenn das Radical mit den angegebenen Zeichen genommen wird, so stellt diese Gleichung den Zweig dar, welcher vom Scheitel aus zuerst zur negativen Seite der y Axe geht, dieselbe dann in dem Doppelpunkte durchkreuzt und sich darauf der positiven Seite der x Axe immer mehr nähert, so dass diese eine Asymptote wird. Der andere Zweig wird durch dieselbe Gleichung dargestellt, wenn man darin das Zeichen des Radicals an jeder Stelle umkehrt.

Wir brauchen wohl kaum zu bemerken, dass sich das Zeichen von $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2}$ in (3) für einen die Curve stetig durchlaufenden Punkt nur dann ändern kann, wenn $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird. Die Interpretation wird erleichtert, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = \tan \vartheta, \text{ oder } \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2} = -\cos \vartheta$$

setzt, wodurch (3) auf

$$y^2 = 2a^2 \cos \vartheta + C \tag{7}$$

reducirt wird.

Wenn jetzt $C > 2a^2$ ist (der Fall, in welchem es, wie wir oben sahen, sowohl Minimal- als Maximalwerthe von y zu einer Seite der Linie der Kraft gibt), so kann der Werth von ϑ unbegrenzt wachsen. Derselbe nimmt natürlich für einen Punkt, der die Curve stetig durchläuft, stetig zu; seine Zunahme für eine vollständige Periode beträgt 2π (Fig. 34).

Wenn $C < 2a^2$ ist, so hat ϑ in den Punkten, in welchen die Curve die Linie der Kraft schneidet, gleiche positive und negative Werthe. Diese Werthe, welche die Formel

$$\cos \vartheta = -\frac{C}{2a^2} \tag{8}$$

liefert, sind stumpf, wenn C positiv ist (Fig. 30), spitz, wenn C negativ ist (Fig. 28). Der grösste negative Werth von C ist natürlich $-2a^2$.

Wenn wir $C = -2a^2 + b^2$ annehmen, so wird, wie wir aus (7) sehen, $\pm b$ der grösste positive oder negative Werth von y sein, und wenn wir voraussetzen, dass b sehr klein im Vergleich zu a ist, so erhalten wir den Fall einer gleichförmigen Feder, welche wie ein Bogen durch eine zwischen ihren Enden ausgespannte Schnur schwach gebogen ist.

612. Schwach gebogener Stab. — Ein wichtiger besonderer Fall ist der der Figur 28, welcher einem gebogenen Stabe (Bogen zum Schiessen) entspricht, der überall einer Biegung denselben Widerstand entgegensetzt. Wenn die Grösse der Biegung klein ist, so lässt sich die Gleichung leicht bis zu jedem erforderten Grade der Genauigkeit näherungsweise integriren. Wir wollen die Art, wie man in dieser Untersuchung zu verfahren hat, bloss skizziren.

Es sei e der grösste Abstand von der Axe, welcher $x = 0$ entspricht. Dann liefert $y = e$ sofort $\frac{dy}{dx} = 0$ und die Gleichung (3) geht über in

$$e^2 - y^2 = 2a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}\right),$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{e^2-y^2}\sqrt{4a^2-e^2+y^2}}{2a^2-e^2+y^2} \tag{9}$$

folgt. Um eine erste Annäherung zu erhalten, lassen wir $e^2 - y^2$ in jedem Factor fort, in welchem auch die Grösse a^2 vorkommt, und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{e^2-y^2}}{a},$$

oder, da $y = e$, wenn $x = 0$ ist,

$$y = e \cos \frac{x}{a}, \tag{10}$$

die Gleichung der harmonischen oder Sinus-Linie, welches die einfachste von einer vibrirenden Schnur oder einem Pianofortedraht angenommene Form ist.

Um genauere Näherungswerthe zu erhalten, können wir für y in den Factoren, wo es ausgelassen war, den in (10) gegebenen Werth substituiren, u. s. w. Auf diese Weise ergibt sich näherungsweise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{e^2-y^2}}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{8a^2}\sin^2\frac{x}{a}\right),$$

oder

$$\frac{dy}{\sqrt{e^2-y^2}} = \frac{dx}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{16a^2} - \frac{3e^2}{16a^2}\cos\frac{2x}{a}\right),$$

woraus durch Integration

$$\arccos\frac{y}{e} = \frac{x}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{16a^2}\right) - \frac{3e^2}{32a^2}\sin\frac{2x}{a}$$

und

$$y = e\cos\left\{\frac{x}{a}\left(1 + \frac{3e^2}{16a^2}\right)\right\} + \frac{3e^3}{32a^2}\sin\frac{x}{a}\sin\frac{2x}{a}$$

folgt.

613. Da wir im Besonderen das gewöhnliche Pendel für das entsprechende kinetische Problem wählen, so muss die auf den

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\beta}{dx} = -Y \\[2mm] \dfrac{d\zeta}{dx} = -N - \beta, \end{cases}
$$

und hieraus folgt durch Elimination von β

$$
(2) \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{dN}{dx} + Y.
$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Kräfte und Kräftepaare in der Ebene XOZ

$$
(3) \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{dM}{dx} + Z;
$$

die Kräftepaare in dieser Ebene werden als positiv gerechnet, wenn sie aus der Richtung von OX in derjenigen von OZ zu drehen streben [es ist dies der in § 551 getroffenen Uebereinkunft entgegengesetzt; letztere empfiehlt sich immer, wenn die drei Axen symmetrisch behandelt werden].

Da der Draht nur unendlich wenig von der geraden Linie OX abweicht, so sind die Krümmungscomponenten

$$
\frac{d^2y}{dx^2} \text{ in der Ebene } XOY
$$

und

$$
\frac{d^2z}{dx^2} \text{ in der Ebene } XOZ,
$$

folglich die Gleichungen der Biegung

$$
(4) \qquad \begin{cases} \zeta = B\dfrac{d^2y}{dx^2} + a\dfrac{d^2z}{dx^2} \\[2mm] \eta = a\dfrac{d^2y}{dx^2} + C\dfrac{d^2z}{dx^2}, \end{cases}
$$

wo B und C die Biegungswiderstände (§ 596) in den Ebenen xy und xz sind und a der Coefficient ist, welcher das in jeder dieser Ebenen durch die Einheit der Krümmung in der anderen erzeugte Kräftepaar ausdrückt; diese drei Grössen a, B, C sind im Allgemeinen als gegebene Functionen von x anzusehen. Durch Einsetzung dieser Ausdrücke für ζ und η in (2) und (3) erhalten wir die gesuchten Gleichungen des Gleichgewichts.

617. Fall unabhängiger Biegungen in zwei Ebenen. — Wenn die Richtungen des grössten und des kleinsten Biegungswiderstandes in allen Theilen des Drahtes in zwei Ebenen liegen, so werden die Gleichungen des Gleichgewichts dadurch vereinfacht, dass man diese Ebenen zu Coordinatenebenen XOY, XOZ nimmt. Die Biegung in jeder derselben hängt dann einfach von den in ihr wirkenden Kräften ab, und auf diese Weise zerfällt das Problem von selbst in die beiden von einander ganz unabhängigen Probleme, die Gleichungen der Biegung in den beiden Hauptebenen zu integriren und dadurch die Projectionen der Curve auf zwei feste Ebe-

nen zu bestimmen, deren Lage übereinstimmt mit derjenigen, die sie bei gerade gestrecktem Draht haben.

Wenn in diesem Falle XOY, XOZ in der angegebenen Weise gewählt werden, so ist $a = 0$. Die Gleichungen der Biegung (4) gehen also einfach über in

$$\zeta = B\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \eta = C\frac{d^2z}{dx^2},$$

und durch Einsetzung dieser Ausdrücke in (2) und (3) erhält man als Differentialgleichungen der Curve

$$\frac{d^2\left(B\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx^2} = \mathfrak{Y}, \quad \frac{d^2\left(C\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{dx^2} = \mathfrak{Z}, \tag{5}$$

wo

$$\mathfrak{Y} = -\frac{dN}{dx} + Y, \quad \mathfrak{Z} = -\frac{dM}{dx} + Z \tag{6}$$

ist. Hier sind $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ im Allgemeinen als bekannte Functionen von x anzusehen, die durch (6) explicit gegeben werden; es sind die für die Einheit der Länge des Drahtes gerechneten zum Drahte senkrechten Componenten der einfachen Kräfte, welche dieselbe Gestalt hervorbringen würden, wie die Kräfte und Kräftepaare, die nach unserer Voraussetzung auf den Draht in seiner ganzen Länge wirklich einwirken. Weiterhin, in der Theorie des Magnetismus, werden wir ein merkwürdiges Beispiel der durch (6) ausgedrückten Relation antreffen. Inzwischen bemerken wir nur, dass, obgleich die Gestalt des Drahtes nicht merklich geändert wird, wenn man statt der auf den Draht vertheilten Kräfte und Kräftepaare in geeigneter Weise vertheilte einfache Kräfte substituirt, doch die in den Normalschnitten wirkenden Schiebungskräfte, wie aus (1) hervorgeht, durch diese Aenderung der Umstände vollständig geändert werden. Wenn der Draht gleichförmig ist, so sind B und C constant, und die Gleichungen des Gleichgewichts werden

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{\mathfrak{Y}}{B}, \quad \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{\mathfrak{Z}}{C}.$$

Das einfachste Beispiel erhält man, wenn man jede der Grössen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ als constant ansieht; es ist dies der interessante und nützliche Fall eines gleichförmigen Balkens, der überall, ausser wo er durch seine Stützen getragen oder gedrückt wird, nur durch sein eigenes Gewicht eine Einwirkung erleidet. Beschränken wir unsere Aufmerksamkeit auf die Biegung in der einen Hauptebene XOY und nehmen an, dieselbe sei vertical, so dass $\mathfrak{Y} = gw$ ist, wenn w die in der Längeneinheit enthaltene Masse bezeichnet, so erhalten wir als vollständiges Integral natürlich

$$y = \frac{gw}{B}\left(\tfrac{1}{24}x^4 + Kx^3 + K'x^2 + K''x + K'''\right); \tag{8}$$

darin bezeichnen K, K', u. s. w. die vier Integrationsconstanten. Diese werden durch die Grenzbedingungen bestimmt, welche z. B. darin bestehen

können, dass der Werth von y und $\frac{dy}{dx}$ in jedem Ende gegeben ist. Die Bedingung kann auch (wie z. B. im Falle einer Planke, welche mit ihren beiden Enden einfach auf zwei Schneiden ruht und sich um jede frei drehen kann) darin bestehen, dass die Krümmung in jedem Ende verschwinde, so dass wir, wenn die durch die Stützpunkte gehende Linie zur Axe OX genommen wird,

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \end{array}\right\}, \text{ wenn } x = 0 \text{ und wenn } x = l \text{ ist,}$$

erhalten, wo l die Länge der Planke ist. Die Lösung ist dann

$$(9) \qquad y = \frac{gw}{B} \cdot {}^1/_{24}\,(x^4 - 2\,l\,x^3 + l^3 x).$$

Setzen wir also $x = {}^1/_2\, l$, so ergibt sich

$$y = \frac{gw}{B} \cdot \frac{5\,l^4}{16.24}$$

für die Entfernung, um welche der Mittelpunkt von der die Stützpunkte verbindenden Geraden abgelenkt wird.

Wir können auch, wie im Falle einer Planke, die in ihrem Mittelpunkte (wo $x = 0$ vorausgesetzt wird) auf einer Schneide ruht oder an einem in ihrer Mitte befestigten Seile hängt,

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{dy}{dx} = 0 \end{array}\right\}, \text{ wenn } x = 0 \text{ ist,}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \\ \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \end{array}\right\}, \text{ wenn } x = {}^1/_2\, l \text{ ist [siehe oben § 614 (10)],}$$

haben. In diesem Falle ist die Lösung für die positive Hälfte der Planke

$$(10) \qquad y = \frac{gw}{B} \cdot {}^1/_{24}\,(x^4 - 2\,l\,x^3 + {}^3/_2\, l^2 x^2).$$

Wird hierin $x = {}^1/_2\, l$ gesetzt, so ergibt sich

$$y = \frac{gw}{B} \cdot \frac{3\,l^4}{16.24}.$$

Wir erhalten also das folgende Resultat: —

618. Senkungen der nicht unterstützten Theile einer Planke. — Wenn ein Stab, Balken oder eine Planke von gleichförmiger Substanz auf einer einzigen im Mittelpunkte angebrachten Stütze ruht, so beträgt die Senkung der Enden nur ${}^3/_5$ der Senkung, die der Mittelpunkt erleidet, wenn der Körper auf zwei an seinen Enden angebrachten Schneiden ruht. Daraus folgt, dass die erstere Senkung ${}^3/_8$ und die letztere ${}^5/_8$ derjenigen Senkung oder

Erhebung beträgt, welche eine dem halben Gewicht des Stabes gle
Kraft erzeugt, wenn sie am einen Ende vertical nach unten oder o
wirkt, während der Mittelpunkt in einer horizontalen Lage fest
halten wird. Dies zu beweisen, nehmen wir an, der ganze Kör
ruhe anfangs auf einer in seiner Mitte angebrachten Stütze, und
seien sodann unter die Enden zwei Stützen gesetzt, die man all
lig erhöht habe, bis der Druck vom Mittelpunkt gänzlich fort
nommen sei. Während dieser Operation bleibt der Mittelpu
fest und horizontal, während eine bis zur Hälfte des Gewichts
nehmende Kraft, die an jedem Ende vertical nach oben wirkt, d
selbe auf eine Höhe hebt, welche gleich der Summe der Senkun
in den beiden oben angegebenen Fällen ist. Natürlich kann
dies Resultat auch direct beweisen, indem man die absoluten We
der Senkung in jenen beiden Fällen, wie wir sie oben ermittelt
ben, mit den Resultaten der in § 611 gegebenen Theorie der el
schen Curven Fig. 29 vergleicht. Das Resultat lässt sich
folgendermaassen aussprechen: Die Senkung der Mitte eines gle
förmigen Stabes, der auf Stützen an seinen Enden ruht, wird
Verhältniss von 5 : 13 vergrössert, wenn man eine seinem Gewi
gleiche Masse auf seine Mitte legt, und wenn der Stab an ei
in seiner Mitte befestigten Seile hängt, so wird die Senkung se
Enden im Verhältniss von 3 zu 11 vergrössert, wenn man
jedes Ende eine dem halben Gewicht des Stabes gleiche M
hängt.

619. Das im Falle eines vollkommen starren festen Körp
unbestimmte*) (§ 568), für die Praxis wichtige Problem, die V
theilung des Gewichts eines festen Körpers auf seine Stützpun
zu bestimmen, wenn mehr als zwei derselben in einer vertica
Ebene liegen, oder wenn überhaupt mehr als drei Stützen vorh
den sind, kann mittels der vorstehenden Resultate vollständig ge
werden für einen gleichförmigen, elastischen, von Natur gera
Stab, welcher auf drei oder mehr Punkten ruht, die alle nahezu
einer Horizontallinie vollkommen gesicherte Lagen haben.

Wenn i Stützpunkte vorhanden sind, so bilden die $i - 1$ St
theile, welche der Reihe nach zwischen diesen Punkten liegen, u
die beiden Endtheile $i + 1$ Curven; diese Curven sind durch v

*) Wir brauchen wohl kaum zu bemerken, dass eine Unbestimmtheit in
Natur nicht existirt. Wie eine solche in den Problemen der abstracten Dyna
vorkommen kann und dann dadurch beseitigt wird, dass man noch weitere Eig
schaften der Materie in Rechnung zieht, wird auf eine lehrreiche Weise durch
im Texte angegebenen Umstände erläutert.

schiedene algebraische Gleichungen [§ 617 (8)] ausgedrückt, von denen jede vier willkürliche Constanten enthält. Zur Bestimmung dieser Constanten ergeben sich im Ganzen $4i + 4$ Gleichungen, welche die folgenden Bedingungen ausdrücken: —

I. Die Ordinaten der inneren Enden des ersten und des letzten Stabtheils und die Ordinaten beider Enden jedes der übrigen Theile sind beziehungsweise gleich den gegebenen Ordinaten der entsprechenden Stützpunkte [$2i$ Gleichungen].

II. Die Curven zu beiden Seiten jedes Stützpunktes haben in dem Uebergangspunkt von der einen zur andern zusammenfallende Tangenten und gleiche Krümmungen [$2i$ Gleichungen].

III. Die Krümmung und ihr für die Einheit der Länge längs des Stabes genommener Differentialquotient ist in jedem Endpunkte Null [4 Gleichungen].

Danach ist die Gleichung jedes Theils der Curve vollständig bestimmt, und nach § 616 ergibt sich weiter die Schiebungskraft für jeden Normalschnitt. Die Differenz zwischen den Schiebungskräften in den zu beiden Seiten eines Stützpunktes liegenden, aneinander grenzenden Stabtheilen ist natürlich gleich dem Druck, dem dieser Punkt ausgesetzt ist.

620. Die Lösung dieses Problems für den Fall, in welchem zwei der Stützpunkte in den Endpunkten liegen und der dritte sich mitten zwischen beiden befindet, entweder genau in der Verbindungslinie derselben, oder um eine gegebene sehr kleine Strecke über oder unter dieser Linie, ergibt sich sofort, ohne jede analytische Untersuchung, aus den in § 618 ausgesprochenen besonderen Resultaten. Setzen wir nämlich voraus, der Stab sei anfangs ganz von den in seinen Endpunkten angebrachten Stützen getragen, und darauf allmälig durch eine unter seine Mitte gesetzte Stütze in die Höhe gedrückt worden, so wird diese Stütze eine Kraft zu ertragen haben, welche dem Wege, durch den sie vom Nullpunkt aus gehoben wurde, einfach proportional ist, bis das ganze Gewicht den Endpunkten abgenommen ist und von der Mitte getragen wird. Die ganze Strecke, um welche die Mitte während dieses Processes steigt, ist, wie wir fanden, $\frac{gw}{B} \cdot \frac{8\,l^4}{16.24}$, und diese Gesammterhöhung ist $^8/_5$ der Senkung der Mitte in der ersteren Lage. Wenn also die Stütze der Mitte z. B. genau in der Verbindungslinie der Endstützen fixirt wird, so trägt sie $^5/_8$ des Gesammtgewichts und überlässt jeder der letzteren $^3/_{16}$. Wenn die Stütze der Mitte von der Verbindungs-

linie der Endpunkte um $^7/_{15}$ des Weges herabgelassen wird, den sie herabgelassen werden müsste, um von jedem Druck befreit zu werden, so trägt sie gerade $^1/_3$ des Gesammtgewichts und jedes Ende hat gleichfalls $^1/_3$ zu tragen.

621. Rotation eines Drahtes um seine elastische Centrallinie. Elastisches Universalgelenk. — Ein Draht von gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen, der im ungezwängten Zustande gerade ist, lässt sich, nachdem man ihn beliebig gebogen und gedrillt hat, ohne den geringsten Widerstand um seine elastische Centralcurve drehen, da seine Gleichgewichtsbedingungen auf keine Weise verletzt werden, dadurch dass er so in seiner ganzen Länge gleichmässig gedreht wird. Die nützliche Anwendung dieses Princips auf die Erhaltung einer gleichen angularen Bewegung in zwei um verschiedene Axen rotirenden Körpern wird in der Praxis durch die Nothwendigkeit etwas erschwert, jedes Drahtende vollkommen zu befestigen und so zu adjustiren, dass daselbst die Tangente an die elastische Centralcurve genau in die Richtung der Rotationsaxe falle. Wenn aber diese Bedingung streng erfüllt und der Draht von genau gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen und im ungezwängten (§ 658) Zustande völlig gerade ist, so überträgt er gegen jeden constanten Widerstand eine genau gleichförmige Bewegung von einem um eine Axe rotirenden Körper auf einen zweiten solchen Körper, dessen Axe gegen die des ersteren beliebig geneigt ist und mit derselben nicht in einer Ebene zu liegen braucht. Wenn beide Axen in einer Ebene liegen, wenn kein Widerstand gegen die Rotationsbewegung vorhanden ist, und wenn endlich die Schwerkraft nur eine geringe Wirkung auf den Draht ausübt, so wird derselbe eine der verschiedenen Formen der ebenen elastischen Curve von Johann Bernoulli (§ 612) annehmen. Wie sehr aber auch der Draht von dieser Form abweichen möge — sei es nun, weil die Axen nicht in einer Ebene liegen; oder in Folge der Torsion, welche die Uebertragung eines Kräftepaars von einem Schaft zum anderen begleitet, und welche, wenn die Axen einer Ebene angehören, den Draht nothwendig aus derselben hinauslenkt; oder in Folge der Schwere — die elastische Centralcurve wird in Ruhe bleiben, während der Draht in jedem Normalschnitt um sie mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit rotirt, die gleich der Winkelgeschwindigkeit jedes der beiden durch ihn verbundenen Körper ist. In dem Capitel über die Eigenschaften der Materie werden wir sehen, was man freilich schon aus dem Umstande leicht schliessen kann, dass die Feder eines Chronometers zwanzig und mehr Jahre hindurch ihre

Bewegungen vollführt, dass die Unvollkommenheit in der Elasticität eines Metalldrahts keinen solchen Grad erreicht, der die praktische Anwendung dieses Princips unmöglich machte, sogar bei einem Mechanismus, der dauerhaft sein soll.

Wir müssen aber bemerken, dass, wenn die Rotation zu schnell ist, das Gleichgewicht des um seine ungeänderte elastische Centralcurve rotirenden Drahtes instabil werden kann. Man entdeckt dies unmittelbar durch Experimente (die zu sehr merkwürdigen Erscheinungen führen), wenn man, wie es oft bei der Erläuterung der Kinetik der gewöhnlichen Rotation geschieht, einen starren Körper an einen Stahldraht hängt, dessen oberes Ende unaufhörlich schnell herumgedreht wird.

622. Wenn der Draht nicht von genau gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen ist, so wird in der mitgetheilten angularen Bewegung eine periodische Ungleichheit stattfinden, deren Periode eine halbe Umdrehung jedes Körpers ist. Oder wenn der Draht im ungezwängten Zustande nicht ganz gerade ist, so wird eine periodische Ungleichheit eintreten, welche die ganze Umdrehung zur Periode hat. Mit anderen Worten: Wenn φ und φ' die Winkel sind, durch welche die beiden Körper gleichzeitig rotiren, während ein constant arbeitendes Kräftepaar vom einen zum anderen durch den Draht hindurch fortgepflanzt wird, so ist $\varphi - \varphi'$ nicht Null, wie im Falle des exacten elastischen Universal-Biegungsgelenks, sondern eine Function von $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$, wenn der erstere Fehler allein existirt, oder eine Function von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, wenn der zweite Fehler allein oder im Verein mit dem ersteren da ist. Wenn der Draht im ungezwängten Zustande nicht stärker gebogen ist, als man in der Praxis leicht verhüten kann, so kann die durch seine Biegung erzeugte Ungleichmässigkeit der Wirkung wahrscheinlich ohne Schwierigkeit zur Genüge dadurch beseitigt werden, dass man den Draht am einen oder an beiden Enden eine etwas geneigte Lage gegen die Axe des rotirenden Körpers gibt, an dem er befestigt wird. Aber diese Betrachtungen führen uns zu einem Thema, welches in sich selbst schon ein weit grösseres Interesse trägt, als dasjenige ist, welches es möglicherweise in Anwendungen auf die Praxis erlangen könnte. Die einfachen Fälle, die wir darlegen werden, sind Beispiele für drei Arten der Wirkung, von denen jede allein oder verbunden mit einer andern oder auch zugleich mit beiden anderen im Gleichgewicht eines Drahtes vorkommen kann, der nicht der Bedingung entspricht, in allen Richtungen gleich biegsam und im ungezwängten Zustande gerade zu sein.

623. Rotation eines in einen Reifen umgebogenen geraden Drahtes um seinen elastischen Centralkreis. — Ein gleichförmiger Draht, der im ungezwängten Zustande gerade ist, wird gebogen, bis seine beiden Enden zusammenstossen; diese Enden werden dann so aneinander befestigt, dass die beiden entsprechenden Enden der elastischen Centralcurve eine und dieselbe gerade Linie berühren. Welches dann auch die Form des Normalschnitts und die Beschaffenheit der Substanz ist — dieselbe sei krystallinisch oder nicht —, der Draht muss, wenn er sich im Gleichgewicht befindet, einen genauen Kreis bilden (wofern man Störungen durch die Schwere vermeidet). Man soll nun bestimmen, was geschehen muss, damit sich der ganze Draht gleichförmig durch irgend einen Winkel um seinen elastischen Centralkreis drehe.

Wenn der Draht von genau gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen ist*), so wird er, wie wir gesehen haben (§ 621), dieser Einwirkung gar keinen Widerstand leisten, abgesehen natürlich von dem Widerstande, der in seiner Trägheit beruht, und wenn er einmal in Bewegung gesetzt ist, so dass er sich in dieser Weise mit einer beliebigen, grossen oder kleinen Winkelgeschwindigkeit bewegt, so würde er sich für immer unverändert weiter bewegen, wenn er vollkommen elastisch wäre, und wenn die Luft oder eine andere die Axe berührende Materie keinen Widerstand leistete.

Um jede Beschränkung des Problems zu vermeiden, müssen wir voraussetzen, der Draht sei von solcher Beschaffenheit, dass, wenn er auf irgend eine Weise gedrillt und gebogen wird, die potentielle Energie der ins Leben gerufenen Elasticitäts-Wirkung, genommen für die Einheit der Länge, eine quadratische Function der Drillung und zweier Krümmungscomponenten (§§ 590, 595) mit sechs willkürlich gegebenen Coefficienten ist. Da aber der Draht keine Drillung besitzt**), so verschwinden im vorliegenden Falle drei Glieder dieser Function, und es bleiben nur die drei Glieder, welche die Quadrate und das Product der Krümmungscomponenten enthalten; die Ebenen, für welche diese Componenten genommen sind, stehen auf zwei in einem beliebigen Normalschnitte gelegten zu einander senkrechten Coordinatenaxen

*) In diesem Falle hätte man ihn offenbar vor dem Zusammenlegen seiner Enden drillen können, ohne dass dadurch die kreisförmige Form geändert worden wäre, die er annimmt, wenn man ihn nach der Verbindung seiner Enden sich selbst überlässt.

**) Wir haben dies vorausgesetzt, damit der Draht eine Kreisform annehme; in dem wichtigen Falle gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen würde die letztere Bedingung offenbar erfüllt sein, sogar wenn Drillung vorhanden wäre.

senkrecht. Die Lage dieser Axen wird zweckmässig so gewählt, dass das Product der Krümmungscomponenten verschwindet; dann werden die zu diesen Coordinatenaxen senkrechten Ebenen die Ebenen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes sein, wenn der Draht frei von Drillung erhalten wird*).

Es bietet keine Schwierigkeit dar, die allgemeinen Gleichungen des § 614 zur Ausdrückung dieser Umstände anzuwenden und die vorgelegte Frage zu beantworten. Wir überlassen dies dem Leser als eine analytische Uebung und schlagen einen kürzeren Weg zu demselben Ziele ein, indem wir direct das Princip der Energie anwenden.

Es sei $\frac{1}{2}(B\varkappa^2 + C\lambda^2)$ die potentielle Energie für die Einheit der Länge, wenn $\varkappa$ und λ die Krümmungscomponenten in den Ebenen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes sind, so dass, wie in § 617, B und C die Biegungswiderstände in diesen Ebenen messen. Wenn nun der Draht irgendwie in Ruhe gehalten wird, so dass diese Ebenen in jedem seiner Punkte mit der Ebene seines elastischen Centralkreises die Winkel φ und $\frac{\pi}{2} - \varphi$ bilden, so würden wir $\varkappa = \frac{1}{r}\cos\varphi$, $\lambda = \frac{1}{r}\sin\varphi$ erhalten, wo r den Radius jenes Kreises bezeichnet. Folglich ist, da die ganze Länge $2\pi r$ beträgt,

$$E = \pi\left(\frac{B}{r}\cos^2\varphi + \frac{C}{r}\sin^2\varphi\right). \tag{1}$$

Wir wollen nun voraussetzen, auf jeden unendlich kleinen Theil des Drahtes wirke ein Kräftepaar in der Normalebene, und es sei L die Grösse dieses Kräftepaars für die Einheit der Länge. Dasselbe muss um den ganzen Ring herum gleichförmig sein, damit die Kreisform erhalten bleibe. Lassen wir jetzt das Kräftepaar so variiren, dass, nachdem die Rotation einmal begonnen hat, φ mit einer beliebigen constanten Winkelgeschwindigkeit zunimmt, so ist die Gleichung der in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit (§§ 240, 287)

$$2\pi r L\dot{\varphi} = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\varphi}\dot{\varphi},$$

folglich nach (1)

$$-L = \frac{B-C}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{B-C}{2r^2}\sin 2\varphi.$$

Daraus geht Folgendes hervor: —

Damit die Ebenen des grössten Biegungswiderstandes des Ringes beständig einen Kegel berühren, der einen beliebigen Winkel

---

*) Wenn, wie es gewöhnlich der Fall ist, der Draht aus isotropischem Material (s. unten § 677) besteht, oder eine Normalaxe (§ 596) in der Richtung seiner elastischen Centrallinie hat, so wird eine Biegung kein Streben nach Drillung erzeugen. Mit anderen Worten: die Producte der Drillung in die Krümmungscomponenten werden aus dem quadratischen Ausdruck der potentiellen Energie verschwinden, oder die elastische Centrallinie ist eine Axe reiner Torsion. Der betrachtete Fall wird aber, wie im Text gezeigt wird, durch diese Beschränkung nicht vereinfacht.

φ mit der Ebene des Ringes einschliesst, ist in der Normalebene durch jeden Punkt ein Kräftepaar erforderlich, welches proportional *sin* 2φ ist, eine solche Richtung hat, dass φ verhindert wird zuzunehmen, und welches, wenn $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ ist, für die Einheit der Ringlänge $\frac{B-C}{2r^2}$ beträgt. Hieraus ersehen wir, dass es zwei Lagen stabilen Gleichgewichts — es sind dies diejenigen, in denen die Ebene des kleinsten Biegungswiderstandes in der Ebene des Ringes liegt — und zwei Lagen instabilen Gleichgewichts gibt — es sind dies diejenigen, in denen die Ebene des grössten Biegungswiderstandes in der Ebene des Ringes liegt.

624. Rotation eines im ungezwängten Zustande kreisförmigen, in allen Richtungen gleich biegsamen Drahtes um seinen elastischen Centralkreis. — Ein Draht von gleichförmiger Biegsamkeit in allen Richtungen, der im ungezwängten Zustande einen Kreisbogen vom Radius a bildet, wird gebogen, bis seine Enden zusammentreffen, die dann wie in § 623 verbunden werden, so dass das Ganze ein kreisförmiger Ring vom Radius r wird. Man soll das Kräftepaar bestimmen, welches diesen Ring in einer Lage festhält, die er dadurch erreicht, dass er in jedem Normalschnitt von der Lage stabilen Gleichgewichts aus um die Centrallinie durch einen beliebigen Winkel φ rotirt (letztere ist natürlich die Lage, in welcher die von Natur concave Seite des Drahtes auf der concaven Seite des Ringes liegt, indem die natürliche Krümmung entweder vermehrt oder vermindert, aber nicht umgekehrt wird, wenn man den Draht zu einem Ringe umbiegt). Wenden wir das Princip der Energie ganz wie im vorhergehenden Paragraphen an, so finden wir, dass das Kräftepaar in diesem Falle proportional *sin* φ ist und, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist, für die Einheit der Länge des Ringes $\frac{B}{ar}$ beträgt, wo B den Biegungswiderstand bezeichnet.

Denn die potentielle Energie ist in diesem Falle

$$E = \pi r B \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\sin\varphi\right)^2 \right\} \tag{2}$$

$$= \pi r B \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ar}\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\right)$$

und

$$L = \frac{1}{2\pi r}\frac{dE}{d\varphi} = \frac{B}{ar}\sin\varphi. \tag{3}$$

Wenn jeder Theil des Ringes halb herumgedreht worden ist, so dass die von Natur concave Seite des Drahtes die convexe Seite des Ringes bildet, so befindet sich der Draht natürlich in einer Lage instabilen Gleichgewichts.

625. **Ein im undeformirten Zustande kreisförmiger Draht von ungleicher Biegsamkeit in verschiedenen Richtungen wird in eine andere Kreisform gebogen durch an seinen Enden angreifende Kräftepaare, die einander das Gleichgewicht halten.** — Ein Draht von ungleicher Biegsamkeit in verschiedenen Richtungen wird so geformt, dass er im ungezwängten Zustande einen Kreisbogen vom Radius a bildet, während die Ebene seines grössten Biegungswiderstandes in jedem Punkte einen Kegel berührt, der mit der Ebene des Drahtes einen Winkel α einschliesst. Seine Enden werden dann zusammengebracht und, wie in §§ 623, 624, verbunden, so dass das Ganze ein geschlossener kreisförmiger Ring von einem beliebig gegebenen Radius r wird. Man soll die neue Neigung φ, welche die Ebene des grössten Biegungswiderstandes gegen die Ebene des Ringes annimmt, und das Kräftepaar G bestimmen, welches in der Ebene des Ringes zwischen den zu beiden Seiten irgend eines Normalschnittes liegenden Massentheilchen wirkt.

Die beiden Gleichungen zwischen den Componenten des Kräftepaars und den Componenten der Krümmung in den Ebenen des grössten und kleinsten Biegungswiderstandes bestimmen die beiden unbekannten Grössen des Problems.

Diese Gleichungen sind

$$(4) \qquad \begin{cases} B\left(\frac{1}{r}\cos\varphi - \frac{1}{a}\cos\alpha\right) = G\cos\varphi \\ C\left(\frac{1}{r}\sin\varphi - \frac{1}{a}\sin\alpha\right) = G\sin\varphi, \end{cases}$$

da $\frac{1}{a}\cos\alpha$ und $\frac{1}{a}\sin\alpha$ die Componenten der natürlichen Krümmung in den Hauptebenen, folglich $\frac{1}{r}\cos\varphi - \frac{1}{a}\cos\alpha$ und $\frac{1}{r}\sin\varphi - \frac{1}{a}\sin\alpha$ die Aenderungen der Krümmung in diesen Ebenen sind, welche die entsprechenden Componenten $G\cos\varphi$ und $G\sin\varphi$ des Kräftepaars G unterhalten.

Soweit es sich um die Lage handelt, in welche der Draht durch die Rotation um seine elastische Centralcurve übergeht, kann das Problem durch eine Anwendung des Princips der Energie gelöst werden, welche die Entwicklungen der §§ 623, 624 als besondere Fälle umfasst.

Es sei L die für die Längeneinheit des Ringes genommene Grösse des Kräftepaares, welches in jedem Normalschnitt von aussen her angebracht werden muss, um die Ebene des grössten Biegungswiderstandes in jedem Punkte unter irgend einem gegebenen Winkel φ gegen die Ebene des Ringes geneigt zu halten. Wenn der Ring so gehalten wird, so haben wir wie früher (§§ 623, 624) für die potentielle Energie der Elasticitätswirkung in demselben

$$E = \pi r \left\{ B\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\alpha}{a}\right)^2 + C\left(\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\alpha}{a}\right)^2 \right\}, \tag{5}$$

folglich

$$\left\{ \begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi r}\frac{dE}{d\varphi} \\ &= \left\{ -B\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\alpha}{a}\right)\frac{\sin\varphi}{r} + C\left(\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\alpha}{a}\right)\frac{\cos\varphi}{r} \right\}. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich Null, so erhalten wir dieselbe Gleichung, die sich aus (4) durch Elimination von G ergibt. Dieselbe bestimmt die Relation, die zwischen φ und r bestehen muss, damit der Ring, wenn sein Radius aus a in r übergegangen ist, in sich selbst (d. h. ohne jede Anwendung eines Kräftepaars im Normalschnitt) im Gleichgewicht sei. Die vorliegende Methode hat den Vorzug, dass sie die Unterscheidung der Lösungen, was die Stabilität oder Instabilität des Gleichgewichts betrifft, erleichtert, da (§ 291) für ein stabiles Gleichgewicht E ein Minimum, für ein instabiles Gleichgewicht ein Maximum ist.

Um einen besonderen Fall zu betrachten, nehmen wir $C = \infty$ an, was das Problem bedeutend vereinfacht. Die Glieder in (5) und (6), welche C als Factor enthalten, werden in diesem Falle ungereimt und fordern natürlich, dass

$$\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin\alpha}{a} = 0$$

sei. Für diesen Fall ist aber die frühere Methode klarer und besser; denn die zweite der Gleichungen (4) liefert sofort das eben erhaltene Resultat, und dann bestimmt die erstere der Gleichungen (4) den Werth von G, wenn derselbe bestimmt werden soll. Wir gelangen so zu dem im folgenden Paragraphen ausgesprochenen Ergebniss: —

626. Auflegung einer abwickelbaren Fläche auf einen Kegel. — Es sei ein gleichförmiger Reifen gegeben, welcher sich in jedem Punkte nur in einer Tangentialebene an seine elastische Centrallinie biegen lässt und so geformt ist, dass er, frei von Zwang, (wenn er z. B. in irgend einem Normalschnitt durchschnitten ist und keine Einwirkung von anderen Körpern erfährt), einen Kreis vom Radius a bildet, und dass zugleich die Ebenen, in denen er unbiegsam ist, überall einen gegen die Ebene dieses Kreises geneigten Kegel berühren. Es wird dies ganz nahezu bei einem gewöhnlichen Reifen von dünnem Eisenblech der Fall sein, der einem

conischen Gefäss oder einem Ende einer Tonne von gewöhnlicher Form aufgelegt ist. Ein solcher Reifen werde verkürzt (oder verlängert), in einen Kreis vom Radius a gebogen und, nachdem seine Enden in der gewöhnlichen Weise aneinander genietet sind (§ 623), sich selbst überlassen, so dass keine Kraft von aussen her auf ihn wirkt. Wenn er zur Ruhe gekommen ist, wird die Ebene, in der er sich nicht biegen lässt, den Winkel $\varphi = \arcsin\left(\frac{r}{a}\sin\alpha\right)$ mit der Ebene seiner Kreisform bilden, und das Elasticitätskräftepaar, welches in dieser Ebene zwischen den zu beiden Seiten irgend eines Normalschnitts liegenden Massentheilen wirkt, wird

$$G = \frac{B}{\cos\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\cos\alpha}{a}\right)$$

sein. Diese Resultate ergeben sich sofort, wenn man beachtet, dass die Componente der Krümmung in der Ebene der Unbiegsamkeit in jedem Punkte unveränderlich von demselben Werthe $\frac{\sin\alpha}{a}$ sein muss, wie im gegebenen ungezwängten Zustande des Reifens, und dass das componirende Kräftepaar $G\cos\varphi$ in der zur Ebene der völligen Unbiegsamkeit senkrechten Ebene so beschaffen sein muss, dass die Componente der Krümmung in dieser Ebene sich aus $\frac{\cos\alpha}{a}$ in $\frac{\cos\varphi}{r}$ verwandle.

Der grösste Kreis, in welchen sich ein solcher Reifen verwandeln kann, ist natürlich der vom Radius $\frac{a}{\sin\alpha}$. Für diesen ist $\varphi = {}^1/_2\,\pi$, oder die Fläche, in welcher in keinem Punkte eine Biegung möglich ist (in praktischen Fällen die Fläche des Metallblatts), wird die Ebene des Kreises. Es ist daher $G = \infty$, und dies zeigt, dass, wenn man in der dargelegten Weise einen Reifen anfertigt, der nur unendlich wenig von dieser Bedingung abweicht, das in jedem Normalschnitt wirkende innere Kräftepaar unendlich gross sein wird, was offenbar richtig ist.

627. Biegung einer ebenen elastischen Platte. — Ein anderer wichtiger und interessanter Fall lässt sich mittels einer der auf die elastischen Drähte angewandten ganz ähnlichen Methode leicht behandeln, nämlich das Gleichgewicht einer ebenen elastischen Platte, die durch Kräfte gebogen wird, welche gewissen unten (§ 632) angegebenen Bedingungen unterworfen sind. Vorher ist es zweck-

mässig, einige Definitionen und einleitende Betrachtungen zu geben.

(1) Eine Fläche eines festen Körpers ist eine Fläche, welche immer durch die nämlichen Massenpunkte des Körpers geht, wie derselbe auch deformirt werden möge.

(2) Die Mittelfläche einer Platte ist die Fläche, welche durch alle die Punkte derselben geht, die, wenn sie frei von Zwang ist, in einer Ebene mitten zwischen ihren beiden ebenen Seitenflächen liegen.

(3) Ein Normalschnitt einer Platte oder eine zu einer Platte normale Oberfläche ist eine Fläche, welche, wenn dieselbe frei von Zwang ist, deren Seitenflächen und alle denselben parallelen Ebenen unter rechten Winkeln schneidet, und welche daher im undeformirten Zustande nothwendig entweder eine einzige Ebene oder eine cylindrische (oder prismatische) Oberfläche ist.

(4) Die Deflexion irgend eines Punktes oder kleinen Theils der Platte ist der Abstand seiner Mittelfläche von der an die Mittelfläche in irgend einem in ihr passend gewählten Anfangspunkte gelegten Tangentialebene.

(5) Die Inclination der Platte in einem Punkte ist die Neigung der Tangentialebene an die durch diesen Punkt gehende Mittelfläche gegen die im Anfangspunkt gelegte Tangentialebene.

(6) Die Krümmung einer Platte in einem Punkte oder in einem kleinen Theil ist die Krümmung, welche ihre Mittelfläche daselbst hat.

(7) In einer Fläche, welche nur unendlich wenig von einer Ebene verschieden ist, nennt man die Krümmung gleichförmig, wenn die Krümmungen in zwei parallelen Normalschnitten gleich sind, wo auch diese Normalschnitte gelegt werden.

(8) Jeder Durchmesser einer Platte, oder Abstand in einer Platte, die unendlich wenig von einer Ebene abweicht, heisst endlich, wofern er nicht ein unendlich grosses Vielfache des mit der grössten Inclination multiplicirten kleinsten Krümmungsradius ist.

Unter der Voraussetzung, dass die im Anfangspunkt gelegte Tangentialebene zur Ebene XOY gewählt werde, sei (x, y, z) irgend ein Punkt der Mittelfläche der Platte, i die Inclination derselben in diesem Punkte und $\frac{1}{r}$ ihre Krümmung in einem durch denselben gehenden Normalschnitt, welcher mit ZOX den Winkel φ einschliesst. Dann ist

$$\tan i = \sqrt{\left(\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}\right)} \tag{1}$$

und, wenn i unendlich klein ist,

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = \frac{d^2 z}{dx^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2 z}{dx\, dy} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{d^2 z}{dy^2} \sin^2 \varphi.$$

Diese Formeln zu beweisen, nehmen wir an, ξ, η, ζ seien die Coordinaten irgend eines Punktes der Fläche, welcher (x, y, z) unendlich nahe liegt. Dann ist nach den Elementen der Differentialrechnung

$$\zeta = \frac{dz}{dx} \xi + \frac{dz}{dy} \eta + \tfrac{1}{2} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \xi^2 + 2 \frac{d^2 z}{dx\, dy} \xi \eta + \frac{d^2 z}{dy^2} \eta^2 \right).$$

Es sei nun

$$\xi = \varrho \cos \varphi, \quad \eta = \varrho \sin \varphi,$$

so dass wir

$$(3) \qquad \begin{cases} \zeta = A\varrho + \tfrac{1}{2} B \varrho^2, \text{ wo} \\ A = \dfrac{dz}{dx} \cos \varphi + \dfrac{dz}{dy} \sin \varphi \text{ und} \\ B = \dfrac{d^2 z}{dx^2} \cos^2 \varphi + 2 \dfrac{d^2 z}{dx\, dy} \sin \varphi \cos \varphi + \dfrac{d^2 z}{dy^2} \sin^2 \varphi \text{ ist,} \end{cases}$$

erhalten. Dann ist nach der Formel für die Krümmung einer ebenen Curve (§ 9)

$$\frac{1}{r} = \frac{B}{(1 + A^2)^{3/2}}, \text{ oder, da } A \text{ unendlich klein ist, } \frac{1}{r} = B,$$

und damit ist (2) bewiesen.

Daraus folgt, dass die durch

$$(4) \qquad z = \tfrac{1}{2} (A x^2 + 2 c x y + B y^2)$$

dargestellte Oberfläche eine Fläche gleichförmiger Krümmung ist, wenn A, B, c im ganzen Gebiet, das den Werthen von (x, y) eingeräumt wird, constant sind; diese Werthe werden durch die Bedingung beschränkt, dass $Ax + cy$ und $cx + By$ überall unendlich klein sein müssen.

628. Die Biegung darf nicht derartig sein, dass eine Dehnung der Mittelfläche eintritt, die in einem endlichen Verhältniss zu der jeder Seitenfläche steht. — Wenn eine ebene Oberfläche in irgend eine nicht abwickelbare (§ 139) Fläche deformirt wird, so muss sie einen gewissen Grad von Ausdehnung oder Contraction erleiden. Eine wesentliche Bedingung für die Theorie der elastischen Platten, zu der wir uns alsbald wenden werden, besteht aber darin, dass die Grösse der auf diese Weise nothwendigen Ausdehnung oder Contraction in der Mittelfläche in jedem Falle äusserst klein ist im Vergleich mit der aus der Krümmung herrührenden Ausdehnung oder Contraction der beiden Seitenflächen (§ 141). Wenn wir den Fall ausschliessen, in welchem die Fläche so deformirt wird, dass sie sich nur unendlich wenig von einer abwickelbaren unterscheidet, so ist diese Bedingung der folgenden äquivalent: —

An allen Stellen, die einen endlichen Abstand [§ 627 (8)] vom Anfangspunkt haben, ist das Verhältniss der Deflexion zur Dicke eine unendlich kleine Grösse.

Wenn wir den Ausdruck „Deflexion“ nicht auf die in § 627 (4) gegebene Bedeutung beschränken, sondern auf den Abstand von irgend einer wirklich abwickelbaren Fläche ausdehnen, so wird der ausgeschlossene Fall natürlich demselben Ausspruch subsumirt.

Obgleich die Wahrheit dieser Bemerkung auf der Hand liegt, so ist es doch zu empfehlen, sie durch Bestimmung der Grössen der angegebenen Ausdehnung und Contraction zu beweisen.

629. Ausdehnung einer Ebene durch synclastische oder anticlastische Biegung. — Wir nehmen an, eine gegebene ebene Fläche sei in eine krumme Form gebogen, ohne dass die von einem besonderen Punkte O der Fläche ausgehenden Linien irgend eine Ausdehnung oder Contraction erlitten hätten. Man soll die Ausdehnung oder Contraction längs des Umfangs eines Kreises bestimmen, der um O als Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius a auf der undeformirten Ebene beschrieben ist. Wenn man die Ausdehnung in jedem Theil des Kreises und nicht bloss die Gesammtausdehnung ermitteln soll, so muss noch eine Angabe über die Art der Biegung gemacht sein. Diese soll der Einfachheit wegen zunächst darin bestehen, dass irgend ein Punkt P der gegebenen Fläche sich während der Deformirung in einer zu der durch O gehenden Tangentialebene senkrechten Ebene bewegt.

Es seien a, ϑ die Polar-Coordinaten von P in seiner anfänglichen Lage und r, ϑ diejenigen der auf die durch O gehende Tangentialebene genommenen Projection seiner Lage in der gebogenen Fläche; ferner sei z der Abstand dieser Lage von der Tangentialebene durch O. Dann wird ein Element $a\,d\vartheta$ des undeformirten Kreises auf der gebogenen Fläche

$$(r^2 d\vartheta^2 + dr^2 + dz^2)^{1/2},$$

und wir erhalten somit für die Ausdehnung (d. i. das Verhältniss der Verlängerung zur ursprünglichen Länge) dieses Elements

$$(1) \qquad e = \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{dr^2}{a^2 d\vartheta^2} + \frac{dz^2}{a^2 d\vartheta^2}\right)^{1/2} - 1.$$

Bezeichnet also E das Verhältniss der Verlängerung des ganzen Umfanges zu der anfänglichen Länge desselben, oder die mittlere Ausdehnung des Umfanges, so ist

$$(2) \qquad E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \left\{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{dr^2}{a^2 d\vartheta^2} + \frac{dz^2}{a^2 d\vartheta^2}\right)^{1/2} - 1\right\},$$

wo z und r als bekannte Functionen von ϑ angenommen werden müssen.

Wenn wir uns jetzt auf Abstände von O beschränken, innerhalb welcher die Krümmung der Oberfläche nicht merklich ungleichförmig ist, so ergibt sich

$$(3) \qquad s = \frac{a^2}{2\varrho} \text{ und } r \doteq \varrho \sin \frac{a}{\varrho} = a\left(1 - \frac{1}{6}\frac{a^2}{\varrho^2} + \text{ u. s. w.}\right),$$

wenn ϱ der Krümmungsradius des durch O und P gehenden Normalschnitts ist; und wenn wir ϑ in einer der Linien gleich Null setzen, in welchen die Tangentialebene von den Hauptnormalebenen (§ 130) geschnitten wird, so erhalten wir

$$(4) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}\cos^2\vartheta + \frac{1}{\varrho_2}\sin^2\vartheta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\cos 2\vartheta,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien sind. Folglich verschwindet der Ausdruck $\frac{dr^2}{a^2 d\vartheta^2}$ unter dem Wurzelzeichen, wenn wir keine Glieder nehmen, welche eine höhere als die erste Potenz des kleinen Bruchs $\frac{a^2}{\varrho^2}$ enthalten, und für diesen Grad der Annäherung ist

$$\varepsilon = \left\{1 - \frac{1}{3}\frac{a^2}{\varrho^2} + a^2\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right)^2 \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\vartheta\right\}^{1/2} - 1$$

$$\doteq -\frac{1}{6}\frac{a^2}{\varrho^2} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_1}\right)^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta,$$

oder endlich nach (4) und nach einigen Reductionen

$$(5) \quad \varepsilon = -\frac{1}{6} a^2 \left\{\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_2^2}\right)\cos 2\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)^2 \cos 4\vartheta\right\}.$$

Wird dies in (2) eingesetzt, so folgt

$$(6) \qquad e = -\frac{1}{6}\frac{a^2}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Der so ausgedrückte Gesammtbetrag der Ausdehnung wird sich, wie aus (5) hervorgeht, gleichförmig über den Umfang vertheilen, wenn man nicht jeden Punkt P zwingt, in der durch O gehenden zu XOY senkrechten Ebene zu bleiben, sondern ihm gestattet, in der Richtung des Umfanges durch eine Strecke von der Grösse

$$(7) \qquad \frac{a^3}{24}\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1^2}-\frac{1}{\varrho_2^2}\right)\sin 2\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)^2 \sin 4\vartheta\right\}$$

auszuweichen. Aus (6) schliessen wir Folgendes: —

630. Wenn ein ebenes Flächenstück überall gleichförmig gebogen wird, ohne dass in irgend einem durch einen gewissen Punkt desselben gehenden Radius eine Ausdehnung stattfindet, während in der Peripherie jedes um denselben Punkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreises eine gleichmässige Ausdehnung oder Contraction erfolgt, so ist die Grösse dieser Contraction (die da, wo die Wirkung in einer Ausdehnung besteht, als negativ gerechnet wird) gleich dem Verhältniss von einem Sechstel des Quadrats des Radius

des Kreises zu dem Rechteck aus dem grössten und dem kleinsten Krümmungsradius der Normalschnitte der Fläche; oder, was dasselbe ist, gleich dem Verhältniss von zwei Dritteln des Rechtecks aus der grössten und der kleinsten Deflexion der Peripherie von der im Centrum gelegten Tangentialebene der Oberfläche zum Quadrat des Radius; oder endlich gleich dem Verhältniss von einem Drittel der grössten Deflexion zum grössten Krümmungsradius.

Wenn die so gebogene Fläche die Mittelfläche einer Platte von gleichmässiger Dicke ist, und wenn jede im undeformirten Zustande zu dieser Fläche senkrechte Linie der Substanz auch nach der Biegung auf der Fläche senkrecht steht, so ist die Ausdehnung auf der convexen und die Contraction auf der concaven Seite in jedem Normalschnitt offenbar gleich dem Verhältniss der halben Dicke zum Krümmungsradius. Der Vergleich dieses Ergebnisses mit der letzten Form des vorhergehenden Ausspruchs beweist, dass, wenn die zweite der beiden in § 628 angegebenen Bedingungen erfüllt ist, auch die erstere erfüllt sein wird.

631. Satz von Gauss über die Biegung krummer Flächen. — Wenn eine schon in der angegebenen Weise gebogene Fläche aufs Neue gebogen und auf eine Form gebracht wird, die immer noch den vorgeschriebenen Bedingungen genügt, oder wenn einer gegebenen krummen Oberfläche irgend eine andere Form gegeben wird, dadurch dass man sie denselben Bedingungen gemäss biegt, so ist die in den Umfängen der concentrischen Kreise durch diese Biegung erzeugte Contraction natürlich gleich der Zunahme im Werthe des im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Verhältnisses. Wenn also eine krumme Fläche auf irgend eine andere Form gebracht wird, ohne dass in einem ihrer Theile eine Ausdehnung erfolgt, so bleibt das Rechteck aus den beiden Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte unverändert. Dies ist der berühmte Satz von Gauss über die Biegung von krummen Flächen, den wir in mehr analytischer Weise in dem einleitenden Capitel (§ 150) bewiesen haben.

632. Beschränkungen hinsichtlich der Kräfte und Biegungen in der elementaren Theorie der elastischen Platten. — Wir beginnen jetzt ohne weitere Einleitung die Theorie der Biegung einer ebenen elastischen Platte und lassen zunächst die einschränkenden Bedingungen folgen, die wir in (§ 627) zu geben versprochen haben.

(1) Die irgend einer Linie in der Ebene der Platte parallelen Componenten der Kräfte, welche von aussen her auf irgend

einen von einer Normalfläche [§ 627 (3)] begrenzten Theil der Platte wirken, sind entweder verschwindend oder auf Kräftepaare reducirbar. Mit anderen Worten: Für jeden von einer Normalfläche umgrenzten Theil der Platte ist die algebraische Summe solcher Componenten Null.

(2) Die Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche sind überall unendlich grosse Vielfache der Dicke der Platte.

(3) Die Deflexion ist, innerhalb einer endlichen Entfernung vom Anfangspunkt, nirgends mehr als ein unendlich kleiner Bruchtheil der Dicke.

(4) Die Dicke der Platte und die Elasticitätscoefficienten der Substanz brauchen nicht in allen Punkten dieselben zu sein; wenn sie aber überhaupt variiren, so muss dies von Punkt zu Punkt continuirlich geschehen, und es darf innerhalb eines endlichen Flächenstücks der Platte nicht eine dieser Grössen an einer Stelle unvergleichlich grösser als an einer anderen Stelle sein.

633. Angabe der Resultate der allgemeinen Theorie. — Die allgemeine Theorie der elastischen festen Körper, die wir später behandeln werden, zeigt, dass, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, die Vertheilung der Deformation durch die Platte die folgenden Eigenschaften besitzt, deren Angabe an dieser Stelle zwar für das besondere Problem, zu dem wir uns wenden, nicht nöthig ist, aber uns befähigen wird, die darin angewandten Principien vollständig zu verstehen und zu würdigen.

(1) In jedem Theil der Platte, wo die Krümmung von endlicher Grösse ist, ist die Ausdehnung eines Theils der Mittelfläche unendlich klein im Vergleich mit der jeder Seitenfläche.

(2) Die Massenpunkte in jeder geraden Linie, welche zu der Platte senkrecht ist, wenn dieselbe eine Ebene bildet, bleiben in einer Geraden, welche senkrecht zu den gekrümmten Oberflächen ist, die von den Seitenflächen der Platte und den dazwischen liegenden parallelen Ebenen der Substanz nach der Biegung gebildet werden. Folglich haben die Curven, in welchen diese Oberflächen von irgend einer durch diese Linie gehenden Ebene geschnitten werden, einen Punkt dieser Linie zum gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt.

(3) Die Gesammtdicke der Platte bleibt in jedem Punkte unverändert; aber die halbe Dicke vermindert sich auf einer Seite (es ist dies die convexe Seite, wenn die Krümmung synclastisch ist) und vergrössert sich um ebenso viel auf der anderen Seite der Mittelfläche; diese Ab- und Zunahmen lassen sich mit den Verlän-

gerungen und Verkürzungen von Strecken vergleichen, welche gleich der halben Dicke und auf den beiden Seitenflächen der Platte abgetragen sind.

634. Angabe der Gesetze für die Biegung elastischer Platten. — Die Folgerungen aus der allgemeinen Theorie, auf welche wir die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung einer elastischen Platte gründen werden, sind folgende: —

Es möge eine von Natur ebene Platte so gebogen werden, dass sie eine Fläche von überall gleichförmiger Krümmung [§ 627 (7)] bildet, während die einwirkenden Kräfte und die Grössen der Verschiebung den Bedingungen und Beschränkungen des § 632 genügen. Unter dieser Voraussetzung gelten folgende Sätze: —

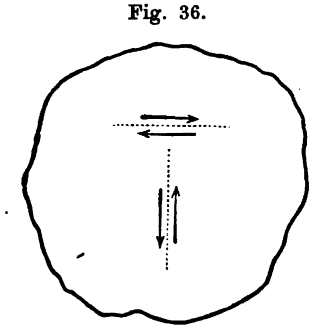
(1) Die Richtung der gegen jeden Schnitt der Platte wirkenden Kraft ist in jedem Punkte der an die benachbarte Mittelfläche gelegten Tangentialebene parallel.

(2) Die gegen irgend welche parallelen Normalschnitte wirkenden Kräfte haben in allen Punkten gleiche Neigung gegen die Richtungen der Normalschnitte (d. h. diese Kräfte wirken in Richtungen, welche parallel sein würden, wenn die Platte ungebogen wäre, und welche thatsächlich nur in Folge der durch die Biegung in den Normalschnitten hervorgebrachten unendlich kleinen Abweichungen vom Parallelismus abweichen.)

(3) Die Grössen der in einem Normalschnitt oder in beliebigen parallelen Normalschnitten auf gleich grosse unendlich kleine Flächenstücke wirkenden Kräfte sind einfach den Abständen dieser Flächenstücke von der Mittelfläche der Platte proportional.

(4) Die Kräftecomponenten längs der Tangentialebenen der Normalschnitte sind gleich und haben in zu einander senkrechten Schnitten entgegengesetzte Richtungen. Den Beweis findet man in § 661. [Die Bedeutung, welche hier der Ausdruck „entgegengesetzte Richtungen" hat, ist aus der Figur 36 zu entnehmen, wo die Pfeilspitzen die Richtungen angeben, in denen die zu beiden Seiten jedes Normalschnitts liegenden Substanztheile sich fortbewegen würden, wenn die Substanz durch jeden der Normalschnitte, welche durch die punktirten Linien dargestellt werden, wirklich durchschnitten würde.]

Fig. 36.

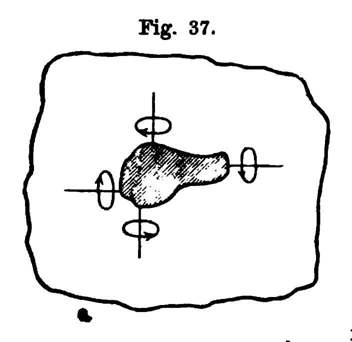


(5) Aus dem Gesetz der Superposition kleiner Verschiebungen erkennen wir, dass, wenn die einwirkenden Kräfte sämmtlich verdoppelt oder in irgend einem anderen Verhältniss geändert werden, sich die Krümmung in jedem Normalschnitt und alle in (1), (2), (3), (4) näher bestimmten inneren Kräfte in demselben Verhältniss ändern, während die Aenderung der potentiellen Energie der inneren Kräfte dem Quadrate dieses Verhältnisses proportional wird.

635. Kräftepaare, gegen einen ganzen Normalschnitt wirkend. — Jeder Theil der Platte, welcher von einem Normalschnitt durch den Umfang eines geschlossenen Polygons oder einer geschlossenen Curve der Mittelfläche begrenzt wird, erleidet von der um ihn her liegenden Masse der Platte die Einwirkung von Kräften, welche, wie aus § 634 (3) unmittelbar hervorgeht, sich auf eine Schaar von Kräftepaaren reduciren lassen, indem man sie für jedes der unendlich kleinen Rechtecke zusammenfasst, in welche man sich den umgrenzenden Normalschnitt durch Normallinien getheilt vorstellen kann. Aus § 634 (2) folgt, dass die so erhaltene Kräftepaar-Vertheilung längs jedes geraden Theils der Umgrenzung (wenn ein solcher vorhanden ist) gleichförmig und in allen parallelen Theilen der Umgrenzung für gleiche Längen von der nämlichen Grösse ist.

636. Die Componenten der Drillung um zwei beliebige zu einander senkrechte Axen sind gleich. — Aus § 634 (4) folgt, dass die Kräftepaar-Componenten, deren Axen senkrecht zur Umgrenzung sind, in auf einander senkrechten Theilen der Umgrenzung gleich gross sind und in Richtungen drehen, deren gegenseitiges Verhältniss die kreisförmigen Pfeile der Figur 37 angeben; d. h. die Richtungen sind solche, dass, wenn die Axe nach der Regel des § 234 für einen Punkt der Umgrenzung von dem betrachteten Theil der Platte aus nach aussen zu gezogen ist, sie für jeden Punkt, in welchem die Umgrenzung senkrecht zu ihrer Richtung in dem ersteren Punkte ist, nach innen zu gezogen werden muss.

Fig. 37.

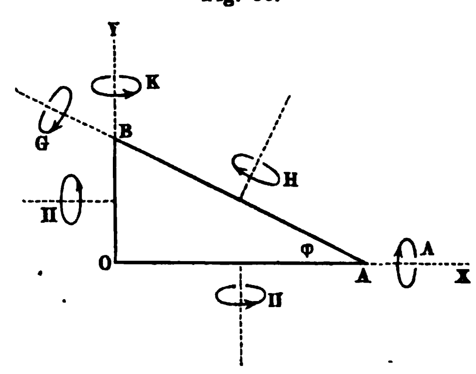


637. Hauptaxen der Biegungsreaction. — Wir können jetzt beweisen, dass es zwei zu einander rechtwinklige Normalschnitte gibt, in welchen die Kräftepaar-Componenten, deren Axen senkrecht auf diesen Schnitten stehen, verschwinden, und dass die

Kräftepaar-Componenten, deren Axen mit diesen Schnitten zusammenfallen, die grössten und die kleinsten Werthe haben.

Es sei OAB ein rechtwinkliges Dreieck der Platte. An den Seiten OA, OB, AB wirken beziehungsweise die Kräftepaare A und Π, K und Π, G und H. Die Grösse jedes Paares wird gerechnet für die Längeneinheit der Seite, auf die es wirkt, und die Axen und Richtungen der verschiedenen Paare sind, wenn jedes als positiv gerechnet wird, durch die kreisförmigen Pfeile der Fig. 38 angegeben. Ist dann $AB = a$, $BAO = \varphi$, so sind die Gesammtbeträge der Kräftepaare an den drei Seiten beziehungsweise

Fig. 38.



$$A a \cos\varphi, \quad \Pi a \cos\varphi,$$
$$K a \sin\varphi, \quad \Pi a \sin\varphi,$$
$$G a, \quad H a.$$

Werden die beiden letzteren nach den Axen OX und OY zerlegt, so erhalten wir

$$G a \cos\varphi - H a \sin\varphi \text{ um } OX,$$
$$G a \sin\varphi + H a \cos\varphi \quad " \quad OY.$$

Das Gleichgewicht des in Rede stehenden Theils der Platte würde aber nicht gestört werden, wenn derselbe starr werden sollte (§ 564); folglich muss

$$(1)\begin{cases} G a \cos\varphi - H a \sin\varphi = A a \cos\varphi + \Pi a \sin\varphi & \text{für die Kräftepaare um } OX \\ G a \sin\varphi + H a \cos\varphi = K a \sin\varphi + \Pi a \cos\varphi & \quad " \quad " \quad " \quad " \quad OY \end{cases}$$

sein. Hieraus folgt unmittelbar

$$(2)\qquad \begin{cases} G = A \cos^2\varphi + 2\Pi \sin\varphi\cos\varphi + K \sin^2\varphi \\ H = (K - A)\sin\varphi\cos\varphi + \Pi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \end{cases}$$

Mithin geben die Werthe von φ, für welche H verschwindet, G seine grössten und kleinsten Werthe, und da sie durch die Gleichung

$$(3)\qquad \tan 2\varphi = -\frac{\Pi}{\frac{1}{2}(K - A)}$$

bestimmt werden, so beträgt ihr Unterschied $\frac{1}{2}\pi$.

Eine Modification dieser Formeln, die sich als nützlich erweisen wird, erhalten wir, wenn wir

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(K + \Delta), \quad \Theta = \tfrac{1}{2}(K - \Delta) \tag{4}$$

setzen. Dann reducirt sich (2) auf

$$\begin{aligned} G &= \Sigma + \Pi \sin 2\varphi - \Theta \cos 2\varphi \\ H &= \qquad \Pi \cos 2\varphi + \Theta \sin 2\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

und diese Formeln gehen über in

$$\begin{cases} G = \Sigma + \Omega \cos 2(\varphi - \alpha) \\ H = \quad - \Omega \sin 2(\varphi - \alpha), \end{cases} \tag{6}$$

wo α [es ist dies ein durch (3) gegebener Werth von φ] und Ω so gewählt sind, dass

$$\begin{aligned} &\Pi = \Omega \sin 2\alpha, \quad \Theta = -\Omega \cos 2\alpha, \\ &\text{folglich natürlich } \Omega = (\Pi^2 + \Theta^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{7}$$

ist. Diese Untersuchung beweist, dass wir das ganze in Rede stehende System innerer Kräfte auf folgende zweckmässige Weise zusammenfassen dürfen: —

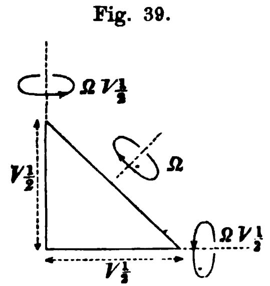
638. Definition der synclastischen und der anticlastischen Reaction. — Die Wirkung, welche jeder Theil der Platte durch die zwischen ihm und der ihn überall umgebenden Masse der Platte wirkenden Kräfte erfährt, nennen wir [in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Gebrauch dieses unten (§ 658) definirten Ausdrucks] eine elastische Reaction. Dieselbe kann als aus zwei verschiedenen Elementen bestehend angesehen werden: — (1) einer synclastischen Reaction und (2) einer anticlastischen Reaction.

(1) Die synclastische Reaction strebt, die Platte um jede in der Ebene derselben gezogene gerade Linie direct und gleich stark zu biegen. Es ist zweckmässig, unter der Grösse der synclastischen Reaction die Grösse Σ des Kräftepaares zu verstehen, welches wechselseitig zwischen den zu beiden Seiten eines beliebigen geraden Normalschnitts von der Einheit der Länge liegenden Substanztheilen wirkt. Ihre Wirkung würde, wenn die Platte in allen Richtungen gleich biegsam wäre, darin bestehen, in allen Normalschnitten gleiche Krümmung zu erzeugen (d. h. die Platte auf die Gestalt einer Kugel zu bringen).

(2) Die anticlastische Reaction besteht aus zwei gleich grossen entgegengesetzt gerichteten einfachen Biegungsreactionen um zwei Reihen paralleler gerader Linien, die in der Ebene der Platte auf einander senkrecht stehen. Ihre Wirkung würde, wenn die Platte in allen Richtungen gleich biegsam wäre, eine gleichförmige anticlastische Krümmung mit gleichen convexen und con-

caven Theilen sein. Ihre Grösse wird gemessen durch die Grösse Ω des Kräftepaares, welches die Wechselwirkung darstellt zwischen den Substanztheilen zu beiden Seiten eines geraden Normalschnitts von der Einheit der Länge, welcher einer jener beiden Schaaren von Linien parallel ist. Sie ruft Kräftepaare von derselben Grösse Ω ins Leben zwischen den Substanztheilen zu jeder Seite eines Normalschnitts von der Einheit der Länge, welcher einer der beiden Linien-Schaaren parallel ist, die den rechten Winkel zwischen den ersteren Linien halbiren; aber diese letzteren Kräftepaare sind nicht senkrecht zur Ebene des Normalschnitts, sondern drehen in derselben. Dies wird bewiesen und erläutert durch die Fig. 39, welche (als ein besonderer Fall der Fig. 38 und der Gleichungen (1) des § 637) das Gleichgewicht eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks darstellt, auf welches um jede Kathete als Axe ein Kräftepaar von der Grösse $\Omega\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und um eine zur Hypotenuse senkrechte Axe ein drittes Kräftepaar Ω einwirkt.

Fig. 39.



Wenn zwei Paare rechtwinkliger Axen, von denen jedes die durch das andere gebildeten rechten Winkel halbirt, als Coordinatenaxen angenommen werden, so kann, wie die vorhergehenden Formeln [§ 637 (5)] zeigen, eine anticlastische Reaction, welche ein beliebiges drittes Paar rechtwinkliger Linien zu Axen hat, nach der gewöhnlichen Cosinusformel, wenn man darin jeden Winkel verdoppelt, in zwei Reactionen zerlegt werden, deren Axen beziehungsweise mit den beiden Paaren von Coordinatenaxen zusammenfallen. Daraus geht hervor, dass zwei beliebige anticlastische Reactionen durch dieselbe geometrische Construction wie die Kräfte in eine einzige zusammengesetzt werden können. Diese Construction ist an Linien auszuführen, welche einen doppelt so grossen Winkel als die entsprechenden Axen der beiden gegebenen Reactionen einschliessen, und die Lage der Axen der resultirenden Reaction wird bestimmt, indem man jeden Winkel der erhaltenen Figur halbirt.

639. Geometrische Analogien. — Eine ganz entsprechende Reihe von Sätzen gibt es natürlich für die Krümmung einer Oberfläche. So ist dem in § 637 (3) für Biegungsreactionen bewiesenen Satze der oben (§ 130) hergeleitete Satz von Euler über die Krümmung einer Fläche analog, und die Definitionen und Sätze, welche

den auf ihn gegründeten und aus ihm hergeleiteten analog sind, können leicht ohne weitere Erläuterungen oder Beweise verstanden werden.

Es sei

$$1)\qquad z = \tfrac{1}{2}(\varkappa x^2 + 2\varpi xy + \lambda y^2)$$

die Gleichung einer gekrümmten Oberfläche in unendlich kleiner Entfernung vom Punkte O, wo sie von der Ebene YOX berührt wird. Die Krümmung der Fläche kann man ansehen als zusammengesetzt aus einer cylindrischen Krümmung λ, deren Axe parallel OX ist, einer cylindrischen Krümmung $\varkappa$, deren Axe parallel OY ist, und einer anticlastischen Krümmung ϖ, deren Axe die Winkel XOY, YOX' halbirt. Wenn also jede der Grössen ϖ und λ verschwände, so würde die Oberfläche cylindrisch sein; ihr Krümmungsradius wäre dann $\frac{1}{\varkappa}$ und ihre erzeugenden Linien parallel OY. Wenn jede der Grössen $\varkappa$ und λ verschwänden, so hätten wir eine anticlastische Krümmung; es gäbe dann zwei Schnitte gleicher Maximalkrümmung; die Richtungen dieser Schnitte würden die Winkel XOY und YOX' halbiren und der Krümmungsradius in jedem Schnitt gleich $\frac{1}{\varpi}$ sein.

Setzen wir jetzt

$$2)\qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\varkappa + \lambda),\quad \vartheta = \tfrac{1}{2}(\varkappa - \lambda),$$

so geht die Gleichung der Fläche über in

$$3)\qquad z = \tfrac{1}{2}\{\sigma(x^2 + y^2) + \vartheta(x^2 - y^2) + 2\varpi xy\},$$

oder in

$$4)\qquad \begin{cases} z = \tfrac{1}{2}\{\sigma + \vartheta\cos 2\varphi + \varpi\sin 2\varphi\}\, r^2 \\ \text{wenn } x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi \text{ ist,} \end{cases}$$

oder endlich in

$$5)\qquad \begin{cases} z = \tfrac{1}{2}\{\sigma + \omega\cos 2(\varphi - \alpha)\}\, r^2 \\ \text{wenn } \vartheta = \omega\cos 2\alpha,\ \varpi = \omega\sin 2\alpha \text{ ist.} \end{cases}$$

In diesen Formeln misst σ die sphärische Krümmung; ϑ und ϖ sind die beiden Componenten der anticlastischen Krümmung, genommen in Beziehung auf das Axenpaar $X'X$, $Y'Y$ und das andere Paar, welches die Winkel des ersteren halbirt. Die Resultante von ϑ und ϖ ist eine anticlastische Krümmung ω, deren Axen im Winkel XOY einen Winkel α mit OX und im Winkel YOX' einen gleich grossen Winkel α mit OY bilden.

640. Die beim Biegen einer Platte geleistete Arbeit. — Wenn die Bezeichnungen der §§ 637, 639 beibehalten werden, so ist die auf irgend ein Flächenstück A der Platte, welches unter der Einwirkung einer Reaction (K, Λ, Π) eine Krümmungsänderung $(\delta\varkappa, \delta\lambda, \delta\varpi)$ erfährt, ausgeübte Arbeit

$$1)\qquad (K\delta\varkappa + \Lambda\delta\lambda + 2\Pi\delta\varpi)\, A,$$

oder

(2) $$(2\,\Sigma\,\delta\sigma + 2\,\Theta\,\delta\vartheta + 2\,\Pi\,\delta\varpi)\,A,$$

wenn, wie früher,

(3) $$\begin{cases} \Sigma = \frac{1}{2}(K + \Delta), & \Theta = \frac{1}{2}(K - \Delta), \\ \sigma = \frac{1}{2}(\varkappa + \lambda), & \vartheta = \frac{1}{2}(\varkappa - \lambda) \end{cases}$$

ist.

Es sei nun $PQP'Q'$ ein rechtwinkliger Theil der Platte, dessen Mittelpunkt in O ist, und dessen Seiten $Q'P$, $P'Q$ parallel OX, während $Q'P'$, QP parallel OY sind. Ist dann

$$z = \frac{1}{2}(\varkappa x^2 + 2\,\varpi\,xy + \lambda y^2)$$

die Gleichung der gekrümmten Fläche, so erhalten wir

$$\frac{dz}{dx} = \varkappa x + \varpi y,\ \frac{dz}{dy} = \varpi x + \lambda y;$$

folglich weicht die Tangentialebene in (x, y) von der Ebene XOY durch eine unendlich kleine Rotation

(4) $$\begin{cases} \varkappa x + \varpi y \text{ um } OY \\ \varpi x + \lambda y \quad \text{„} \quad OX \end{cases}$$

ab, und die Rotation von XOY bis zur mittleren Tangentialebene für alle Punkte der Seite PQ oder $P'Q'$ beträgt

$$\mp \frac{1}{2}\,Q'P.\varkappa \text{ um } OY \text{ und}$$

$$\mp \frac{1}{2}\,Q'P.\varpi \quad \text{„} \quad OX.$$

Wenn also die Tangentialebene XOY in O fest bleibt, während die Krümmung von $(\varkappa, \varpi, \lambda)$ in $(\varkappa + \delta\varkappa, \varpi + \delta\varpi, \lambda + \delta\lambda)$ übergeht, so wird die Arbeit, welche die über die Seite PQ vertheilten Kräftepaare $PQ.K$ und $PQ.\Pi$ leisten, von denen das erstere um OY, das zweite um OX dreht, gleich

$$\frac{1}{2}\,Q'P.PQ.(K\,\delta\varkappa + \Pi\,\delta\varpi)$$

sein. Eine gleich grosse Arbeit werden die gleichen und entgegengesetzten Kräftepaare leisten, welche über die eine gleiche und entgegengesetzte Rotation erleidende Seite $Q'P'$ vertheilt sind. Auf ähnliche Weise erhalten wir für die Gesammtarbeit, welche auf die Seiten $P'Q$ und QP ausgeübt ist,

$$PQ.Q'P\,(\Pi\,\delta\varpi + \Delta\,\delta\lambda).$$

Folglich ist die auf alle vier Seiten des Rechtecks ausgeübte Gesammtarbeit

$$PQ.Q'P.(K\,\delta\varkappa + 2\,\Pi\,\delta\varpi + \Delta\,\delta\lambda),$$

und damit ist der Satz bewiesen; denn man kann jedes gegebene Flächenstück der Platte in unendlich kleine Rechtecke getheilt denken.

Es ist eine lehrreiche Uebung, das Resultat zu bewahrheiten, indem man mit der Betrachtung eines von einer beliebig gegebenen Curve begrenzten Plattentheils beginnt und die Ausdrücke (1) des § 637 anwendet, welche für die auf einen beliebigen unendlich kleinen Theil ds der Umgrenzung, dessen Lage durch (x, y) ausgedrückt ist, wirkenden Kräftepaare

$$(5)\qquad \begin{cases} \left(-\varLambda \frac{dx}{ds} + \varPi \frac{dy}{ds}\right) ds \text{ um } OX \\ \left(K \frac{dy}{ds} - \varPi \frac{dx}{ds}\right) ds \quad \text{„} \quad OY \end{cases}$$

liefern. Wie wir aber soeben (4) gesehen haben, ist die Rotation, welche die im Punkte (x, y) an die Platte gelegte Tangentialebene erfährt, wenn die Krümmung aus $(\varkappa\ \varpi,\ \lambda)$ in $(\varkappa + \delta\varkappa,\ \varpi + \delta\varpi,\ \lambda + \delta\lambda)$ übergeht,

$$(6)\qquad \begin{cases} x\delta\varkappa + y\delta\varpi \text{ um } OY \\ x\delta\varpi + y\delta\lambda \quad \text{„} \quad OX, \end{cases}$$

wo vorausgesetzt wird, dass die Tangentialebene an die Platte in O ihre Richtung nicht verändert; folglich ist die auf den Theil ds der Kante ausgeübte Arbeit

$$\left\{\left(K\frac{dy}{ds} - \varPi\frac{dx}{ds}\right)(x\delta\varkappa + y\delta\varpi) + \left(\varPi\frac{dy}{ds} - \varLambda\frac{dx}{ds}\right)(x\delta\varpi + y\delta\lambda)\right\} ds.$$

Die gesuchte Arbeit ist das über die ganze umgrenzende Curve genommene Integral dieses Ausdrucks, also gleich

$$(K\delta\varkappa + 2\varPi\delta\varpi + \varLambda\delta\lambda)\,A;$$

denn es ist

$$\int x\frac{dy}{ds}\,ds = -\int y\frac{dx}{ds}\,ds = A$$

und

$$\int x\frac{dx}{ds}\,ds = 0,\ \int y\frac{dy}{ds}\,ds = 0,$$

wenn jedes Integral um die ganze geschlossene Curve genommen wird.

641. Partielle Differentialgleichungen der beim Biegen einer elastischen Platte geleisteten Arbeit. — Wir wollen jetzt die Elasticitätskräfte betrachten, welche durch die Biegung $(\varkappa, \varpi, \lambda)$ der Platte ins Leben gerufen werden. Die Biegung wird von der Lage aus gerechnet, in welcher die Platte ungezwängt ist (sie hat dann die Form einer Ebene oder eine nur unendlich wenig davon abweichende Form). Bezeichnet w die für die Flächeneinheit der Platte genommene ganze Grösse der potentiellen Energie jener Kräfte, so erhalten wir, wie im Falle des in § 594 behandelten Drahtes,

$$(7)\qquad K\delta\varkappa = \delta_\varkappa w,\ \varLambda\delta\lambda = \delta_\lambda w,\ 2\varPi\delta\varpi = \delta_\varpi w,$$

oder nach der anderen Bezeichnung

$$(8)\qquad 2\varSigma\delta\sigma = \delta_\sigma w,\ 2\,\Theta\delta\vartheta = \delta_\vartheta w,\ 2\varPi\,\delta\varpi = \delta_\varpi w;$$

darin bezeichnen, wie oben dargelegt, K und $\varLambda$ die einfachen Biegungsreactionen (gemessen durch die für die Längeneinheit genommene Grösse des Biegungskräftepaars) um Linien, welche beziehungsweise OY und OX parallel sind; $\varPi$ die anticlastische

Reaction, deren Axen mit OX und OY einen Winkel von 45° einschliessen; Σ und Θ, welche zusammen K und Λ äquivalent sind, die synclastische Reaction und die anticlastische Reaction mit den Axen OX und OY. Auch sehen wir, wie in § 595, dass, von welcher Beschaffenheit auch die Substanz der Platte sein mag — dieselbe sei isotrop oder äolotrop (§ 677) — w eine homogene Function zweiten Grades der drei Krümmungscomponenten $(\varkappa, \lambda, \varpi)$ oder $(\sigma, \vartheta, \varpi)$ sein muss. Hieraus und aus (7) oder (8) geht hervor, dass die Coefficienten in den linearen Functionen der drei Krümmungscomponenten, welche die zur Erhaltung dieser Krümmung erforderlichen Reactionscomponenten ausdrücken, den gewöhnlichen Bedingungen genügen müssen, durch welche die Gesammtzahl von neun auf sechs reducirt wird.

Bezeichnen A, B, C, a, b, c sechs von der Beschaffenheit der festen Substanz und der Dicke der Platte abhängende Constanten, so erhalten wir

$$w = \tfrac{1}{2}(A\varkappa^2 + B\lambda^2 + C\varpi^2 + 2a\lambda\varpi + 2b\varpi\varkappa + 2c\varkappa\lambda), \tag{9}$$

folglich nach (7)

$$\left\{\begin{aligned} K &= A\varkappa + c\lambda + b\varpi \\ \Lambda &= c\varkappa + B\lambda + a\varpi \\ 2\Pi &= b\varkappa + a\lambda + C\varpi. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Werden diese Grössen nach § 640 (3) transformirt, so wird w durch σ, ϑ, ϖ ausgedrückt:

$$w = \tfrac{1}{2}\{(A+B+2c)\sigma^2 + (A+B-2c)\vartheta^2 + C\varpi^2 + 2(b-a)\vartheta\varpi + 2(b+a)\sigma\varpi + 2(A-B)\sigma\vartheta\}, \tag{11}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} 2\Sigma &= (A+B+2c)\sigma + (A-B)\vartheta + (b+a)\varpi \\ 2\Theta &= (A-B)\sigma + (A+B-2c)\vartheta + (b-a)\varpi \\ 2\Pi &= (b+a)\sigma + (b-a)\vartheta + C\varpi. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Diese letzteren Formen sind besonders nützlich, indem sie unmittelbar die Relationen zeigen, welchen die Coefficienten in dem im folgenden Paragraphen betrachteten wichtigen Falle genügen müssen.

642. Fall gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen. — Wenn die Platte in allen Richtungen gleich biegsam ist, so muss eine synclastische Reaction eine sphärische Krümmung erzeugen; eine anticlastische Reaction dagegen, welche ein beliebiges Paar in der Platte liegender zu einander senkrechter Linien zu Axen hat, wird eine anticlastische Krümmung erzeugen, welche diese Linien zu Schnitten gleicher Maximalkrümmung auf den entgegengesetzten Seiten der Tangentialebene hat. Bei jeder dieser beiden Wirkungen ist die Grösse der Krümmung einfach der Grösse der

Reaction proportional. Bezeichnen also $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ zwei von der Zusammendrückbarkeit und Starrheit der Substanz, wenn dieselbe isotrop ist (s. unten §§ 677, 680), und von der Dicke der Platte abhängende Coefficienten, so erhalten wir

$$(13) \qquad \Sigma = \mathfrak{h}\sigma, \quad \Theta = \mathfrak{k}\vartheta, \quad \Pi = \mathfrak{k}\varpi,$$

folglich [§ 640 (2)]

$$(14) \qquad w = \mathfrak{h}\sigma^2 + \mathfrak{k}(\vartheta^2 + \varpi^2).$$

Mithin genügen, wenn in allen Richtungen gleiche Biegsamkeit vorhanden ist, die Coefficienten in den allgemeinen Ausdrücken des § 641 den folgenden Bedingungen: —

$$(15) \qquad a = 0, \quad b = 0, \quad A = B, \; 2(A - c) = C,$$

und zwischen ihnen und den zuletzt eingeführten Coefficienten $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ bestehen die Relationen: —

$$(16) \qquad A + c = \mathfrak{h}, \quad {}^1\!/_2\, C = A - c = \mathfrak{k}.$$

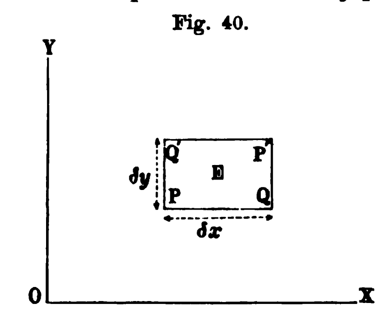
643. Biegung einer Platte durch beliebige Kräfte. — Wir wollen jetzt das Gleichgewicht einer unendlich grossen Platte betrachten, die, von Natur eben, durch irgendwie angreifende, nur den Bedingungen des § 632 unterworfene Kräfte auf eine andere Form gebracht ist. Die Substanz kann, was die Elasticität in verschiedenen Richtungen betrifft, von jeder möglichen Beschaffenheit sein, und die Platte braucht weder hinsichtlich dieser Beschaffenheit, noch hinsichtlich ihrer Dicke in ihren verschiedenen Theilen homogen zu sein, wenn sie nur um jeden Punkt herum innerhalb eines Gebiets, dessen Länge gross ist im Vergleich zur Dicke in jenem Punkte, in beiden Hinsichten annähernd homogen ist [§ 632 (4)].

644. Es seien OX, OY rechtwinklige Coordinatenaxen in der Ebene, welche die Platte anfänglich bildet, und z die unendlich kleine Verschiebung aus dieser Ebene, welche der Plattenpunkt (x, y) unter der Einwirkung beliebiger Kräfte erfährt, deren wirksame Componenten auf folgende Weise bestimmt werden: — Wir betrachten einen Theil E der Platte, der von einer Normalfläche begrenzt ist, welche die Mittelfläche in einer ein unendlich kleines Flächenstück σ in der Nähe des Punktes (x, y) umschliessenden Linie schneidet. Die Summe der senkrecht zu XOY genommenen Componenten der Kräfte, welche auf die ganze in der Nähe des Punktes (x, y) liegende Masse von E wirken, bezeichnen wir mit $Z\sigma$; ferner seien $L\sigma$, $M\sigma$ die Kräftepaarcomponenten um OX und OY, die man erhält, wenn man nach Poinsot die Kräfte aus allen Punkten des für einen Augenblick als starr angesehenen Theils E

in einen Punkt von E versetzt, als welchen man passend den Trägheitsmittelpunkt der Fläche σ des zugehörigen Theils der Mittelfläche annimmt. Diese Kraft und diese Kräftepaare müssen in Verbindung mit den inneren Kräften der Elasticität, welche die umgebende Masse durch die Umgrenzung hindurch auf die Masse von E ausübt, den Bedingungen des Gleichgewichts genügen (§ 564), die man erhält, wenn man E als starren Körper behandelt, und der Theil E, der in Wirklichkeit nicht starr ist, muss die Krümmung annehmen, welche nach § 641 die den letzterwähnten Kräften entsprechende Biegungsreaction hervorruft. Mathematisch ausgedrückt liefern diese Bedingungen fünf Gleichungen, aus denen man durch Elimination der vier die inneren Kräfte bestimmenden Elemente eine einzige partielle Differentialgleichung für z in x und y erhält, welche die gesuchte Gleichung des Gleichgewichts ist.

Gleichungen des Gleichgewichts einer durch irgend welche Kräfte gebogenen Platte. — Es sei σ ein Rechteck $PQP'Q'$, dessen Seiten δx parallel OX und δy parallel OY sind. Ferner seien $\alpha\,\delta y$, $\alpha'\,\delta y$ die nur unendlich wenig von einander verschiedenen zur Platte in den beziehungsweise durch PQ' und QP' gehenden Normalflächen senkrechten Schiebungskräfte; die entsprechenden Grössen für PQ und $P'Q'$ seien β, β'. Dann ist natürlich

Fig. 40.



$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{dx}\,\delta x \text{ und } \beta' - \beta = \frac{d\beta}{dy}\,\delta y.$$

Es hat dies auf den als starr angesehenen Theil E der Platte den Einfluss, dass durch die Mittelpunkte von QP', $Q'P'$ in der Richtung der positiven z die Kräfte $\alpha'\,\delta y$, $\beta'\,\delta x$ und durch die Mittelpunkte von PQ', PQ in der Richtung der negativen z die Kräfte $\alpha\,\delta y$, $\beta\,\delta x$ wirken. Mithin tragen sie zum Gleichgewicht des als starr angesehenen Körpers E

die OZ parallele Kraftcomponente

$$(\alpha' - \alpha)\,\delta y + (\beta' - \beta)\,\delta x \text{ oder } \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right)\delta x\,\delta y,$$

das Kräftepaar $\alpha\,\delta y\,.\,\delta x$ um OY und

„ „ $\beta\,\delta x\,.\,\delta y$ „ OX

bei (in den beiden letzten Ausdrücken ist die Differenz zwischen α und α', sowie zwischen β und β' natürlich vernachlässigt). Drücken weiter K, Λ, Π, nach dem System des § 637, die Biegungsreaction in (x, y) aus, so erhalten wir folgende unendlich wenig von einander verschiedene und entgegengesetzte Kräftepaare, welche auf die Paare entgegengesetzter Seiten wirken, und deren Differenzen, in Componenten um OX und OY

gemessen, das dem Theil E als starren Körper gebliebene Bestreben, sich zu drehen, ausdrücken: —

$$\text{um } OX \begin{cases} \dfrac{d\Delta}{dy}\,\delta y.\delta x \text{ von den Seiten } PQ,\ Q'P' \text{ aus} \\ \dfrac{d\Pi}{dx}\,\delta x.\delta y \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad PQ',\ QP' \quad ,, , \end{cases}$$

$$\text{um } OY \begin{cases} \dfrac{d\Pi}{dy}\,\delta y.\delta x \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad PQ,\ Q'P' \quad ,, \\ \dfrac{dK}{dx}\,\delta x.\delta y \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad PQ',\ QP' \quad ,, , \end{cases}$$

oder im Ganzen

$$\text{um } OX \quad \left(\frac{d\Delta}{dy} + \frac{d\Pi}{dx}\right)\delta x\,\delta y,$$

$$,, \quad OY \quad \left(\frac{d\Pi}{dy} + \frac{dK}{dx}\right)\delta x\,\delta y.$$

Folglich liefern die Gleichungen des Gleichgewichts zwischen diesen und den auf E als starren Körper wirkenden äusseren Kräften, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor $\delta x\,\delta y$ fortlassen,

$$(1) \qquad \begin{cases} Z + \dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy} = 0 \\ L + \beta + \dfrac{d\Delta}{dy} + \dfrac{d\Pi}{dx} = 0 \\ M + \alpha + \dfrac{d\Pi}{dy} + \dfrac{dK}{dx} = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen geht, wenn darin α und β durch ihre aus der zweiten und dritten Gleichung genommenen Werthe ersetzt werden, über in

$$(2) \qquad \frac{d^2K}{dx^2} + 2\,\frac{d^2\Pi}{dx\,dy} + \frac{d^2\Delta}{dy^2} = Z - \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Bezeichnen nun, nach dem System des § 639, $\varkappa$, λ, ϖ die Krümmungscomponenten der Platte, so ist natürlich

$$(3) \qquad \varkappa = \frac{d^2z}{dx^2},\ \lambda = \frac{d^2z}{dy^2},\ \varpi = \frac{d^2z}{dx\,dy};$$

folglich liefern die Gleichungen (10) des § 641

$$(4) \qquad \begin{cases} K = A\,\dfrac{d^2z}{dx^2} + c\,\dfrac{d^2z}{dy^2} + b\,\dfrac{d^2z}{dx\,dy} \\ \Delta = c\,\dfrac{d^2z}{dx^2} + B\,\dfrac{d^2z}{dy^2} + a\,\dfrac{d^2z}{dx\,dy} \\ 2\,\Pi = b\,\dfrac{d^2z}{dx^2} + a\,\dfrac{d^2z}{dy^2} + C\,\dfrac{d^2z}{dx\,dy}. \end{cases}$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (2) erhalten wir die gesuchte Differentialgleichung der deformirten Oberfläche. Wenn keine beschränkende

Voraussetzung gemacht wird (§ 643), so müssen wir A, B, C, a, b, c als gegebene Functionen von x und y ansehen. In dem für die Praxis wichtigen Falle einer homogenen Platte sind diese Grössen Constanten, und die gesuchte Gleichung wird die lineare partielle Differentialgleichung vierter Ordnung mit constanten Coefficienten: —

$$(5)\quad \begin{cases} A\,\dfrac{d^4 z}{dx^4} + 2b\,\dfrac{d^4 z}{dx^3 dy} + (C+2c)\,\dfrac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + 2a\,\dfrac{d^4 z}{dx\,dy^3} + B\,\dfrac{d^4 z}{dy^4} \\ \qquad = Z - \dfrac{dM}{dx} - \dfrac{dL}{dy}. \end{cases}$$

Für den Fall gleicher Biegsamkeit in allen Richtungen geht diese Gleichung nach § 642 (13) über in

$$(6)\quad \begin{cases} A\left(\dfrac{d^4 z}{dx^4} + 2\,\dfrac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \dfrac{d^4 z}{dy^4}\right) = Z - \dfrac{dM}{dx} - \dfrac{dL}{dy} \\ \text{oder } A\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^2}{dy^2}\right)^2 z = Z - \dfrac{dM}{dx} - \dfrac{dL}{dy}. \end{cases}$$

645. Grenzbedingungen. — Um die Grenzbedingungen für eine Platte von endlichen Dimensionen zu ermitteln, können wir dieselbe zunächst als einen Theil einer unendlichen Platte betrachten, welcher von einer Normalfläche begrenzt wird, die durch eine auf der Mittelfläche gezogene geschlossene Curve geht. Die vorhergehende Untersuchung führt uns unmittelbar zu Ausdrücken für die Kraft und das Kräftepaar, die auf irgend einen Theil der umgrenzenden Normalfläche wirken. Wenn dann der in Rede stehende Theil aus der Platte wirklich ausgeschnitten wird, und an seinem Rande Kräfte und Kräftepaare angebracht werden, die mit den erhaltenen identisch sind, so wird sein Elasticitätszustand in allen Punkten bis zum normalen Rande hin absolut unverändert bleiben. Die Erfüllung dieser Bedingung erfordert drei Gleichungen, welche ausdrücken, (1) dass die am Rande angebrachte Schiebungskraft (d. i. die Tangentialkraft in der den Rand bildenden Normalfläche), welche nothwendigerweise die Richtung der Normallinie an die Platte hat, von der erforderlichen Grösse sei, und (2. und 3.) dass die um zwei beliebige Linien in der Ebene der Platte genommenen Componenten des auf jeden kleinen Theil des Randes wirkenden Kräftepaars von der erforderlichen Grösse seien. Diese drei Gleichungen wurden von Poisson als für den vollständigen Ausdruck der Grenzbedingungen nothwendig gegeben. Kirchhoff hat aber gezeigt, dass sie zu viel ausdrücken, und dass zwei Gleichungen genügen. Wir werden dies dadurch beweisen, dass wir Folgendes zeigen: Wenn eine Platte von endlicher Grösse in einem beliebigen Reactionszustande oder frei von Reaction gege-

ben ist, so können wir auf dieselbe um Axen, die überall zu ihrer normalen Randfläche senkrecht sind, beliebig vertheilte Kräftepaare wirken lassen, ohne dass die Platte, ausser in unendlich kleinen Abständen vom Rande, eine Aenderung erlitte, vorausgesetzt dass zugleich senkrecht zur Platte in bestimmter Weise vertheilte Kräfte auf den Rand wirken, deren Grösse und Vertheilung sich aus der Vertheilung der Kräftepaare berechnen lassen.

Es sei $XY = \delta s$ ein in einem Punkte (x, y) liegendes unendlich kleines Element einer auf der Mittelfläche einer unendlichen Platte gezogenen Curve. Ferner seien PX und PY beziehungsweise parallel der x und der y Axe und $\measuredangle\, YXP = \varphi$. Bezeichnet dann $\zeta\, \delta s$ die Schiebungskraft in der durch δs gehenden Normalfläche der Platte, und sind, wie oben (§ 644), $\alpha\,.\,PY$ und $\beta\,.\,PX$ die Schiebungskräfte in den Normalflächen durch PY und PX, so muss, wenn das als starr vorausgesetzte Dreieck YPX im Gleichgewicht sein soll (§ 564),

Fig. 41.

$$\zeta\, \delta s = \alpha\,.\,PY + \beta\,.\,PX, \text{ folglich } \zeta = \alpha \sin\varphi + \beta \cos\varphi$$

sein. Substituiren wir für α und β ihre Werthe aus § 644 (1), so erhalten wir

$$(1)\qquad \zeta = -\left(M + \frac{d\Pi}{dy} + \frac{dK}{dx}\right) \sin\varphi - \left(L + \frac{d\Lambda}{dy} + \frac{d\Pi}{dx}\right) \cos\varphi.$$

Bezeichnen weiter $G\,\delta s$ und $H\,\delta s$ die um XY und um eine zu XY senkrechte in der Ebene der Platte liegende Axe genommenen Componenten des Kräftepaars, welches durch die δs enthaltende Normalfläche wirkt, so folgt [§ 637 (2)]

$$(2)\qquad G = \Lambda \cos^2\varphi + 2\,\Pi \sin\varphi \cos\varphi + K \sin^2\varphi,$$

$$(3)\qquad H = (K - \Lambda) \sin\varphi \cos\varphi + \Pi\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Wenn man hier unter (ζ, G, H) die Einwirkungen entsprechender äusserer Kräfte auf den Rand verstände, nachdem die Platte bis auf den von einer geschlossenen Curve, von welcher δs ein Element ist, umgrenzten Theil entfernt wäre, so würden diese drei Gleichungen dasselbe ausdrücken wie die Gleichungen, durch welche Poisson die Grenzbedingungen darstellt. Endlich mögen $\mathfrak{Z}\,\delta s$, $\mathfrak{G}\,\delta s$, $\mathfrak{H}\,\delta s$ die zur Platte senkrechte Kraft und die Componenten des Kräftepaars bezeichnen, welches man in irgend einem Punkte (x, y) eines freien Randes auf die Länge δs der Mittelcurve wirklich einwirken lässt. Wie wir alsbald (§ 648) sehen werden, wird dann, wenn

$$(4)\qquad \mathfrak{Z} - \zeta + \frac{d(\mathfrak{H} - H)}{ds} = 0$$

ist, die Platte überall, ausser in den dem Rande unendlich nahe liegenden Theilen, in demselben Reactionszustande sein, als wenn (ζ, G, H) die Wirkung auf den Rand ist. Wenn wir also ζ und H aus diesen vier Glei-

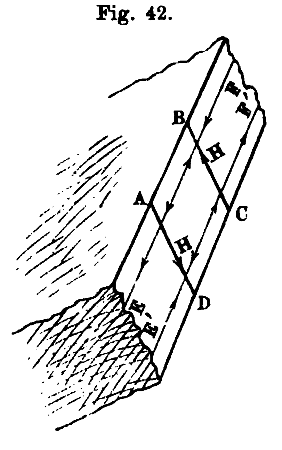
chungen eliminiren, so bleiben uns zwei Gleichungen [die Gleichung (2) unverändert und eine neue Gleichung], nämlich

$$
(5)\quad \begin{cases} G = \varDelta \cos^2\varphi + 2\,\varPi \sin\varphi \cos\varphi + K \sin^2\varphi \\ \mathfrak{Z} + \dfrac{d\mathfrak{H}}{ds} = -\left(M + \dfrac{d\varPi}{dy} + \dfrac{dK}{dx}\right)\sin\varphi - \left(L + \dfrac{d\varDelta}{dy} + \dfrac{d\varPi}{dx}\right)\cos\varphi \\ \qquad + \dfrac{d}{ds}\left[(K - \varDelta)\sin\varphi\cos\varphi + \varPi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right], \end{cases}
$$

und dies sind Kirchhoff's Grenzgleichungen.

646. Vertheilung von Schiebungskräften, welche dieselbe Biegung erzeugen wie eine gegebene Vertheilung von Kräftepaaren, deren Axen zur Umgrenzung senkrecht sind. — Der am Ende des letzten Paragraphen ausgesprochene Satz ist mit dem folgenden äquivalent: — Es lässt sich eine gewisse Vertheilung normaler Schiebungskräfte auf den Rand einer endlichen Platte bestimmen, welche dieselbe Wirkung erzeugt, wie eine beliebig gegebene Vertheilung von Kräftepaaren um Axen, die überall zu der den Rand bildenden Normalfläche senkrecht sind. Dies zu beweisen, wollen wir annehmen, dass in entgegengesetzten Richtungen zu beiden Seiten der Mittellinie und parallel zu derselben in den Linien EF, $E'F'$ gleiche Kräfte wirken, welche die vorausgesetzte Kräftepaarvertheilung ausmachen. Dabei ist festzuhalten, dass die Kräfte längs ihrer Wirkungslinien wirklich vertheilt und nicht, wie in der abstracten Dynamik idealer starrer Körper, in beliebigen, gleichgiltig welchen, Punkten dieser Linien angebracht sind; die für die Einheit der Länge genommene Grösse der Kraft ist in den benachbarten Theilen der beiden Linien zwar dieselbe, muss jedoch den Rand entlang sich von Punkt zu Punkt ändern, damit die Kräftepaarvertheilung nicht gleichförmig sei. Endlich können wir voraussetzen, dass die in den entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte nicht, wie es Fig. 42 zeigt, auf zwei Linien beschränkt, sondern über die beiden Hälften des Randes zu beiden Seiten seiner Mittellinie verbreitet sind. Weiter muss, wie in § 634 (3) angegeben ist, die Grösse dieser Kräfte in gleichen unendlich kleinen Brei-

Fig. 42.



ten für verschiedene Abstände von der Mittellinie diesen Abständen proportional sein, wenn die gegebene Kräftepaarvertheilung mit der in § 645 mit H bezeichneten vollständig übereinstimmen soll.

Wir denken uns jetzt Linien quer durch den Rand gezogen, welche auf seinen Grenzlinien senkrecht stehen; dadurch werde der ganze Rand in unendlich kleine Rechtecke zertheilt; eins derselben sei $ABCD$ (Fig. 42). In einem dieser Rechtecke bringen wir ein System von Kräftepaaren an, die einander das Gleichgewicht halten; das System bestehe aus passend vertheilten Kräftepaaren, welche dem der Fläche des Rechtecks zugehörigen Theil der gegebenen Kräftepaarvertheilung gleich und entgegengesetzt sind, und einem Paar einzelner Kräfte in den Linien AD, CB, die gleiche und entgegengesetzte Momente haben. Dieses System kann offenbar keine merkliche Störung (Reaction oder Deformation) in der Platte verursachen, ausser innerhalb eines mit den Seiten des Rechtecks vergleichbaren Abstandes. Wenn also in allen Rechtecken, in die man den Rand zertheilt hat, dasselbe geschehen ist, so wird die Platte nur ringsherum nach innen zu bis zu einem unendlich kleinen Abstande vom Rande hin gestört. Auf diese Weise ist aber die gegebene Kräftepaarvertheilung entfernt (da ihr durch ein System passend vertheilter Kräfte direct das Gleichgewicht gehalten wird, welche überall den Kräften, aus denen sie besteht, gleich und entgegengesetzt sind), und es bleibt nur die Reihe der in den Querlinien angebrachten Kräfte. In jeder Querlinie wirken zwei dieser Kräfte, die aus den in den beiden Rechtecken, für welche diese Linie eine gemeinschaftliche Seite ist, ausgeführten Operationen herrühren, und nur die Differenz beider Kräfte bleibt wirksam. Wir sehen somit, dass die gegebene Kräftepaarvertheilung, wenn sie den Rand entlang gleichförmig ist, entfernt werden kann, ohne dass der Zustand der Platte, ausser in dem dem Rande unendlich nahe liegenden Theile, gestört würde. Mit anderen Worten: —

647. Gleichförmig vertheilte Torsionskräftepaare erzeugen keine Biegung. — Eine gleichförmige Vertheilung von Kräftepaaren längs des ganzen Randes einer endlichen Platte, überall um Axen in der Ebene der Platte und senkrecht zum Rande, erzeugt keine Verzerrung oder Reaction der Platte im Ganzen, sondern eine Verzerrung, die sich ringsherum vom Rand aus nach innen zu nur auf unendlich kleine Entfernungen erstreckt. Die Wahrheit dieses bemerkenswerthen Satzes erhellt auch, wenn wir erwägen,

dass das Streben einer solchen Kräftepaarvertheilung nur darin bestehen kann, die beiden Grenzlinien des Randes unendlich wenig in entgegengesetzten Richtungen um die Fläche der Platte zu ziehen. Später werden wir die dadurch in der Nähe des Randes erzeugte Deformation genau bestimmen und finden, dass dieselbe vom Rande aus einwärts äusserst rasch abnimmt und in Abständen, welche grösser als die doppelte Dicke der Platte sind, praktisch unmerklich wird.

648. Vertheilung der Schiebungskräfte, welche dieselbe Biegung wie Torsionskräftepaare erzeugen. — Es seien auf dem Rande einer Platte um Axen, die überall in der Ebene der Platte und senkrecht zum Rande sind, Kräftepaare vertheilt, welche für die Einheit der Länge des Randes eine beliebig gegebene Grösse haben. Dann wird die Biegung der Platte im Ganzen unverändert bleiben und, ausser in den dem Rande unendlich naheliegenden Theilen, auch keine Störung der Reaction oder der Deformation erzeugt werden, wenn man die Kräftepaare entfernt und statt eines jeden eine zur Platte senkrechte Kraft anbringt, deren Grösse, genommen für die Einheit der Länge des Randes, gleich ist der für dieselbe Einheit genommenen Grösse der Aenderung des entsprechenden Kräftepaars.

In Fig. 42 (§ 646) sei $AB = \delta s$. Ist dann H die für die Längeneinheit des Randes genommene Grösse des zwischen AB und BC gegebenen Kräftepaars, so ist der Betrag desselben für das Rechteck $ABCD$ gleich $H\delta s$; folglich muss H die Grösse der längs AD, CB eingeführten Kräfte sein, damit dieselben ein Kräftepaar von dem geforderten Moment ausmachen. Bezeichnet in ähnlicher Weise $H'\delta s$ die Grösse des Kräftepaars in dem auf der anderen Seite von BC liegenden anstossenden Rechteck, so wird H' die aus demselben herrührende Kraft sein, welche in BC und H entgegengesetzt wirkt. Es bleibt also in BC nur eine der Differenz $H' - H$ gleiche Kraft wirksam.

Wenn wir voraussetzen, dass s (eine längs des Randes von einem beliebigen Nullpunkte aus gemessene Grösse) in der Richtung von A nach B wächst, so erhalten wir

$$H' - H = \frac{dH}{ds}\,\delta s.$$

Es bleiben uns also einzelne Kräfte übrig, die gleich $\frac{dH}{ds}\delta s$ sind, und deren Richtungen senkrecht quer durch den Rand gehen; jede ist von der folgenden um die Strecke δs entfernt. Diese Kräfte können wir ohne eine Störung (ausgenommen in unendlicher Nähe des Randes)

hervorzubringen, durch continuirlich vertheilte Querkräfte ersetzen, welche für die Längeneinheit $\frac{dH}{ds}$ betragen. Damit ist unser Satz bewiesen. Wenn $\frac{dH}{ds}$ positiv ist, so wirken diese Kräfte in der Richtung der negativen z; daraus ergibt sich unmittelbar die in § 645 (4) ausgedrückte Form des Satzes.

649. Kreisförmige Deformation. — Als erstes Beispiel der Anwendung dieser Gleichungen wollen wir den einfachen Fall einer gleichförmigen Platte von endlicher oder unendlicher Ausdehnung betrachten, auf welche eine in concentrischen Kreisen symmetrisch vertheilte Last und, wenn es nöthig ist, am Rande passend angebrachte Kräfte symmetrisch einwirken.

Es sei der symmetrische Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten gewählt, und ein beliebiger Punkt P habe die Polar-Coordinaten r, ϑ, so dass

$$x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta$$

ist. Das zweite Glied der Formel (6) des § 644 wird eine Function von r sein, die wir jetzt der Kürze wegen einfach durch Z bezeichnen wollen (es ist dies die Grösse der Last für die Einheit der Fläche, wenn die auf jeden kleinen Theil wirkenden Kräfte sich auf eine einzige durch irgend einen Punkt dieses Theils gehende Normalkraft reduciren lassen). Da jetzt z eine Function von r und, wenn u eine beliebige Function von r bezeichnet, wie wir früher [§ 491 (e)] gesehen haben,

$$\Delta^2 u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

ist, so geht die Gleichung (6) des § 644 über in

$$\frac{A}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dz}{dr}\right)\right]\right\} = Z. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} z = \frac{1}{A}\int\frac{dr}{r}\int r\,dr\int\frac{dr}{r}\int r\,Z\,dr \\ \quad + \frac{1}{4}C(\log r - 1)\,r^2 + \frac{1}{4}C' r^2 + C''\log r + C'''; \end{cases} \tag{2}$$

dies ist das vollständige Integral mit den vier willkürlichen Constanten. Die folgenden Ausdrücke, die aus Zwischenintegralen hergeleitet sind, verdienen schon jetzt unsere Beachtung, insofern sie für das vollständige Verständniss der Lösung förderlich sind; zudem werden wir uns später einiger derselben bedienen, um die Grenzbedingungen auszudrücken. Die in (7) gebrauchte Bezeichnung wird in § 650 erklärt werden: — Es ist

(3) (Die Inclination, dividirt durch den Radius; oder die Krümmung in einem zum Radius senkrechten Normalschnitt)

$$\frac{1}{r}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{Ar^2}\int r\,dr\int\frac{dr}{r}\int r\,Z\,dr + \frac{1}{2}C\left(\log r - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}C' + \frac{C''}{r^2}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \text{(Die Krümmung in einem den Radius enthaltenden Schnitt)} \\ \dfrac{d^2 z}{d r^2} = -\dfrac{1}{A r^2}\int r\, dr \int \dfrac{dr}{r}\int r\, Z\, dr + \dfrac{1}{A}\int\dfrac{dr}{r}\int r\, Z\, dr \\ \quad + \tfrac{1}{2}\, C\, (\log r + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\, C' - \dfrac{C''}{r^2}. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \text{(Die Summe der Krümmungen in zu einander} \\ \qquad \text{senkrechten Schnitten)} \\ \nabla^2 z = \dfrac{1}{A}\int\dfrac{dr}{r}\int r\, Z\, dr + C \log r + C'. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} A\,\dfrac{d^2 z}{d r^2} + c\,\dfrac{dz}{r\, dr} = G \\ = -\dfrac{A-c}{A r^2}\int r\, d\int\dfrac{dr}{r}\int r\, Z\, dr + \int\dfrac{dr}{r}\int r\, Z\, dr \\ \quad + \tfrac{1}{2}\, C\, \{(A+c)\log r + \tfrac{1}{2}(A-c)\} \\ \quad + \tfrac{1}{2}\, C'\, (A+c) - C''\, (A-c)\,\dfrac{1}{r^2}, \\ H = 0. \end{cases}$$

$$(7)\quad L = c\,\frac{d^2 z}{d r^2} + A\,\frac{dz}{r\, dr}.$$

$$(8)\quad \begin{cases} (A-c)\,\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{dz}{dr}\right) + \dfrac{dG}{dr} = A\,\dfrac{d}{dr}\,\nabla^2 z = -\zeta \\ \qquad = \dfrac{1}{r}\int r\, Z\, dr + C\,\dfrac{A}{r}. \end{cases}$$

Die Formeln (6) und (8) drücken der Bezeichnung des § 645 gemäss das Kräftepaar und die Schiebungskraft aus, welche auf die Normalfläche wirken, die die Mittelfläche der Platte im Kreise vom Radius r schneidet. Sie lassen sich analytisch aus unserer Lösung (2) herleiten vermittels der Formeln (2), (3) und (1) des § 645, wenn man § 644 (4) und § 642 (15) zu Hülfe nimmt. Die Arbeit wird natürlich bedeutend abgekürzt, wenn man $y = 0$ und $x = r$ annimmt und die Formeln (3) und (4) des vorliegenden Paragraphen benutzt. Der Leser mag diese Rechnung, mit der angegebenen Abkürzung oder ohne dieselbe, zu seiner Uebung ausführen. Es ist aber lehrreicher, das Gleichgewicht einer in concentrischen Kreisen symmetrisch deformirten Platte direct und ohne Benutzung bereits erhaltener Formeln zu bestimmen und so in der Darlegung eines unabhängigen Beweises der Formel (6) des § 644 für diesen Fall, oder der Formel (1) des § 649 Ausdrücke für die Biegungs- und Schiebungsreactionen zu finden.

650. Directe Bestimmung der kreisförmigen Deformation. — Es ist klar, dass in jedem Theil der Platte die Normalschnitte (§ 637) der grössten und kleinsten, oder der kleinsten und grössten Biegungskräftepaare diejenigen sind, welche durch den vom symmetrischen Mittelpunkt O aus gezogenen Radius und senkrecht zu demselben gehen. Es seien in dem Abstande r von O in

dem durch den Radius gehenden Schnitte und in dem zum Radius senkrechten Schnitte beziehungsweise die Kräftepaare L und G thätig, so dass, wenn λ und $\varkappa$ die Krümmungen in diesen Schnitten sind, nach § 641 (10) und § 642 (15)

$$(9) \qquad \begin{cases} L = A\lambda + c\varkappa \\ G = c\lambda + A\varkappa \end{cases}$$

ist. Ferner sei ζ die Schiebungskraft (§ 616, Anmerkung) in dem kreisförmigen Normalschnitt vom Radius r. Die Symmetrie erfordert, dass in radial gerichteten Normalschnitten keine Schiebungskräfte vorhanden seien.

Betrachten wir jetzt ein Element E, welches von zwei Radien, die einen unendlich kleinen Winkel $\delta\vartheta$ mit einander bilden, und von zwei concentrischen Kreisen, deren Radien $r - \frac{1}{2}\delta r$ und $r + \frac{1}{2}\delta r$ sind, begrenzt wird, so sehen wir, dass die gleichen Kräftepaare $L\delta r$, welche auf seine radialen Normalschnitte um Axen wirken, deren Richtungen entgegengesetzt und um den unendlich kleinen Winkel $\delta\vartheta$ verschieden sind, eine Resultante von der Grösse $L\delta r\delta\vartheta$ um eine Axe haben, welche senkrecht zum mittleren Radius und im Falle eines positiven L nach der negativen Seite zu gerichtet ist. Ferner haben die an Grösse nur unendlich wenig verschiedenen Kräftepaare, welche auf den äusseren und den inneren kreisförmigen Rand von E wirken, eine um dieselbe Axe drehende Resultante von der Grösse $\frac{d\,(Gr\delta\vartheta)}{dr}\delta r$; es ist dies die Differenz der Werthe, welche $Gr\delta\vartheta$ annimmt, wenn man $r - \frac{1}{2}\delta r$ und $r + \frac{1}{2}\delta r$ für r setzt. Endlich haben wir noch das Kräftepaar der auf den äusseren und den inneren Rand wirkenden Schiebungskräfte, von denen jede nur unendlich wenig von $\zeta r\delta\vartheta$ verschieden ist; das Moment dieses Kräftepaars ist $\zeta r\delta\vartheta\delta r$. Wenn also E unter der Einwirkung dieser Kräftepaare im Gleichgewicht sein soll, so muss

$$-L\delta r\delta\vartheta + \frac{d(Gr)}{dr}\delta r\delta\vartheta + \zeta r\delta r\delta\vartheta = 0,$$

oder

$$(10) \qquad -L + \frac{d(Gr)}{dr} + \zeta r = 0$$

sein, wenn wir voraussetzen, was wir jetzt zweckmässig thun dürfen, dass auf keinen Theil der Platte, ihre Ränder ausgenommen, Kräftepaare von aussen einwirken. Betrachten wir weiter die auf

E wirkenden Normalkräfte, so erhalten wir $\frac{d(\zeta r \delta \vartheta)}{dr} \delta r$ für die Summe derjenigen, welche von den anstossenden Theilen der Platte ausgeübt werden, und $Z r \delta \vartheta \delta r$ für diejenigen, welche von anderen Körpern herrührt, wenn Z wie früher die für die Einheit der Fläche der Platte genommene Grösse der von aussen einwirkenden Normalkraft bezeichnet. Das Gleichgewicht dieser Kräfte fordert also

$$(11) \qquad \frac{d(\zeta r)}{dr} + Zr = 0.$$

Substituirt man in (11) für ζ den aus (10) sich ergebenden Werth, in dem Resultat die Ausdrücke (9) von L und G und in dem letzterhaltenen Resultat die Ausdrücke, welche die Differentialrechnung für λ und $\varkappa$ liefert (es sind dies $\frac{dz}{r\,dr}$ und $\frac{d^2z}{dr^2}$, da die Platte eine Rotationsfläche ist, welche sich unendlich wenig von einer zur Axe senkrechten Ebene unterscheidet), so gelangen wir schliesslich zur Differentialgleichung (1) des Problems. Was die übrigen Formeln des § 649 betrifft, so ergeben sich (6), (7), (8) unmittelbar aus den Formeln (9) und (10), die wir jetzt bewiesen haben. $H = 0$ folgt aus der Thatsache, dass die radialen und kreisförmigen Normalschnitte die Schnitte grösster und kleinster oder kleinster und grösster Krümmung sind.

651. Bedeutung der einzelnen Theile des Integrals. — Wir sind jetzt im Stande, die Bedeutung jeder der vier willkürlichen Constanten zu erkennen.

(1) C''' ist natürlich bloss eine Verschiebung der Platte, die von keiner Deformation begleitet ist.

(2) $C'' \log r$ ist eine Verschiebung, welche überall eine anticlastische Krümmung erzeugt, und zwar sind die Krümmungen in den beiden Hauptschnitten $\pm \frac{C''}{r^2}$; dem entsprechend sind die Biegungskräftepaare L und G gleich $\pm (A - c) \frac{C''}{r^2}$. Diese Einwirkung würde eine unendliche ebene Platte mit kreisförmiger Oeffnung erfahren, auf deren Rand gleichmässig Biegungskräftepaare vertheilt wären, welche in jedem Punkte um die Tangente als Axe drehten. Wir erkennen dies aus der Thatsache, dass die von C'' hervorgerufene elastische Reaction in der Platte nach dem umgekehrten Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte ihrer Symmetrie

abnimmt. Es ist beachtenswerth, dass, obgleich der absolute Werth $C'' \log r$ der Deflexion für unendliche Werthe von r unendlich ist, die einschränkende Bedingung (3) des § 632 doch nicht verletzt wird, vorausgesetzt dass C'' im Vergleich zur Dicke unendlich klein ist. Auch lässt sich ohne Mühe beweisen, dass das Gesetz (1) des § 633 in der That durch diese Deflexion erfüllt wird, sogar wenn die ganze Verschiebung genau diesen Werth $C'' \log r$ und eine zur Ebene in ihrem ungestörten Zustande genau senkrechte Richtung hat. Für diesen Fall ist $\zeta = 0$, oder es findet keine Schiebung statt.

(3) $\frac{1}{4} C' r^2$ ist eine Verschiebung, die einer sphärischen Krümmung entspricht und daher einfach eine gleichmässige synclastische Reaction [§ 638 (2)] erzeugt, deren Grösse natürlich [§ 641 (10) oder (11)] gleich $A + c$, dividirt durch den Krümmungsradius, oder gleich $(A + c) \times \frac{1}{2} C'$ ist und mit den gleichen Werthen übereinstimmt, welche die Formeln (6) und (7) des § 649 für L und G geben. Auch in diesem Falle ist $\zeta = 0$, oder es ist keine Schiebungskraft vorhanden. Eine endliche Platte von irgend welcher Form, auf deren ganzen Rand ein gleichmässiges Biegungskräftepaar wirkt, wird auf diese Weise sphärisch gebogen.

(4) $\frac{1}{4} C (\log r - 1) r^2$ ist eine Deflexion in dem Kreise, der vom symmetrischen Mittelpunkt den Abstand r hat, welche eine Schiebungskraft von der Grösse $-A \frac{C}{r}$ und ein Biegungskräftepaar

$$\frac{1}{2} C\{(A + c) \log r + \frac{1}{2} (A - c)\}$$

hervorruft.

652. Biegung eines flachen Ringes, an dessen Rändern symmetrisch vertheilte Kräfte angreifen. — Es ist jetzt nur noch eine einfach algebraische Aufgabe, die Biegung eines flachen Ringes oder eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Theils einer ebenen Platte zu ermitteln, auf welchen beliebig gegebene Biegungskräftepaare und Querkräfte wirken, die auf seinen äusseren und inneren Rand gleichmässig vertheilt sind. Damit Gleichgewicht stattfinde, müssen die Kräfte auf dem äusseren und dem inneren Rande entgegengesetzte Richtungen und gleiche Grössen haben. Wir haben also drei willkürliche Daten: Die Grössen des auf jedem Rande angebrachten Kräftepaars, genommen für die Einheit der Länge, und den Gesammtbetrag F der auf jeden Rand wirkenden Kraft. Aus § 651 (4) oder § 649 (8) sehen wir, dass

$$(12) \qquad -C = \frac{F}{2\pi A}$$

ist; es bleiben also nur die beiden Constanten C' und C'' unbekannt, und diese bestimmen sich aus den beiden Gleichungen, die man erhält, wenn man den Ausdruck von G [§ 649 (6)] gleich den Werthen setzt, die beziehungsweise für die Werthe, welche r im äusseren und inneren Rande hat, gegeben sind.

Beispiel. — Ein kreisförmiger Tisch (von isotropischem Material) mit einer concentrischen kreisförmigen Oeffnung wird von seinem äusseren Rande getragen, der einfach auf einem horizontalen Kreise ruht; über seinen inneren Rand ist eine Last gleichmässig vertheilt. [Die Aufgabe bleibt im Wesentlichen dieselbe, wenn man den inneren und den äusseren Rand gegen einander vertauscht.] Man soll die von dieser Last bewirkte Deflexion bestimmen (dieselbe wird natürlich zu der unten bestimmten, aus dem Gewicht herrührenden Deflexion einfach addirt). Hier muss G an jedem Rande verschwinden.

Sind a und a' die Radien des inneren und des äusseren Randes, so haben wir

$$\tfrac{1}{2} C \{(A+c) \log a + \tfrac{1}{2}(A-c)\} + \tfrac{1}{2} C'(A+c) - C''(A-c)\frac{1}{a^2} = 0$$

und eine zweite Gleichung, die aus der letzten entsteht, wenn man a' statt a schreibt. Folglich ist

$$C''(A-c)\left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2}\right) = -\tfrac{1}{2} C (A+c) \log \frac{a}{a'}$$

und

$$\tfrac{1}{2} C'(A+c)(a^2 - a'^2) = -\tfrac{1}{2} C [(A+c)(a^2 \log a - a'^2 \log a') + \tfrac{1}{2}(A-c)(a^2 - a'^2)];$$

wenn wir für C den Werth (12) benutzen, so erhalten wir auf diese Weise [§ 649 (2)]

$$z = \frac{F}{2\pi A}\left[\tfrac{1}{4}\left(-\log r + 1 + \frac{a^2 \log a - a'^2 \log a'}{a^2 - a'^2} + \tfrac{1}{2}\frac{A-c}{A+c}\right) r^2 + \tfrac{1}{2}\frac{A+c}{A-c}\,\frac{a^2 a'^2 \log \frac{a}{a'}}{a^2 - a'^2} \log r + C'''\right].$$

Wenn wir den Factor von r^2 auf eine passendere Form bringen und C''' so wählen, dass die Deflexion von der Fläche des inneren Randes aus gerechnet werde, so folgt endlich

$$(13) \begin{cases} z = \dfrac{F}{2\pi A}\left\{\tfrac{1}{4}\left(-\log\dfrac{r}{a'} + \dfrac{a^2}{a^2 - a'^2}\log\dfrac{a}{a'} + \tfrac{1}{2}\dfrac{3A+c}{A+c}\right) r^2 \right. \\ \left. + \tfrac{1}{2}\dfrac{A+c}{A-c}\,\dfrac{a^2 a'^2 \log\frac{a}{a'}}{a^2 - a'^2}\log\dfrac{r}{a'} - \tfrac{1}{4}\dfrac{a^2 a'^2}{a^2 - a'^2}\log\dfrac{a}{a'} - \tfrac{1}{8}\dfrac{3A+c}{A+c} a'^2\right\}. \end{cases}$$

Um zu zeigen, wie sich die elastische Reaction durch die Breite des Ringes vertheilt, schliessen wir hieraus nach § 649 (6)

$$(14)\quad G = \frac{F}{2\pi A}\cdot {}^1/_2(A+c)\left(\frac{a^2}{a^2-a'^2}\log\frac{a}{a'} - \log\frac{r}{a'} - \frac{a^2a'^2}{a^2-a'^2}\log\frac{a}{a'}\frac{1}{r^2}\right),$$

welcher Ausdruck, wie es der Fall sein muss, für $r = a'$ und für $r = a$ verschwindet. Weiter ergibt sich nach § 649 (8)

$$(15)\qquad \zeta = \frac{F}{2\pi r}$$

(dies liefert das offenbar richtige Resultat, dass die Gesammtgrösse der Querkraft in jedem concentrischen Kreise des Ringes gleich F ist).

653. Biegung eines flachen Ringes, auf dessen ganze Fläche eine Last symmetrisch vertheilt ist. — Die Aufgabe des § 652, ausgedehnt auf den Fall, in welchem die Last nicht auf einen Rand beschränkt, sondern auf irgend eine symmetrische Weise über die Oberfläche des Ringes vertheilt ist, wird algebraisch ganz ebenso gelöst, wenn die von Z abhängigen und in den verschiedenen Ausdrücken des § 649 dargestellten Grössen durch Integration gefunden sind. Wir haben aber eine wichtige Bemerkung zu machen: In Fällen, in denen es mehr als einer continuirlichen algebraischen oder transcendenten Function bedürfte, um die Vertheilung der Last über den ganzen Theil der betrachteten Platte auszudrücken, wird viel unnütze Arbeit dadurch vermieden, dass man in diesen Integrationen Z als eine discontinuirliche Function behandelt. Wenn man diesen Plan nicht befolgt, so hat man die Ausdrücke für z, $\frac{dz}{dr}$, G und ζ für jeden ringförmigen Theil der Platte, für welchen Z continuirlich ist, einzeln herzuleiten und ihre Werthe zu beiden Seiten jedes Kreises, der zwei solche Theile trennt, gleich zu setzen. Wären also i ringförmige Theile vorhanden, die in dieser Weise einzeln behandelt werden müssten, so würden $4i$ willkürliche Constanten auftreten, welche man durch die $4(i-1)$ so erhaltenen Gleichungen und die 4 Gleichungen zu bestimmen hätte, welche ausdrücken, dass G in dem äusseren und dem inneren kreisförmigen Rand die für die einwirkenden Biegungskräftepaare vorgeschriebenen Werthe (die Null oder von Null verschieden sind) hat, und dass jeder der Grössen z, ζ in dem einen oder anderen dieser Kreise ein vorgeschriebener Werth zukommt. Die bei Anwendung der oben erwähnten geschickteren Methode in Folge der Discontinuität von Z erforderliche Mehrarbeit beschränkt sich auf die successiven Integrationen, wobei die willkürlichen Constanten,

deren es jetzt nur vier gibt, durch die Bedingungen für die beiden äussersten Ränder bestimmt werden.

Beispiel. — Ein kreisrunder Tisch (von isotropischem Material) mit einer kreisrunden concentrischen Oeffnung wird von seinem äusseren oder inneren Rande getragen, welcher einfach auf einer horizontalen kreisförmigen Stütze ruht, und ist mit einer gleichförmig über einen ringförmigen Theil seiner Oberfläche vertheilten Masse belastet; dieser Ring erstreckt sich von dem inneren Rande des Tisches nach aussen zu bis zu einem concentrischen Kreise von einem gegebenen Radius c. Man soll die Biegung bestimmen.

Wir nehmen erstens an, die Oeffnung des Tisches sei ausgefüllt, und derselbe bilde eine vom äusseren Rande bis zum Centrum gleichförmige Platte. Wird dann der ganze Kreis vom Radius c belastet, so dass auf die Einheit seiner Fläche eine constante Last w kommt, so erhalten wir

	$Z =$	$\int r\,Z dr =$	$\int \frac{dr}{r}\int r\,Z dr =$	$\int r\,dr \int \frac{dr}{r}\int r\,Z dr =$	$\int \frac{dr}{r}\int r\,dr \int \frac{dr}{r}\int r\,Z dr$
wenn $r = 0$	w	0	0	0	0
„ $< c$	w	$\frac{1}{2} w r^2$	$\frac{1}{4} w r^2$	$\frac{1}{16} w r^4$	$\frac{1}{64} w r^4$
„ $> c$	0	$\frac{1}{2} w c^2$	$\frac{w c^2}{4}\left(2 \log \frac{r}{c} + 1\right)$	$\frac{w c^2}{16}\left(4 r^2 \log \frac{r}{c} + c^2\right)$	$\frac{w c^2}{16}\left(2 r^2 \log \frac{r}{c} - r^2 + c^2 \log \frac{r}{c} +\right.$
	I.	II.	III.	IV.	V.

Das Resultat V., in (2) eingesetzt, gibt die allgemeine Lösung, und die Resultate IV., III. und II., in (6) und (8) eingesetzt, liefern die entsprechenden Ausdrücke für G und ζ. Wenn wir zunächst voraussetzen, der so erhaltene Ausdruck von G habe für jeden der beiden Werthe r', r'' von r einen beliebig gegebenen Werth, und ζ habe für einen dieser Werthe von r einen beliebig gegebenen Werth, so erhalten wir drei einfache algebraische Gleichungen zur Bestimmung von C, C', C'' und lösen ein Problem, welches allgemeiner als das vorgelegte ist; zu letzterem gelangen wir, wenn wir die vorgeschriebenen Werthe von G und ζ Null machen. Ein auffallendes Beispiel für die Macht, welche die mathematische Analysis durch Einführung discontinuirlicher Functionen erlangt, ist die Anwendbarkeit des Resultats nicht bloss auf den betrachteten Fall, in welchem c zwischen r' und r'' liegt, sondern auch auf Fälle, in denen c kleiner als jede dieser Grössen (dann kommen wir wieder zu dem im vorhergehenden Paragraphen behandelten Fall), oder grösser als jede derselben ist (dann erhalten wir eine Lösung, die wir directer finden können, wenn wir für alle Werthe von r $Z = w$ annehmen).

Wenn die Platte in Wirklichkeit bis zu ihrem Mittelpunkt continuirlich und in der ganzen Fläche des Kreises vom Radius c gleichmässig

belastet ist, so muss $C = 0$ und $C'' = 0$ sein, damit die Werthe von ζ und G im Mittelpunkt nicht unendlich gross werden; die Gleichung $G = 0$ für die äussere Grenze der Scheibe liefert dann sofort C' und vervollständigt dadurch die Lösung. Wenn wir endlich voraussetzen, c sei nicht kleiner als der Radius der Scheibe, so erhalten wir die Lösung für eine gleichförmige Kreisscheibe, welche an ihrem Rande gleichmässig unterstützt und nur durch ihr eigenes Gewicht deformirt wird.

654. Reduction des allgemeinen Problems auf den Fall, in welchem die Platte ganz unbelastet ist. — Betrachten wir jetzt das allgemeine Problem: — Ueber eine Platte von beliebiger Form ist in irgend einer Weise eine Last vertheilt, und am Rande sind beliebige Kräfte angebracht. Dabei ist natürlich die Bedingung erfüllt, dass alle von aussen einwirkenden Kräfte, wenn die Data sich nur auf solche beziehen, ein System ausmachen, das sich im Gleichgewicht befindet. Man soll die Biegung der Platte bestimmen — so können wir dasselbe unmittelbar auf das einfachere Problem reduciren, in welchem keine Last über die Fläche vertheilt ist, sondern nur am Rande beliebige Kräfte wirken. Wir wollen den Gang der mathematischen Behandlung bloss skizziren.

Zunächst lässt sich, wie für einen entsprechenden Ausdruck für drei unabhängig Veränderliche in § 491 (c), leicht beweisen, dass

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\int\int \varrho' \log D\, dx'\, dy' = 2\pi\varrho \tag{1}$$

ist; darin ist ϱ' eine beliebige Function zweier unabhängig Veränderlichen x', y';

ϱ ist dieselbe Function von x, y;

D bezeichnet $\sqrt{\{(x-x')^2 + (y-y')^2\}}$,

und $\int\int$ bezeichnet die Integration über eine Fläche, welche alle Werthe von x', y' enthält, für die ϱ' nicht verschwindet. Folglich ist

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)^2 u = Z, \tag{2}$$

wenn

$$u = \frac{1}{4\pi^2}\int\int dx'\, dy' \log D \int\int dx''\, dy''\, Z'' \log D' \tag{3}$$

ist, wo $D' = \sqrt{\{(x''-x')^2 + (y''-y')^2\}}$ ist und Z'', Z die Werthe einer beliebigen Function zweier unabhängig Veränderlichen für (x'', y''), (x, y) bezeichnen. Diese Function möge die Grösse der Last für die Flächeneinheit bezeichnen und für alle nicht in der Platte liegenden Werthe der Coordinaten verschwinden; auch nehmen wir, um der Mühe, die Grenzen bestimmen zu müssen, aus dem Wege zu gehen, an, alle Integrale erstreckten sich von $-\infty$ bis $+\infty$. Dann ist $z = u$ eine Lösung unserer Gleichung (2); folglich muss $z - u$ derselben Gleichung

genügen, wenn das zweite Glied weggelassen wird; oder, wenn $\mathfrak{z}$ eine allgemeine Lösung von

$$\text{(4)} \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)^2 \mathfrak{z} = 0$$

bezeichnet, so ist

$$\text{(5)} \qquad z = u + \mathfrak{z}$$

die allgemeine Lösung von (2). Die Grenzbedingungen für $\mathfrak{z}$ erhält man natürlich, wenn man $u + \mathfrak{z}$ für z in die direct vorgeschriebenen Grenzgleichungen substituirt, welches dieselben auch sein mögen.

655. Das Problem ist bisher allgemein nur für einen kreisförmigen Ring gelöst. — Es ist den Mathematikern bis jetzt nicht gelungen, dies Problem mit völliger Allgemeinheit für eine andere Form der Platte, als für einen kreisförmigen Ring (oder eine kreisförmige Scheibe mit einer concentrischen kreisförmigen Oeffnung) zu lösen. Nachdem wir eine ausführliche, der Beschränkung einer symmetrischen Vertheilung der Last unterworfene Lösung des Problems für diesen Fall gegeben haben (§§ 640, 653), wollen wir die Erweiterung bloss andeuten, welche die Analysis erfahren muss, um für jede mögliche nicht symmetrische Vertheilung der Biegung zu passen. Dieselbe Untersuchung wird uns unter viel einfacheren Bedingungen noch öfters begegnen und in Betreff einiger Punkte sorgfältig detaillirt ausgeführt werden, wenn wir mit wichtigen practischen Problemen beschäftigt sein werden, welche die elektrische Wirkung, die Bewegung einer Flüssigkeit und die Elektricitäts- und Wärmeleitung durch cylindrische Räume betreffen.

Wir nehmen den Mittelpunkt der kreisförmigen Grenzränder als Anfangspunkt für Polarcoordinaten an, und es sei

$$x = r\cos\theta, \quad y = \sin\theta.$$

Dann folgt leicht durch Transformation

$$\text{(6)} \qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{z}}{dy^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\theta^2}.$$

Setzen wir

$$\text{(7)} \qquad \log r = \vartheta, \quad \text{oder} \quad r = e^{\vartheta},$$

so geht dies über in

$$\text{(8)} \qquad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{z}}{dy^2} = e^{-2\vartheta}\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\vartheta^2}+\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\theta^2}\right).$$

Wird also wie früher $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}$ mit ∇^2 bezeichnet, so ist

$$\text{(9)} \qquad \nabla^4\mathfrak{z} = e^{-2\vartheta}\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\frac{d^2}{d\theta^2}\right)e^{-2\vartheta}\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2}+\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\mathfrak{z}.$$

Setzt man dies gleich Null, so erhält man

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{d\vartheta^2} + \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d\theta^2} = e^{2\vartheta} v, \tag{10}$$

wenn v irgend eine Lösung von

$$\frac{d^2 v}{d\vartheta^2} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} = 0 \tag{11}$$

bezeichnet. Wenn wir uns mit den elektrischen und den übrigen oben erwähnten Problemen beschäftigen werden, wird sich zeigen, dass eine für die vorliegende wie für alle Aufgaben, welche den Ausdruck willkürlicher Functionen von θ für besondere Werthe von ϑ enthalten, passende allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$v = \sum_0^\infty \{ (A_i \cos i\,\theta + B_i \sin i\,\theta) e^{i\vartheta} + (\mathfrak{A}_i \cos i\,\theta + \mathfrak{B}_i \sin i\,\theta) e^{-i\vartheta} \} \tag{12}$$

ist, wo A_i, B_i, $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ Constanten sind. Dass dies eine Lösung ist, lässt sich augenblicklich durch Differentiation bewahrheiten. Daraus ergibt sich leicht (und das Resultat lässt sich natürlich auch durch Differentiation bewahrheiten)

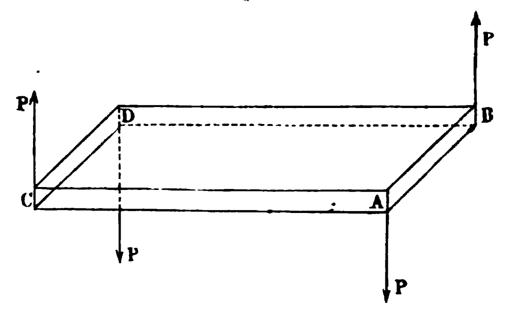
$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{z} = &\sum_{i=0}^{i=\infty} \left\{ \frac{1}{(i+2)^2 - i^2} (A_i \cos i\,\theta + B_i \sin i\,\theta)\, e^{(i+2)\vartheta} \right\} \\ &+ \sum_{i=2}^{i=\infty} \left\{ \frac{-1}{i^2 - (i-2)^2} (\mathfrak{A}_i \cos i\,\theta + \mathfrak{B}_i \sin i\,\theta)\, e^{-(i-2)\vartheta} \right\} \\ &- {}^1\!/_2 (\mathfrak{A}_1 \cos\theta + \mathfrak{B}_1 \sin\theta)\, \vartheta e^{\vartheta} + v', \end{aligned}\right. \tag{13}$$

wo v' irgend eine Lösung von (11) ist, die man zweckmässig als durch (12) gegeben annehmen kann, wenn darin die accentuirten Buchstaben A'_i u. s. w. zur Bezeichnung von vier neuen Constanten gebraucht werden. Wenn nun die willkürlichen periodischen Functionen von θ mit der Periode 2π, welche als die Werthe einer Verschiebung, oder einer Schiebungskraft, oder eines Kräftepaars für den äusseren und inneren kreisförmigen Rand gegeben sind, durch den Fourier'schen Satz [§ 77 (14)] in einfachen harmonischen Reihen ausgedrückt werden, so liefern die beiden Gleichungen [§ 645 (5)] für jeden Rand, wenn man sie einzeln auf die Coefficienten von $\cos i\,\theta$ und $\sin i\,\theta$ in den so erhaltenen Ausdrücken anwendet, acht Gleichungen zur Bestimmung der acht Constanten A_i, $\mathfrak{A}_i$, B_i, $\mathfrak{B}_i$, A'_i, $\mathfrak{A}'_i$, B'_i, $\mathfrak{B}'_i$.

656. Rechteckige Platte an abwechselnden Ecken belastet und unterstützt. — Obgleich das Problem, willkürliche Grenzbedingungen zu erfüllen, für rechteckige Platten noch nicht gelöst worden ist, so gibt es doch einen besonderen Fall desselben, welcher besondere Aufmerksamkeit verdient, insofern er nicht bloss an sich interessant und für praktische Anwendungen wichtig ist, sondern auch einen der schwierigsten Punkte [§§ 646, 648] der allgemeinen Theorie in eigenthümlicher Weise erläutert. An den vier Ecken einer

rechtwinkligen Platte greifen vier gleiche parallele Kräfte an, die senkrecht zur Platte wirken und einander das Gleichgewicht halten.

Fig. 43.



Dadurch wird die Platte so deformirt, dass sie überall eine gleichförmige anticlastische Krümmung hat; die Schnitte, in denen keine Biegung erfolgt, sind den Seiten parallel, und folglich liegen die Schnitte, welchen gleiche und entgegengesetzte Maxima der Krümmung entsprechen, in den Normalebenen, welche mit den Seiten einen Winkel von 45° einschliessen. Dies folgt unmittelbar aus § 648, wenn man voraussetzt, die Ecken seien, wenn auch noch so wenig, abgerundet, und die Kräfte über sie hin zerstreut.

Man erhält dies Resultat auch auf folgende Weise: — Wir denken uns im Rande AB eine unendliche Anzahl Normallinien gezogen und in jeder derselben ein Paar entgegengesetzter Kräfte, von denen jede gleich $\frac{1}{2}P$ ist, angebracht. Dadurch kann der Zustand der Platte nicht gestört werden. Diese Kräfte machen mit den Hälften der in den Ecken A und B nach entgegengesetzten Richtungen hin wirkenden einzelnen Kräfte P ein über den ganzen Rand AB verbreitetes Kräftepaar aus, dessen Axen senkrecht zur Ebene des Randes sind, und dessen Moment für die Einheit der Länge $\frac{1}{2}P$ beträgt. Ebenso machen die zweiten Hälften der Kräfte P in den Ecken A, B mit den Hälften derjenigen in C und D und den über CA und DB vertheilten einander das Gleichgewicht haltenden Kräften Kräftepaare aus, die über die Ränder CA und DB verbreitet sind. Endlich bilden die zweiten Hälften der Kräfte in den Ecken C und D im Verein mit den auf CD vertheilten neuen Kräften ein über CD verbreitetes Kräftepaar. Das Moment jedes dieser Kräftepaare beträgt für die Längeneinheit des Randes, über den es verbreitet ist, $\frac{1}{2}P$. Ihre Richtungen stehen in der in § 638 (2) angegebenen Beziehung zu einander; wenn man daher diese Kräftepaare sämmtlich vereinigt, so verursachen sie eine anticlastische Reaction von der Grösse $\Omega = \frac{1}{2}P$. Das Ergebniss ist folglich (§ 642) eine gleichförmige anticlastische Deformation vom Betrage $\frac{1}{2}\frac{P}{k}$, deren Axen gegen die Ränder die Neigung 45° haben, d. h. (§ 639) eine Biegung, bei welcher die

grössten Krümmungen $1/2 \frac{P}{k}$ betragen und nach verschiedenen Seiten der Tangentialebene hin in den Normalschnitten von den angegebenen Neigungen liegen.

657. Uebergang zu Biegungen von endlicher Grösse. — Der Uebergang von dieser Lösung, welche sich auf die Voraussetzung stützt, dass die grösste Deflexion nur ein kleiner Bruchtheil der Dicke der Platte ist, zur Lösung für grössere Biegungen, bei welchen Ecktheile nahezu in abwickelbare (thatsächlich cylindrische) Flächen umgebogen werden und ein viereckiger Centraltheil sich nur unendlich wenig von der Form einer Ebene entfernt, und ebenso der Uebergang von hier zu dem äussersten Falle eines unendlich dünnen vollkommen biegsamen Rechtecks von unausdehnbarem Stoffe führen zu Problemen, die zu den merkwürdigsten der physikalischen Mathematik gehören. Den erwähnten äussersten Fall kann man leicht darstellen und beobachten, wenn man ein sorgfältig geschnittenes (§ 145) Rechteck von Papier nimmt und es an feinen Fäden aufhängt, die an zwei gegenüberstehenden Ecken befestigt sind und parallel gehalten werden, während von den beiden anderen Ecken zwei gleiche Gewichte an Fäden herabhängen.

658. Elastische Reaction oder Zwang von Körpern. — Die in §§ 154 bis 190 gegebenen Definitionen und Untersuchungen über Deformation der Volumenelemente bilden eine kinematische Einleitung zur Theorie der elastischen festen Körper. Wir müssen jetzt, wo wir die elementare Dynamik des Gegenstandes beginnen, die Kräfte betrachten, welche im Innern eines festen Körpers ins Leben gerufen werden, wenn man denselben einer Deformation unterwirft.

[Um diese Kräfte zu bezeichnen, wollen wir im Deutschen statt des von Rankine (Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1850) vorgeschlagenen und von den englischen Verfassern adoptirten Wortes „stress" den Ausdruck „elastische Reaction oder Gegenwirkung" (nämlich gegen die Formveränderung) brauchen, zum Unterschied von dem früher (§ 154) eingeführten Ausdruck „Deformation" (engl. strain), welcher den bloss geometrischen Begriff einer Volumen- oder Formänderung enthält.

Denselben Ausdruck „stress" werden wir zuweilen auch durch „Zwang" wiedergeben, wenn es sich nämlich um die Bezeichnung nicht der durch die Deformation in einem Körper hervorgerufenen Kräfte, sondern des Zustandes handelt, in welchen der Körper durch das Dasein oder Fehlen dieser Kräfte versetzt ist. Demge-

mäss werden wir einen Körper, jenachdem er einen elastischen Widerstand leistet oder nicht, **gezwängt** (stressed) oder **ungezwängt** (unstressed) nennen.] (Die Uebersetzer.)

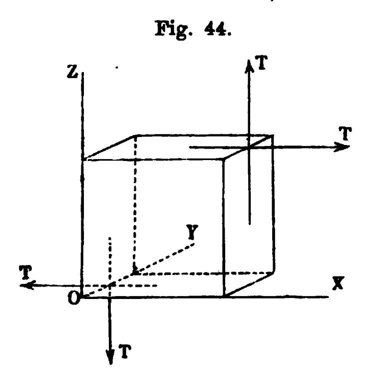
659. Homogener Zwang. — Wenn in irgend einem Theile eines unter der Einwirkung von Kräften stehenden Körpers die Wechselwirkung zwischen den Massentheilen, die zu beiden Seiten eines beliebigen ebenen Flächenstücks liegen, gleich und parallel der Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten jedes congruenten und parallelen ebenen Flächenstücks liegenden Massentheilen ist, so nennen wir die elastische Reaction in jenem Körpertheil homogen. Mit anderen Worten: der von einer Masse erlittene Zwang ist innerhalb eines Raumes homogen, wenn alle congruenten und ähnlich gelegenen Massentheile innerhalb dieses Raumes in demselben Sinne und mit derselben Intensität von Kräften beeinflusst werden.

660. Vertheilung der Kraft durch feste elastische Körper. — Um die Kraftvertheilung über die Oberfläche irgend eines Theils einer homogen gezwängten Masse finden zu können, müssen wir die Richtung und die für die Flächeneinheit genommene Grösse der Kraft kennen, welche durch ein den Theil in beliebiger Richtung durchschneidendes ebenes Flächenstück wirkt. Wenn wir diese Elemente für drei beliebige in drei verschiedenen Richtungen liegende Ebenen kennen, so können wir sie für eine Ebene von einer beliebigen anderen Richtung bestimmen. Das sieht man sofort, wenn man betrachtet, was für das Gleichgewicht eines Tetraëders der Substanz erforderlich ist. Die Resultante der auf eine seiner Seitenflächen wirkenden Kräfte muss gleich und entgegengesetzt sein der Resultante der Kräfte, welche auf die drei anderen Seiten wirken, und diese letztere Resultante ist bekannt, wenn die Seitenflächen den drei Ebenen parallel sind, für deren jede die Kraft gegeben ist.

661. Elemente, welche eine elastische Reaction bestimmen. — Danach ist die elastische Reaction in einem homogen gezwängten Körper vollständig ausgedrückt, wenn die Richtung und die für die Flächeneinheit genommene Grösse der Kraft gegeben ist, die auf jede von drei verschiedenen Ebenen wirkt. In der analytischen Behandlung des Gegenstandes ist es im Allgemeinen zweckmässig, diese Coordinatenebenen rechtwinklig zu einander anzunehmen. Wir würden aber sofort in einen Irrthum gerathen, wenn wir nicht bemerkten, dass die hier angegebene Bestimmung der Reaction nicht neun, sondern thatsächlich nur **sechs unabhängige Elemente** enthält. Denn wenn jede der einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte, welche auf die sechs Flächen eines Würfels

wirken, in drei den drei Kanten OX, OY, OZ parallelé Componenten zerlegt wird, so erhalten wir im Ganzen 18 Kräfte. Senkrecht zu jedem Paar gegenüberliegender Flächen wirken zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte, die einander folglich das Gleichgewicht halten. Die zwölf übrig bleibenden tangentialen Componenten machen drei Paar Kräftepaare aus, deren Axen die Richtung der drei Kanten haben, und von denen je zwei einzeln im Gleichgewicht sein müssen. Die Fig. 44 stellt die beiden einander das Gleichgewicht haltenden Kräftepaare dar, welche OY zur Axe haben. Aus der Betrachtung derselben schliessen wir, dass die auf die Flächen (zy) parallel OZ wirkenden Kräfte gleich den auf die Flächen (yx) parallel OX wirkenden Kräften sind. Auf ähnliche Weise erkennt man, dass die auf die Flächen (yx) parallel OY wirkenden Kräfte gleich den auf die Flächen (xz) parallel OZ wirkenden, und endlich dass die auf (xz) parallel OX wirkenden Kräfte gleich den auf (zy) parallel OY wirkenden sind.

Fig. 44.



662. Wenn also drei beliebige zu einander senkrechte Coordinatenebenen gewählt sind, so können wir, um eine elastische Gegenwirkung auszudrücken, folgende sechs Elemente nehmen: die normalen Componenten P, Q, R der auf diese Ebenen wirkenden Kräfte und die drei beziehungsweise zu OX, OY, OZ senkrechten tangentialen Componenten S, T, U der Kräfte, welche auf die beiden Ebenen wirken, welche beziehungsweise in OX, OY, OZ zusammentreffen; dabei wird jede der sechs Kräfte für die Flächeneinheit genommen. Eine normale Componente wird als positiv gerechnet werden, wenn sie die zu beiden Seiten ihrer Ebene liegenden Substanztheile zu trennen strebt. P, Q, R werden zuweilen einfache Longitudinalreactionen, S, T, U einfache Schiebungsreactionen genannt.

Wir wollen jetzt aus diesen Daten auf die in § 660 angegebene Weise die Kraft bestimmen, welche auf irgend eine durch die Richtungscosinus l, m, n ihrer Normale bestimmte Ebene wirkt. Eine solche Ebene schneide OX, OY, OZ in den drei Punkten X, Y, Z. Wenn dann die Fläche XYZ für einen Augenblick mit A bezeichnet wird, so sind die Projectionen von A auf die Coordinatenebenen, nämlich die

Flächen YOZ, ZOX, XOY, beziehungsweise gleich Al, Am, An. Wir erhalten folglich für das Gleichgewicht des von jenen vier Dreiecken begrenzten materiellen Tetraeders, wenn F, G, H die Componenten der Kraft bezeichnen, welche auf die Flächeneinheit des ersten Dreiecks XYZ, wirkt,

$$F.A = P.lA + U.mA + T.nA$$

und zwei symmetrische Gleichungen für die OY und OZ parallelen Componenten. Durch Division mit A ergibt sich daher

$$(1) \qquad \begin{cases} F = Pl + Um + Tn \\ G = Ul + Qm + Sn \\ H = Tl + Sm + Rn. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke stehen zu dem Ellipsoid

$$(2) \qquad Px^2 + Qy^2 + Rz^2 + 2(Syz + Tzx + Uxy) = 1$$

in der bekannten Relation, nach welcher, wenn wir

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr$$

nehmen, und wenn λ, μ, ν die Richtungscosinus und p die Länge des Lothes vom Centrum auf die im Punkte (x, y, z) an die Oberfläche des Ellipsoides gelegte Tangentialebene bezeichnen,

$$F = \frac{\lambda}{pr}, \quad G = \frac{\mu}{pr}, \quad H = \frac{\nu}{pr}$$

ist. Wir schliessen daraus Folgendes: —

663. Bestimmung der elastischen Reaction mittels einer Fläche zweiten Grades. — Für jede vollständig bestimmte elastische Reaction in einem festen Körper lässt sich stets eine Fläche zweiten Grades ermitteln, welche den Zwang auf folgende Weise graphisch darstellt: —

Um die Richtung und die für die Flächeneinheit genommene Grösse der Kraft zu finden, welche durch irgend eine Ebene in dem festen Körper wirkt, ziehe man senkrecht zu dieser Ebene eine Linie vom Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades bis an ihre Oberfläche. Die gesuchte Kraft ist dann, was ihre Grösse betrifft, gleich dem reciproken Werth des Products aus der Länge dieser Linie in die Senkrechte vom Mittelpunkt auf die durch den Schnittpunkt gelegte Tangentialebene, und, was ihre Richtung betrifft, senkrecht zur letzteren Ebene.

664. Normalebenen und Axen einer elastischen Reaction. — Daraus geht hervor, dass es für jeden beliebigen Reactionszustand drei bestimmte zu einander senkrechte Ebenen von der Beschaffenheit gibt, dass die im festen Körper durch jede derselben wirkende Kraft genau senkrecht zu ihr ist. Diese Ebenen heissen

die Haupt- oder Normalebenen der Reaction, die auf sie wirkenden für die Flächeneinheit genommenen Kräfte die Haupt- oder Normalzugkräfte und die zu ihnen senkrechten Linien die Haupt- oder Normalaxen oder einfach die Axen der Reaction. Die drei halben Hauptaxen der Fläche zweiten Grades sind gleich den reciproken Werthen der Quadratwurzeln aus den Normalzugkräften. Wenn jedoch in irgend einem Falle jede der drei Normalzugkräfte negativ ist, so empfiehlt es sich, dieselben als positive Druckkräfte anzusehen; die reciproken Werthe der Quadratwurzeln dieser Druckkräfte sind dann die Halbaxen eines reellen Reactionsellipsoids, welches die Vertheilung der Kraft in der oben dargelegten Weise darstellt, wenn man die Zugkräfte überall durch Druckkräfte ersetzt.

665. Varietäten der Reactionsfläche zweiten Grades. — Wenn die drei normalen Zugkräfte sämmtlich dasselbe Zeichen haben, so ist die Reactionsfläche zweiten Grades ein Ellipsoid; sind im Besonderen zwei jener Kräfte oder alle drei einander gleich, so ist die Fläche ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel. Wenn eine jener drei Kräfte negativ ist, während die beiden anderen positiv sind, so ist die Fläche ein einflächiges Hyperboloid. Ist dagegen eine der normalen Zugkräfte positiv, während die beiden anderen negativ sind, so ist die Fläche ein zweiflächiges Hyperboloid.

666. Wenn eine der drei Hauptzugkräfte verschwindet, während die beiden anderen von endlicher Grösse sind, so wird die Reactionsfläche zweiten Grades ein Cylinder, der einen Kreis, eine Ellipse oder eine Hyperbel zur Basis hat, je nachdem die beiden von Null verschiedenen Zugkräfte gleich, ungleich und mit demselben Vorzeichen versehen, oder ungleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Wenn von den drei Hauptzugkräften zwei verschwinden, so degenerirt die Fläche in zwei Ebenen, und die Reaction heisst in diesem Falle (§ 662) eine einfache longitudinale Reaction. Die oben (§ 664) angegebene Theorie der Hauptebenen und Normalzugkräfte lässt sich dann in folgenden Satz zusammenfassen: Jede beliebige Reaction kann angesehen werden als aus drei einfachen longitudinalen Reactionen in drei zu einander senkrechten Richtungen bestehend. In allen diesen Fällen bieten die geometrischen Interpretationen keine Schwierigkeit dar.

667. Zusammensetzung elastischer Reactionen. — Die Zusammensetzung von Reactionen geschieht natürlich dadurch, dass man die componirenden Zugkräfte auf folgende Weise addirt: — Wenn $(P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, U_1)$, $(P_2, Q_2, R_2, S_2, T_2, U_2)$, u. s. w.

nach § 662 eine beliebig gegebene Anzahl von Reactionen bezeichnen, die gleichzeitig in einer Substanz wirken, so ist ihre Gesammtwirkung dieselbe, wie die einer einzigen Reaction, welche, in entsprechender Form ausgedrückt, $(\Sigma P, \Sigma Q, \Sigma R, \Sigma S, \Sigma T, \Sigma U)$ ist.

668. Vergleich der Gesetze der Deformation und der Reaction. — Jeder der jetzt in Betreff der elastischen Reactionen ausgesprochenen Sätze (§§ 659, 667) lässt sich auf unendlich kleine Deformationen anwenden, wenn man für eine zu irgend einer Ebene senkrechte, für die Einheit der Fläche genommene Zugkraft eine für die Längeneinheit genommene Elongation in den Linien der Zugkraft und für die einer beliebigen Richtung parallele Hälfte der tangentialen Zugkraft eine auf die in § 175 dargelegte Weise gerechnete Schiebung in derselben Richtung substituirt. Es wird eine nützliche Uebung für den Leser sein, diese Uebertragung für jeden einzelnen jener Sätze eingehend zu studiren und zu rechtfertigen, indem er die Resultate der §§ 171, 172, 173, 174, 175, 185 in geeigneter Weise modificirt, so dass sie für unendlich kleine Deformationen passen. Wir bemerken, dass die nach der Regel des § 663 gebildete Fläche zweiten Grades, welche eine der in §§ 665, 666 erwähnten Varietäten sein kann, nicht dasselbe wie das Deformationsellipsoid des § 160 ist, welches seiner Natur nach immer ein Ellipsoid ist und für eine unendlich kleine Deformation unendlich wenig von einer Kugel abweicht.

Der Vergleich des § 172 mit dem (§ 661) in Betreff der tangentialen Zugkräfte erhaltenen Resultate ist besonders interessant und wichtig.

669. Die folgende tabellarische Zusammenstellung der einander entsprechenden Elemente, welche für rechtwinklige Coordinaten eine Deformation und eine elastische Reaction auf die in den vorhergehenden Paragraphen dargelegte Weise bestimmen, wird das Verständniss der Sache befördern: —

Componenten der		Ebenen, deren relative Bewegung, oder durch welche die Kraft gerechnet wird.	Richtung der relativen Bewegung oder der Kraft.
Deformation.	Reaction.		
e	P	yz	x
f	Q	zx	y
g	R	xy	z
a	S	$\begin{cases} yx \\ zx \end{cases}$	y z
b	T	$\begin{cases} zy \\ xy \end{cases}$	z x
c	U	$\begin{cases} xz \\ yz \end{cases}$	x y

670. Die gegen die Reaction eines nachgiebigen Körpers in seinem Innern geleistete Arbeit. — Wenn ein Würfel, dessen Volumen gleich Eins ist, unter irgend einer Reaction (P, Q, R, S, T, U) die unendlich kleine einfache longitudinale Deformation e allein erfährt, so ist die auf ihn ausgeübte Arbeit Pe; denn von den OX parallelen Kräftecomponenten P, U, T leisten bei dieser Deformation U und T keine Arbeit. Ebenso sind Qf, Rg die Ausdrücke für die Arbeit, wenn unter der Einwirkung derselben elastischen Reaction beziehungsweise die einfachen longitudinalen Deformationen f oder g erlitten werden. Wenn der Würfel weiter eine einfache Schiebung a erfährt, so sehen wir, dass die geleistete Arbeit Sa ist, mag die Schiebung nun (§ 172) als ein unendlich kleines Gleiten der Ebenen yx parallel y oder der Ebenen zx parallel z angesehen werden; die geleistete Arbeit ist Tb, wenn die Deformation einfach eine Schiebung b ist, welche entweder in den Ebenen zy parallel OZ oder in den Ebenen xy parallel OX erfolgt; die Arbeit ist endlich Uc, wenn die Deformation eine Schiebung c der Ebenen xz oder yz ist, welche beziehungsweise parallel OX oder OY erfolgt. Folglich ist die Gesammtarbeit, welche die Reaction (P, Q, R, S, T, U) auf die würfelförmige Masseneinheit ausübt, indem sie die Deformation (e, f, g, a, b, c) hervorbringt,

$$Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc. \tag{3}$$

Es ist zu bemerken, dass die Wirkung einer solchen elastischen Reaction, insofern diese ein System von Kräften ist, welche, wenn der angegriffene Massentheil starr ist, einander das Gleichgewicht halten,

keine Arbeit leisten kann (§ 551), wenn sich die Masse auf irgend eine Weise bewegt, ohne eine Formänderung zu erfahren. Daher kann keine Verschiebung oder Rotation des Würfels, welche zugleich mit der Deformation erfolgt, die eben gefundene Grösse der geleisteten Arbeit verändern.

Wenn jede Kante des Würfels nicht die Länge Eins, sondern eine beliebige Länge p hat, so ist jede Kraft p^2 mal, jede relative Verschiebung p mal, folglich die verrichtete Arbeit p^3 mal so gross, als oben gerechnet wurde. Mithin wird auf einen Körper von irgend einer Form und vom Cubikinhalt C, welcher überall einem gleichmässigen Zwange (P, Q, R, S, T, U) unterworfen ist, während er überall gleichmässig eine Deformation (e, f, g, a, b, c) erfährt, eine Arbeit von der Grösse

$$(4) \qquad (Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc)\, C$$

ausgeübt.

Die Arbeitsleistung längs der Oberfläche eines nachgiebigen Körpers. — Man beachte, dass dies gleich der Arbeit sein muss, welche die von aussen einwirkenden Kräfte auf die Grenzfläche des Körpers ausüben. Denn die auf irgend einen Massentheil innerhalb des Körpers ausgeübte Arbeit ist einfach die Arbeit, welche die den Theil ringsherum berührende Masse auf seine Oberfläche leistet, da keine Kraft von aussen her auf die innere Substanz eine Fernwirkung äussert. Wenn wir uns also den ganzen Körper in eine beliebige Anzahl Theile zerlegt denken, von denen jeder eine beliebige Form hat, so reducirt sich die Summe der auf alle diese Theile ausgeübten Arbeiten auf die Gesammtarbeit, welche die von aussen auf die ganze äussere Oberfläche des Körpers einwirkenden Kräfte leisten; denn es verschwinden die gleichen positiven und negativen Grössen, welche die Theile der Arbeit ausdrücken, die auf jedes Theilchen von den ringsherum liegenden Theilen ausgeübt und von den letzteren Theilen bei dieser Wirkung verbraucht werden.

Die analytische Bewahrheitung dieses Ergebnisses ist lehrreich für die Syntax der mathematischen Sprache, durch welche die Theorie der Ueberleitung der Kraft mathematisch ausgedrückt wird. Es seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes innerhalb des Körpers, W der Gesammtbetrag der unter den oben angegebenen Umständen geleisteten Arbeit, und $\iiint$ eine Integration, welche sich durch den ganzen vom Körper eingenommenen Raum erstreckt, so dass

$$(5) \qquad W = \iiint (Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc)\, dx\, dy\, dz$$

ist. Bezeichnen nun α, β, γ die Componenten der Verschiebung, welche

irgend ein unendlich nahe an (x, y, z) liegender Punkt der Substanz erfährt, wenn die Deformation (e, f, g, a, b, c) erfolgt, sei dieselbe nun eine rotationslose (§ 182), bei welcher ein gewisser Punkt des Körpers fest bleibt, oder eine beliebige mit einer unendlich kleinen Rotation verbundene Translation, so erhalten wir, wenn wir die Formeln (5) des § 181 so ändern, dass sie für unendlich kleine Deformationen passen, und darin § 190 (e) benutzen, mit Rücksicht auf unsere jetzige (§ 669) Bezeichnung

$$(6)\quad \begin{cases} e = \dfrac{d\alpha}{dx}, & f = \dfrac{d\beta}{dy}, & g = \dfrac{d\gamma}{dz}, \\ a = \dfrac{d\beta}{dz} + \dfrac{d\gamma}{dy}, & b = \dfrac{d\gamma}{dx} + \dfrac{d\alpha}{dz}, & c = \dfrac{d\alpha}{dy} + \dfrac{d\beta}{dx}. \end{cases}$$

Werden diese Ausdrücke in (5) eingesetzt, so folgt

$$(7)\quad \begin{cases} W = \int\int\int\Big(P\dfrac{d\alpha}{dx} + U\dfrac{d\beta}{dx} + T\dfrac{d\gamma}{dx} + U\dfrac{d\alpha}{dy} \\ \qquad + Q\dfrac{d\beta}{dy} + S\dfrac{d\gamma}{dy} + T\dfrac{d\alpha}{dz} + S\dfrac{d\beta}{dz} + R\dfrac{d\gamma}{dz}\Big)\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$(8)\quad \begin{cases} W = \int\int[(P\alpha + U\beta + T\gamma)\,dy\,dz + (U\alpha + Q\beta + S\gamma)\,dz\,dx \\ \qquad + (T\alpha + S\beta + R\gamma)\,dx\,dy]. \end{cases}$$

Darin sind die Grenzen der Integrationen so anzunehmen, dass, wenn $d\sigma$ ein Element der umgrenzenden Oberfläche, $\int\int$ eine sich über dieselbe erstreckende Integration und l, m, n die Richtungscosinus der in irgend einem ihrer Punkte errichteten Normale bezeichnen, der Ausdruck dasselbe bedeutet, wie der Ausdruck

$$(9)\quad \begin{cases} W = \int\int\{(P\alpha + U\beta + T\gamma)\,l + (U\alpha + Q\beta + S\gamma)\,m \\ \qquad + (T\alpha + S\beta + R\gamma)\,n\}\,d\sigma, \end{cases}$$

welcher, wenn man die Glieder anders gruppirt, in

$$(10)\quad \begin{cases} W = \int\int\{(Pl + Um + Tn)\,\alpha + (Ul + Qm + Sn)\,\beta \\ \qquad + (Tl + Sm + Rn)\,\gamma\}\,d\sigma \end{cases}$$

übergeht. Das zweite Glied dieser Formel drückt nach (1) direct die Arbeit aus, welche von den von aussen auf die Grenzfläche wirkenden Kräften geleistet wird.

671. Differentialgleichung der durch elastische Reaction geleisteten Arbeit. — Wenn wir jetzt voraussetzen, der Körper gebe irgend einem Zwange (P, Q, R, S, T, U) nach und setze demselben nur den ihm innewohnenden Widerstand gegen eine Formänderung entgegen, so wird [nach (4), wenn de, df, u. s. w. statt e, f, u. s. w. gesetzt wird] die Differentialgleichung der geleisteten Arbeit

$$(11)\quad dw = P\,de + Q\,df + R\,dg + S\,da + T\,db + U\,dc$$

sein, wenn w die für die Volumeneinheit genommene Gesammtarbeit bezeichnet, die in irgend einem Theil des Körpers verrichtet wird, während die Substanz dieses Theils eine Deformation (e, f, g, a, b, c) von einem anfänglichen Zustande aus erfährt, den man als deformationslos betrachtet. Wie wir später in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie sehen werden, drückt diese Gleichung die Arbeit aus, die in einer Flüssigkeit durch die Verzerrungsreaction (oder die Differenz des Drucks in verschiedenen Richtungen) geleistet wird, wenn dieselbe gegen die allen natürlichen Flüssigkeiten innewohnende Zähigkeit arbeitet, und w ist dann nach Joule's Entdeckung der dynamische Werth der in dem Processe erzeugten Wärme. Die Gleichung kann auch dazu angewandt werden, die Arbeit auszudrücken, welche bei der Deformation eines unvollkommen elastischen festen Körpers oder eines elastischen festen Körpers geleistet wird, dessen Temperatur sich während des Processes ändert. In allen solchen Anwendungen hängt die Reaction zum Theil von der Geschwindigkeit der deformirenden Bewegung, oder von der variirenden Temperatur, und gar nicht oder doch nicht ausschliesslich von dem in irgend einem Augenblicke vorhandenen Deformationszustande ab, und das System ist nicht dynamisch conservativ.

672. Vollkommene Elasticität. — Definition. Ein vollkommen elastischer Körper ist ein Körper, welcher, wenn er in irgend einen Deformationszustand gebracht ist, zu allen Zeiten denselben Zwang erfordert, um in diesem Zustande zu bleiben, wie lange er auch deformirt geblieben sein mag, oder wie schnell er auch aus einem Zustande anderer Deformation oder aus seinem undeformirten Zustande in den betrachteten Zustand versetzt sein mag. Nach dem in §§ 443, 448 angegebenen Plane für die Behandlung der abstracten Dynamik ignoriren wir hier die Temperaturänderungen im Körper. Wenn wir jedoch die Bedingung hinzufügen, dass die Temperatur absolut unverändert bleibe, oder dass der Körper nach den Aenderungen seiner Deformation eine bestimmte Temperatur wieder annehme, so erhalten wir eine Definition der als vollkommene Elasticität bezeichneten Eigenschaft, welche hervorragend elastische Körper in hohem Grade besitzen; in aller Strenge genügen dieser Definition alle Flüssigkeiten; es genügen ihr vielleicht auch einige reale feste Körper, wie homogene Krystalle. Insofern aber die elastische Reaction jeder Art, welche der Körper einer Deformation entgegensetzt, mit seiner Temperatur variirt, und da sogar jede Zu-

oder Abnahme der Deformation in einem elastischen Körper nothwendig*) auch von einer Aenderung seiner Temperatur begleitet ist (ein Ergebniss der Thermodynamik, das wir später herleiten werden), so kann selbst ein vollkommen elastischer Körper, wenn er nach einander eine Reihe von Deformationen erfährt, nicht als ein völlig conservatives System wirken, sondern muss im Gegentheil durch die Fortleitung und Ausstrahlung der durch diese Temperaturänderungen erzeugten Wärme einen Verlust von Energie veranlassen.

Wenn man aber die Deformationsänderungen so schnell macht, dass eine merkliche Temperaturausgleichung durch Leitung oder Strahlung verhindert werde (das geschieht z. B., wie Stokes gezeigt hat, bei der Ausbreitung musikalischer Töne durch die Luft), oder wenn man dieselben so verlangsamt, dass man durch geeignete Mittel die Temperatur constant**) erhalten kann, so kann man bewirken, dass jeder in hohem Grade oder vollkommen elastische Körper in Wirklichkeit nur sehr wenig verschieden von einem conservativen System wirke.

673. Potentielle Energie eines im deformirten Zustande erhaltenen Körpers. — In der Natur ist daher die Gesammtgrösse w der Arbeit, wie wir sie oben definirt haben, für einen vollkommen elastischen Körper unabhängig (§ 274) von der Reihe der Configurationen oder Deformationszustände, durch welche der Körper aus der ersten in die zweite der angegebenen Lagen gebracht sein mag, wenn ihm nur nicht gestattet ist, seine Temperatur während des Processes merklich zu ändern.

Analytisch ausgedrückt heisst dies: — Der Ausdruck (11) für dw muss das Differential einer Function der als unabhängig Veränderliche angesehenen Grössen e, f, g, a, b, c sein, oder, was dasselbe ist, w ist eine Function dieser Elemente und

$$(12)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{dw}{de}, & Q = \dfrac{dw}{df}, \quad R = \dfrac{dw}{dg}, \\ S = \dfrac{dw}{da}, & T = \dfrac{dw}{db}, \quad U = \dfrac{dw}{dc}. \end{cases}$$

Im Anhang C werden wir zu dieser Theorie zurückkehren und eine umfassende analytische Behandlung derselben geben, indem wir sie nicht auf unendlich kleine Deformationen beschränken, für welche die Bezeichnung $(e, f, \ldots)$, wie sie in § 669 definirt wurde, allein passend ist. Inzwischen bemerken wir nur, dass, wenn der Gesammtbetrag der Defor-

*) „On the Thermoelastic and Thermomagnetic Properties of Matter" (W. Thomson). Quarterly Journal of Mathematics. April 1855.

**) Ibid.

mation unendlich klein ist, wenn also die Componenten der elastischen Reaction sich sämmtlich in gleichem Verhältniss wie die Deformationscomponenten ändern, so oft diese letzteren sämmtlich in demselben bestimmten Verhältniss geändert werden, w eine homogene quadratische Function der sechs Veränderlichen e, f, g, a, b, c sein muss, welche, wenn $(e, e), (f, f), \ldots, (e, f), \ldots$ Constanten bezeichnen, die von der Beschaffenheit der Substanz und den als Coordinatenaxen angenommenen Richtungen abhängen, folgendermaassen geschrieben werden kann: —

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} w = \tfrac{1}{2}\{&(e,e)e^2+(f,f)f^2+(g,g)g^2+(a,a)a^2+(b,b)b^2+(c,c)c^2\\ &+2(e,f)ef+2(e,g)eg+2(e,a)ea+2(e,b)eb+2(e,c)ec\\ &+2(f,g)fg+2(f,a)fa+2(f,b)fb+2(f,c)fc\\ &+2(g,a)ga+2(g,b)gb+2(g,c)gc\\ &+2(a,b)ab+2(a,c)ac\\ &+2(b,c)bc\} \end{aligned}\right.$$

Die 21 Coefficienten $(e,e), (f,f), \ldots, (b,c)$ dieses Ausdrucks sind die 21 „Elasticitätscoefficienten", von denen Green zuerst gezeigt hat, dass sie für eine vollständige Theorie der Dynamik eines unendlich kleinen Deformationen unterworfenen elastischen festen Körpers geeignet und unentbehrlich sind. Die einzige Bedingung, der man diese Coefficienten theoretisch unterwerfen kann, besteht darin, dass sie w für beliebige, positive oder negative, Werthe der Deformationscomponenten $e, f, \ldots$ nicht negativ werden lassen dürfen. In dem Capitel über die Eigenschaften der Materie werden wir sehen, dass eine von Mathematikern falsch ausgearbeitete falsche Theorie (von Boscovich) zu Relationen zwischen den Elasticitätscoefficienten geführt hat, die experimentell als unrichtig erwiesen worden sind.

Wird mittels der Formel (13) w aus (12) eliminirt, so erhalten wir

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} P &= (e,e)e + (e,f)f + (e,g)g + (e,a)a + (e,b)b + (e,c)c\\ Q &= (f,e)e + (f,f)f + (f,g)g + (f,a)a + (f,b)b + (f,c)c\\ &\qquad\text{u. s. w.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen drücken die sechs Componenten der elastischen Reaction (P, Q, R, S, T, U) als lineare Functionen der sechs Deformationscomponenten (e, f, g, a, b, c) aus. Zwischen den 36 Coefficienten dieser Functionen bestehen 15 Gleichungen*), so dass nur 21 derselben unabhängig bleiben. Das blosse Princip der Superposition (welches wir oben zum Beweise der quadratischen Form von w benutzt haben) hätte direct angewendet werden können, um lineare Formeln für die Componenten der elastischen Reaction herzuleiten. Auf diese Weise sind einige Schriftsteller dazu gekommen, als die Grundlage einer ganz allgemeinen Theorie der Elasticität sechs Gleichungen aufzustellen, welche 36 als unabhängig vorausgesetzte Coefficienten enthalten. Nur mittelst des Princips der Energie kann man aber, wie zuerst Green entdeckte, die 15 Paare dieser Coefficienten als gleich erweisen.

---

*) Nämlich

$$(15)\qquad (e,f) = (f,e), \ldots (e,a) = (a,e), \ldots (b,c) = (c,b).$$

Die algebraische Transformation der Gleichungen (14), welche den Zweck hat, die Deformationscomponenten einzeln als lineare Functionen der Componenten der elastischen Reaction auszudrücken, lässt sich natürlich direct ausführen, dadurch dass man aus den 36 Coefficienten die nöthigen Determinanten bildet und die 36 erforderlichen Quotienten nimmt. Aus einem bekannten Satze über Determinanten, den wir oben [§ 313 (d)] schon angewandt haben, folgt, dass wegen der 15 Gleichheiten, die zwischen je zweien der Coefficienten von e, f, u. s. w. in (14) bestehen, 15 Gleichheiten zwischen je zweien dieser Quotienten stattfinden. Bezeichnen wir demnach mit

$$[P,P],\ [Q,Q],\ \ldots,\ [P,Q],\ldots,\ [Q,P],\ldots$$

die durch jenes Verfahren gefundenen 36 Determinantenquotienten [welche somit bekannte algebraische Functionen der anfänglichen Coefficienten (e,e), (f,f), ... sind], so erhalten wir

$$(16)\begin{cases} e = [P,P]\,P + [P,Q]\,Q + [P,R]\,R + [P,S]\,S + [P,T]\,T + [P,U]\,U \\ f = [Q,P]\,P + [Q,Q]\,Q + [Q,R]\,R + [Q,S]\,S + [Q,T]\,T + [Q,U]\,U \\ \qquad \text{u. s. w.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

und diese neuen Coefficienten genügen den 15 Gleichungen

$$(17)\qquad [P,Q] = [Q,P],\ [P,R] = [R,P],\ldots$$

Aus dem, was wir in § 313 (d) bewiesen haben, wo wir es mit genau derselben algebraischen Transformation zu thun hatten, erkennen wir, dass $[P,P]$, $[Q,Q]$, ..., $[P,Q]$, ... einfach die Coefficienten von $P^2, Q^2, \ldots$, $2PQ, \ldots$ in dem Ausdruck für $2w$ sind, den man erhält, wenn man e, f, ... aus (13) eliminirt. Es ist also

$$(18)\quad w = \tfrac{1}{2}\{[P,P]P^2 + [Q,Q]Q^2 + \cdots + 2[P,Q]PQ + 2[P,R]PR + \cdots\},$$

und

$$(19)\quad \begin{cases} e = \left[\dfrac{dw}{dP}\right],\ f = \left[\dfrac{dw}{dQ}\right],\ g = \left[\dfrac{dw}{dR}\right], \\ a = \left[\dfrac{dw}{dS}\right],\ b = \left[\dfrac{dw}{dT}\right],\ c = \left[\dfrac{dw}{dU}\right]; \end{cases}$$

die hier gebrauchten Klammern sollen die unter der Voraussetzung, dass w als Function von P, Q, u. s. w. ausgedrückt ist [wie in (18)], genommenen partiellen Differentialquotienten von denjenigen der Gleichungen (12) unterscheiden, welche unter der Voraussetzung genommen werden, dass w, wie in (13), als eine Function von e, f, ... ausgedrückt ist. Wir erhalten auch, wie in § 313 (d),

$$(20)\qquad w = \tfrac{1}{2}(Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc),$$

welche Formel wir gleich anfangs hätten aufstellen können, da sie einfach den folgenden Satz ausdrückt: —

674. Mittelwerth der Reaction. — Der Mittelwerth der Reaction, welche von der Elasticität des festen Körpers hervorgerufen wird, sobald dieser aus seinem natürlichen Zustande in einen Zustand gebracht wird, in welchem die Deformation (e, f, g, a, b, c) beträgt, ist (wie aus der vorausgesetzten Anwendbarkeit des Princips

der Superposition mit Nothwendigkeit hervorgeht) genau gleich der Hälfte des Zwanges, dessen es bedarf, um den Körper in diesem deformirten Zustande zu erhalten.

675. Homogenität. Moleculare Constitution der Körper. — Ein Körper wird homogen genannt, wenn zwei beliebige congruente Theile desselben, deren einander entsprechende Linien parallel nach gleicher Richtung gewendet sind, nicht die geringste qualitative Verschiedenheit zeigen. Dass diese Bedingung ohne jede Beschränkung hinsichtlich der Kleinheit der Theile vollkommen erfüllt werde, lässt sich zwar vorstellen, wird aber nicht allgemein von irgend einem der uns bekannten festen oder flüssigen Körper als wahrscheinlich angenommen, wie sehr dieselben auch homogen zu sein scheinen. Alle Naturforscher sind, glauben wir, der Ansicht, dass die Structur der Körper eine moleculare ist, d. h. dass in zusammengesetzten Körpern, wie Wasser, Eis, Bergkrystall u. s. w., die sie bildenden elementaren Substanzen neben einander liegen oder in Gruppen von endlichen Dimensionen geordnet sind, und dass selbst in Körpern, die wir einfache nennen (d. h. die wir chemisch nicht in andere Substanzen zerlegen können), keine wahre Homogenität besteht. Mit anderen Worten, die herrschende Ansicht ist die, dass jede uns bekannte Art Materie ein mehr oder weniger grobkörniges Gefüge hat, sei es nun, dass ihre Molecüle sichtbar sind, ähnlich einem Mauerwerk aus Ziegeln oder Hausteinen, oder auch wie natürlicher Granit und Sandstein; oder aber dass ihre Molecüle zu klein [aber nicht unendlich klein*)] sind, als dass man sie sehen oder direct messen könnte, wie die scheinbar homogenen Metalle, die continuirlichen Krystalle, die Flüssigkeiten und die Gase. Wir müssen natürlich zu diesem Gegenstande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie zurückkehren und brauchen inzwischen nur zu bemerken, dass die Definition der Homogenität in praktischer Hinsicht für Massen von sehr grossem Umfange selbst auf Bausteine oder grobkörnige Felsmassen, bei geringerem Umfange noch auf Blöcke gewöhnlichen Sandsteins, bei einem sehr kleinen Umfange auf die anscheinend homogenen Metalle**), endlich, wenn man Gefüge von äusserster Feinheit und

---

*) Wahrscheinlich nicht unbestimmbar klein, obgleich ihre Dimensionen uns jetzt noch nicht bekannt sind.

**) Dieselben sind aber, wie neuerdings Deville und Van Troost gezeigt haben, bei hohen Temperaturen porös genug, einen sehr freien Durchgang der Gase zu gestatten.

unwahrnehmbarer Ungleichmässigkeit verlangt, auf die glasartigen Körper, die continuirlichen Krystalle, die festgewordenen Gummi, wie Gummi elasticum, Gummi arabicum, u. s. w. und auf die Flüssigkeiten angewandt werden kann.

676. Isotrope und äolotrope Substanzen. — Die Substanz eines homogenen festen Körpers heisst isotrop, wenn ein kugelförmiger Theil derselben unter der Einwirkung eines beliebigen physischen Agens keine qualitative Verschiedenheit zeigt, wie er auch gedreht werden möge. Oder, was auf dasselbe hinausläuft, ein aus irgend einer Lage in einem isotropen Körper herausgeschnittener Würfel zeigt in Beziehung auf jedes Paar paralleler Flächen dieselben Eigenschaften. Oder zwei aus beliebigen Lagen im Körper herausgeschnittene congruente Theile, die nicht der Bedingung der Parallelität unterworfen sind (§ 675), lassen sich nicht von einander unterscheiden. Eine Substanz, welche nicht isotrop ist, sondern in verschiedenen Richtungen qualitative Unterschiede zeigt, heisst äolotrop.

677. Ein Körper oder die Substanz eines homogenen festen Körpers kann in Beziehung auf eine Eigenschaft oder eine Classe von Eigenschaften isotrop, in Beziehung auf andere äolotrop sein.

So besitzt in der abstracten Dynamik ein starrer Körper oder eine Gruppe starr mit einander verbundener Körper, die innerhalb einer starren Kugelfläche enthalten und an derselben starr befestigt sind, kinetische Symmetrie (§ 285), wenn der Trägheitsmittelpunkt im Centrum der Kugel liegt und die Trägheitsmomente für alle Durchmesser gleich sind. Der Körper ist auch isotrop in Beziehung auf die Schwerkraft, wenn er centrobarisch (§ 526) ist, so dass das Centrum seiner Figur nicht bloss ein Trägheitsmittelpunkt, sondern ein wirkliches Attractionscentrum ist. Oder eine durchsichtige Substanz kann in verschiedenen ihrer Richtungen das Licht verschieden schnell durchlassen (d. h. doppelbrechend sein) und doch kann (bei den Krystallen, die wir kennen, geschieht dies auch allgemein) ein Würfel derselben den nämlichen Theil eines Büschels weissen Lichtes absorbiren, das senkrecht zu einem beliebigen Paar der Seitenflächen hindurchgeht. Oder die Substanz kann (wie ein Krystall, welches Dichroismus zeigt) in Beziehung auf die letzte oder auf beide angegebene optische Eigenschaften äolotrop sein und doch die Wärme in allen Richtungen auf gleiche Weise leiten.

678. Praktische Beschränkung des Begriffs der Isotropie. — Die Bemerkungen des § 675 hinsichtlich der Homogenität der Körper und des heterogenen Gefüges, das wir im Grunde genommen allen Substanzen zuzuschreiben haben, wie sehr sie auch homogen zu sein scheinen, ergeben einerseits entsprechende Beschränkungen, andererseits für die Praxis zulässige weitere Interpretationen des Begriffes „isotrop“.

679. Bedingungen der elastischen Isotropie. — Damit ein fester Körper elastisch isotrop sei, darf, wie wir erstens sehen, ein sphärischer oder würfelförmiger Theil desselben, wenn er einem (positiven oder negativen) überall gleichförmigen und zu seiner Oberfläche senkrechten Druck unterworfen wird, beim Nachgeben keine ungleichmässige Formänderung erleiden; d. h. er muss in allen Richtungen gleich stark zusammengedrückt oder ausgedehnt werden. Weiter muss ein aus irgend einem Theil des Körpers geschnittener Würfel, auf welchen in Ebenen, die zwei Paaren seiner Seiten parallel sind, eine tangentiale oder verzerrende Reaction (§ 662) wirkt, eine einfache Deformation oder Schiebung (§ 171) in derselben Richtung erleiden. Diese Deformation ist von keiner Verdichtung oder Ausdehnung begleitet*) und der Grösse nach sowohl für alle drei Wege, auf denen eine Reaction in dieser Weise auf einen Würfel einwirken kann, als auch für verschiedene aus verschiedenen Lagen des festen Körpers geschnittene Würfel dieselbe.

680. Maass des Widerstandes gegen eine Compression und gegen eine Verzerrung. — Die elastische Eigenschaft eines vollkommen elastischen, homogenen, isotropen Körpers wird also vollständig durch zwei Elemente definirt: durch seinen Widerstand gegen eine Compression und seinen Widerstand gegen eine Verzerrung. Die für die Einheit der Fläche des Körpers genommene Grösse des in allen Richtungen gleichförmigen Druckes, welcher erfordert wird, um eine festgesetzte sehr kleine Compression zu erzeugen, misst das erstere Element; die Grösse des verschieben-

*) Wir erinnern daran, dass die Form- und Volumenänderungen, mit denen wir es zu thun haben, so klein sind, dass wir sie als vollkommen superponirbar ansehen können; wenn also irgend ein verschiebender Zwang eine Verdichtung erzeugte, so würde ein entgegengesetzter verschiebender Zwang eine Ausdehnung hervorrufen, was eine Verletzung der Bedingung der Isotropie ist. Es ist aber möglich, dass ein verschiebender Zwang in einem wirklich isotropischen festen Körper eine dem Quadrate seiner Grösse proportionale Verdichtung oder Ausdehnung erzeugt, und es ist wahrscheinlich, dass solche Wirkungen beim Gummi elasticum, oder beim Kork, oder bei anderen Körpern, die grosse Deformationen oder Volumenänderungen bei bleibender Elasticität erleiden können, sehr merklich sind.

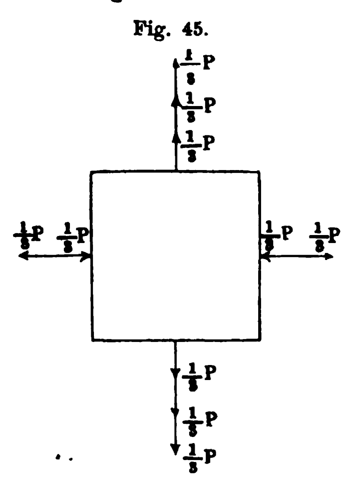
den Zwanges, welcher erfordert wird, um eine Verzerrung von festgesetzter Grösse zu erzeugen, misst das zweite Element. Das numerische Maass des ersten Elements ist der die Compression erzeugende Druck, dividirt durch die Volumenverminderung eines Theils der Substanz, welcher die Volumeneinheit ausfüllt, so lange keine Compression stattgefunden hat. Dieses Maass wird zuweilen die Volumenelasticität oder der Widerstand gegen Compression genannt. Sein reciproker Werth, d. i. die Grösse der Compression, welche die Volumeneinheit erfährt, dividirt durch den Druck, welcher die Compression erzeugt, oder, wie wir passend sagen können, die Compression der Volumeneinheit, genommen für die Einheit des Drucks, heisst gewöhnlich die Zusammendrückbarkeit. Das zweite Element, oder der Widerstand gegen eine Formänderung wird gemessen durch die (wie in § 662 gerechnete) tangentiale Reaction, dividirt durch die Grösse der Verzerrung oder Schiebung (§ 175), die sie erzeugt, und heisst die Starrheit oder die Gestaltselasticität der Substanz.

681. Aus § 169 folgt, dass eine Deformation, die aus einer einfachen Ausdehnung in einer Schaar paralleler Linien und einer gleich grossen einfachen Contraction in irgend einer anderen Schaar paralleler, zu den ersteren senkrechter Linien besteht, dasselbe ist, wie eine einfache Schiebung in jeder der beiden Schaaren von Ebenen, welche die beiden Parallelenschaaren unter einem Winkel von 45^0 schneiden, und das numerische Maass (§ 175) dieser Schiebung oder einfachen Verzerrung ist gleich dem Doppelten der Grösse der Elongation oder Contraction (jede natürlich für die Längeneinheit genommen). Auf ähnliche Weise sehen wir (§ 668), dass ein longitudinaler Zug (oder negativer Druck), welcher einer Linie parallel erfolgt, und ein gleich grosser longitudinaler positiver Druck, welcher irgend einer zur ersteren senkrechten Linie parallel erfolgt, einer verschiebenden Reaction tangentialer Zugkräfte (§ 661) äquivalent sind, welche den Ebenen, die jene Linien unter einem Winkel von 45^0 schneiden, parallel sind. Das numerische Maass dieser verschiebenden Reaction, welches (§ 662) die Grösse des tangentialen Zuges in jeder der beiden Ebenenschaaren ist, ist gleich der einfachen (nicht doppelten) Grösse des positiven oder negativen Drucks in Richtung der Normalen.

682. Die durch eine einzige longitudinale Deformation erzeugte Reaction. — Da demnach jede beliebige Reaction in einfache longitudinale Reactionen zerlegt werden kann, so haben

wir, um den Zusammenhang zwischen irgend einer Reaction und der sie erzeugenden Deformation zu finden, nur die Deformation zu bestimmen, welche eine einzelne longitudinale Reaction erzeugt. Das kann leicht auf folgende Weise geschehen: — Eine einfache longitudinale Reaction P ist einer gleichmässigen Spannung $^1/_3\ P$ in allen Richtungen äquivalent, die mit zwei verschiebenden Reactionen verbunden ist, von denen jede gleich $^1/_3\ P$ ist; beide Reactionen haben eine gemeinschaftliche Axe in der Linie der gegebenen longitudinalen Reaction, und ihre beiden anderen Axen sind zwei beliebige zu einander und zur ersteren senkrechte Linien. Die Fig. 45, welche in einer die erste Axe und eine der beiden letzteren Axen enthaltenden Ebene gezogen ist, zeigt hinlänglich die Zusammensetzung an; es sind darin nur die Kräfte nicht angegeben, welche zur Ebene der Zeichnung senkrecht sind.

Fig. 45.



Wenn also n die **Starrheit** und k den **Widerstand gegen eine Ausdehnung** [es ist dies dasselbe, wie der reciproke Werth der Zusammendrückbarkeit (§ 680)] bezeichnet, so wird die Wirkung eine in allen Richtungen gleiche Ausdehnung sein, welche sich für die Einheit des Volumens auf

$$\frac{^1/_3\ P}{k} \tag{1}$$

beläuft, verbunden mit zwei gleichen Verzerrungen, deren jede

$$\frac{^1/_3\ P}{n} \tag{2}$$

beträgt und zu Axen (§ 679) die Richtungen hat, die wir eben als die Axen der verschiebenden Reactionen angegeben haben.

683. Durch Benutzung der Angaben des § 681 kann man die Ausdehnung und die beiden Schiebungen, die wir so bestimmt haben, auf folgende Weise passend auf einfache longitudinale Deformationen reduciren: —

Die beiden Schiebungen zusammen machen eine Elongation in der Richtung der gegebenen Kraft P von der Grösse $\frac{1/_3 P}{n}$ und eine gleiche Contraction von der Grösse $\frac{1/_6 P}{n}$ in allen zur ersteren senkrechten Richtungen aus. Ferner ist die cubische Ausdehnung $\frac{1/_3 P}{k}$ mit einer in allen Richtungen gleichen linearen Ausdehnung $1/_9 \frac{P}{k}$ gleichbedeutend. Wir erhalten also im Ganzen

(3) die lineare Ausdehnung ist $= P\left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{9k}\right)$ in der Richtung der einwirkenden Reaction, und

die lineare Contraction ist $= P\left(\frac{1}{6n} - \frac{1}{9k}\right)$ in allen zur einwirkenden Reaction senkrechten Richtungen.

684. Verhältniss der seitlichen Contraction zur longitudinalen Ausdehnung. — Wenn demnach die Enden einer Säule, eines Stabes oder eines Drahtes von isotropischem Material von gleichen und entgegengesetzten Kräften angegriffen werden, so erleidet der Körper eine seitliche lineare Contraction, welche $\frac{3k - 2n}{2(3k + n)}$ der longitudinalen Ausdehnung beträgt, wo Contraction und Ausdehnung wie gewöhnlich für die Einheit des Längenmaasses genommen sind. Ein Beispiel der oben (§ 673) erwähnten falschen mathematischen Ergebnisse ist der berühmte Schluss von Navier und Poisson, dass dieses Verhältniss $1/_4$ sei, was erfordern würde, dass die Starrheit bei allen festen Körpern $3/_5$ des Widerstandes gegen eine Compression wäre. Dass dieser Satz falsch ist, hat zuerst Stokes*) aus vielen Beobachtungen geschlossen, welche bedeutende Abweichungen von demselben in vielen sehr bekannten Körpern zeigen und es höchst unwahrscheinlich machen, dass in irgend einer Classe von festen Körpern das Verhältniss zwischen der Starrheit und dem Widerstande gegen eine Compression sich einer constanten Grenze nähere. So bieten uns helle elastische Gallerte und Gummi elasticum bekannte Beispiele isotroper homogener fester Körper, deren Zusammendrückbarkeit wahrscheinlich nur äusserst wenig von der des Wassers verschieden ist, während sie

*) On the Friction of Fluids in Motion, and the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. — Trans. Camb. Phil. Jour., April 1845. Siehe auch Camb. and Dub. Math. Jour., March 1848.

sich hinsichtlich der Starrheit („Steifheit") bedeutend von einander unterscheiden. Die Zusammendrückbarkeit des Wassers ist $^1/_{308000}$ für jedes (engl.) Pfund, was auf den (engl.) Quadratzoll drückt (oder $^1/_{216555}$ per Gramm und Quadratmillimeter); der durch den reciproken Werth dieser Grösse gemessene Widerstand gegen eine Compression ist offenbar viele hundertmal so gross, als der absolute Betrag der Starrheit des steifesten jener Stoffe. Wenn demnach eine Säule aus einer dieser Substanzen durch einander das Gleichgewicht haltende, an ihren Enden angebrachte Kräfte zusammengepresst oder ausgezogen wird (oder wenn ein Band von Gummi elasticum ausgezogen wird), ohne dass die Grenzen der Elasticität überschritten werden, so erleidet sie keine merkliche Volumenänderung, obschon ihre Länge eine bedeutend andere wird. Daher muss die entsprechende Ausdehnung oder Contraction irgend eines Querdurchmessers wenig von der Hälfte der longitudinalen Contraction oder Ausdehnung verschieden sein, und die Substanzen dieser Art können hinsichtlich aller gewöhnlichen Reactionen in praktischer Beziehung als unzusammendrückbare elastische feste Körper angesehen werden. Stokes gab Gründe an, die zu der Meinung führten, dass auch die Metalle im Allgemeinen einen im Verhältniss zu ihrer Starrheit grösseren Widerstand gegen eine Compression besitzen, als aus der falschen Theorie sich ergeben würde, obgleich die Abweichung für sie viel geringer als für die gallertartigen Körper ist. Was Stokes nur wahrscheinlich gemacht hatte, wurde bald darauf experimentell von Wertheim bewiesen, welcher fand, dass in Stäben, die nur von longitudinalen Kräften angegriffen werden, das Verhältniss der seitlichen zur longitudinalen Aenderung der linearen Dimensionen für Glas und Messing ungefähr $^1/_3$ ist; ebenso erhielt Kirchhoff durch eine wohl ersonnene experimentelle Methode 0,387 als Werth dieses Verhältnisses für Messing und 0,294 für Eisen. Als wir selbst neuerdings*) die Torsions- und die longitudinale Starrheit (§§ 596, 599, 686) eines Kupferdrahtes massen, ergab sich, dass jenes Verhältniss für Kupfer wahrscheinlich zwischen 0,226 und 0,441 liegt.

685. Alle diese Resultate zeigen an, dass die Starrheit kleiner ist im Verhältniss zur Zusammendrückbarkeit, als sie nach Navier's und Poisson's Theorie sein sollte. Viele Naturforscher, welche die Nothwendigkeit einsahen, jene Theorie als unanwendbar

*) On the Elasticity and Viscosity of Metals (W. Thomson). Proc. R. S. May 1865.

auf die gewöhnlichen festen Körper aufzugeben, vermutheten nun, dieselbe könne als correct angesehen werden für einen idealen vollkommenen festen Körper, und sie gebe eine Grösse der Starrheit an, die von keiner realen Substanz ganz erreicht werde, der aber einige der starrsten festen Körper (wie z. B. Eisen) sich näherten. Es ist aber kaum möglich, ein Stück Kork in der Hand zu halten, ohne die Verkehrtheit dieses letzten Versuchs zur Aufrechthaltung einer Theorie zu bemerken, die nie eine gute Grundlage hatte. Wir haben Korksäulen verschiedener Formen (darunter befanden sich cylindrische Stücke, die auf die gewöhnliche Weise für Flaschen geschnitten waren) mittels einer hydraulischen Presse in der Richtung ihrer Länge zusammengepresst und sowohl vor wie nach dieser Operation sorgfältige Messungen ausgeführt: Es stellte sich heraus, dass die Aenderung der seitlichen Dimensionen unmerklich ist, sowohl wenn innerhalb der Grenzen der Elasticität eine kleine longitudinale Contraction und darauf eine Rückkehr zur früheren Länge erfolgt, als auch wenn man so beträchtliche longitudinale Contractionen vornimmt, dass der Körper nur $^1/_6$ oder $^1/_8$ seiner anfänglichen Länge behält. Es ist auf diese Weise entscheidend bewiesen, dass im Verhältniss zum Widerstande gegen eine Compression Kork weit starrer, während Metalle, Glas und Gallerte sämmtlich weniger starr sind, als der vorausgesetzte „vollkommen feste Körper“, und damit ist die gänzliche Werthlosigkeit jener Theorie experimentell dargelegt.

686. Young's Modulus. — Der Elasticitätsmodulus eines Stabes, Drahtes, einer Faser, eines dünnen Fadens, eines Bandes oder einer Schnur von irgend einem Material (dessen Substanz nicht isotrop, ja nicht einmal homogen innerhalb eines Normalschnittes zu sein braucht) [wie z. B. ein Glas- oder Holzstab, ein Metalldraht, ein Gummiband, ein Zwirnsfaden, eine Schnur, ein Band] ist ein von Dr. Thomas Young eingeführter Ausdruck, mit dem das bezeichnet werden soll, was wir zuweilen auch die longitudinale Starrheit nennen, d. i. der Quotient, den man erhält, wenn man die einfach longitudinal wirkende Kraft, welche zur Erzeugung einer unendlich kleinen Ausdehnung oder Zusammenziehung erfordert wird, durch die, wie gewöhnlich, für die Längeneinheit gerechnete Grösse dieser Ausdehnung oder Zusammenziehung dividirt.

687. Gewichtsmodulus und Länge des Modulus. — Manchmal empfiehlt es sich, den Modulus nicht in Gewichtseinheiten anzugeben, sondern ihn durch das Gewicht der Längeneinheit

des Stabes, Drahtes oder Fadens auszudrücken. Den so gerechneten Modulus oder, wie er von einigen Schriftstellern genannt wird, die Länge des Modulus erhält man natürlich, indem man den Gewichtsmodulus durch das Gewicht der Längeneinheit dividirt. Er ist in vielen Anwendungen der Theorie der Elasticität von Nutzen, wie z. B. in dem folgenden Resultat, welches später bewiesen werden wird: — Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung longitudinaler Vibrationen (wie der Schallwellen) längs eines Stabes oder einer Schnur ist gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erreicht hat, der von einer der halben Länge des Modulus gleichen Höhe herabgefallen ist*).

688. Der specifische Modulus eines isotropen Körpers. Volumen- und Krafteinheiten zur Bestimmung desselben. — Der specifische Elasticitätsmodulus einer isotropen Substanz, oder, wie er meist einfach genannt wird, der Elasticitätsmodulus der Substanz ist der Elasticitätsmodulus eines Stabes der Substanz, welcher irgend eine festgesetzte Grösse des Querschnitts hat. Wenn diese so gross ist, dass das Gewicht der Längeneinheit die Gewichtseinheit ist, so ist der Modulus der Substanz nichts anderes, als die Länge des Modulus irgend eines Stabes derselben: eine Berechnungsweise, deren Anwendung, wie wir gesehen haben, manche Vortheile gewährt. Es ist jedoch gebräuchlicher, eine gewöhnliche Flächeneinheit als die Schnittfläche des in der Definition benutzten Stabes anzunehmen. Es muss auch eine bestimmte Festsetzung in Betreff der Einheit getroffen werden, durch welche die Kraft gemessen werden soll; es kann dies entweder die absolute Einheit (§ 223) oder die Gravitationseinheit für einen bestimmten Ort, d. h. (§ 226) das Gewicht sein, welches

*) Die in Rede stehenden Vibrationen müssen eine Wellenlänge haben, welche sehr gross gegen die Dicke des Stabes ist, so dass die Trägheit keinen merklichen Einfluss auf die senkrecht zur Längsrichtung erfolgenden Zusammenziehungen und Ausdehnungen ausübt, welche (wofern nicht die Substanz in dieser Hinsicht die eigenthümliche Beschaffenheit hat, welche der Kork zeigt, § 684) zugleich mit den Vibrationen erfolgen. Auch werden wir in der Thermodynamik sehen, dass die durch die variirenden Deformationen erzeugten Elasticitätsänderungen Temperaturänderungen hervorrufen, welche in den gewöhnlichen festen Körpern die Geschwindigkeit der Fortleitung longitudinaler Vibrationen merklich grösser machen, als die nach der im Text angegebenen Regel, unter Benutzung des dort definirten statischen Modulus, berechnete Geschwindigkeit ist. Wir werden die Wärmewirkung dadurch in Rechnung zu ziehen lernen, dass wir einen bestimmten statischen Modulus oder kinetischen Modulus je nach den Umständen jedes gegebenen Falles in Anwendung bringen.

die Masseneinheit an diesem Orte hat. Die Experimentatoren haben bisher bei der Mittheilung ihrer Resultate die Gravitationseinheit angewandt, jeder für seinen eigenen Beobachtungsort. Uebrigens ist die bis jetzt erzielte Genauigkeit kaum in einem Falle so gross, dass man wegen der Verschiedenheit der Schwere an den verschiedenen Beobachtungsorten Correctionen anzubringen hätte.

689. Die nützlichste und allgemein passende Bestimmung des Elasticitätsmodulus einer Substanz ist die Bestimmung in Grammgewicht per Quadratcentimeter. Ist der Modulus auf diese Weise ausgedrückt, so hat man ihn nur durch das specifische Gewicht der Substanz zu dividiren, um die Länge des Modulus zu erhalten. Da jedoch unglücklicher Weise bei der Angabe praktischer und sogar wissenschaftlicher Resultate manchmal noch britische Maasse angewendet werden, so werden wir Gelegenheit haben, den Modulus in Pfunden per Quadratzoll oder Quadratfuss und die Länge des Modulus in Fuss auszudrücken.

690. Meistens ist in englischen Lehrbüchern der Mechanik nach Pfunden per Quadratzoll gerechnet. Den so ausgedrückten Modulus muss man durch das Gewicht von 12 Cubikzoll des festen Körpers, oder durch das Product seines specifischen Gewichts in 0,4337 *) dividiren, um die Länge des Modulus in englischen Fuss zu erhalten.

Um von Pfund per Quadratzoll auf Gramm per Quadratcentimeter zu reduciren, hat man mit 70,31 zu multipliciren oder durch

---

*) Dieser Decimalbruch ist das Gewicht von 12 Cubikzoll Wasser, angegeben in englischen Pfunden. Der eine grosse Vorzug des französischen Maasssystems ist der, dass die Masse der Volumeneinheit (1 Cbcm.) Wasser bei der Temperatur seiner grössten Dichtigkeit (3,945^0 C.) bis zu einem für fast alle Zwecke der Praxis genügenden Grad der Genauigkeit die Einheit (1 Gramm) ist. Nach diesem System haben also die Dichtigkeit und das specifische Gewicht eines Körpers dieselbe Bedeutung, während nach dem britischen System die Dichtigkeit durch eine Zahl ausgedrückt wird, die man erhält, wenn man das specifische Gewicht mit einer Zahl multiplicirt, welche von der gewählten Volumeneinheit (Cubikzoll, Cubikfuss, Cubikelle, Cubikmeile) und der gewählten Masseneinheit (Gran, Scrupel, Drachme, Unze, Pfund, Stein, Centner, Tonne, u. s. w.) abhängig ist. Es ist eine bemerkenswerthe Erscheinung, welche mehr in das Bereich der moralischen und der socialen, als der Naturwissenschaft, gehört, dass ein Volk, dem doch gesunder Menschenverstand nicht abzusprechen ist, sich freiwillig, wie die Engländer so lange gethan haben, in jeder mit Messungen verbundenen Handlung des täglichen Geschäfts oder der wissenschaftlichen Arbeit zu unnöthiger schwerer Arbeit verdammt hat, von der alle übrigen europäischen Nationen sich frei gemacht haben. Herr Professor W. H. Miller in Cambridge hatte die Güte, uns mitzutheilen, dass ein sehr sorgfältiger Vergleich der Normalmaasse, den Kupffer aus Petersburg angestellt, für das Gewicht eines Cbdm. Wassers bei der Temperatur seiner grössten Dichtigkeit 1000,013 Gramm ergeben hat.

0,014223 zu dividiren. Die französischen Ingenieure drücken ihre Resultate allgemein in Kilogramm per Quadratmillimeter aus und bringen dieselben so auf passendere Zahlen; letztere sind $^1/_{100000}$ der unbequemen (grossen) Zahlen, welche die Moduln in Gramm per Quadratcentimeter geben.

691. Dieselben Betrachtungen hinsichtlich der Einheiten, reducirenden Factoren und Benennungen lassen sich auf den Widerstand eines elastischen festen oder flüssigen Körpers gegen Compression und auf die Starrheit (§ 680) eines isotropen Körpers, oder allgemein auf jeden der 21 Coefficienten, welche [§ 673 (14)] die Reactionen durch die Deformationen ausdrücken, sowie auf den reciproken Werth jedes dieser 21 Coefficienten, wodurch [§ 673 (16)] die Deformation durch die Reaction ausgedrückt wird, endlich auch auf den Young'schen Modulus anwenden.

692. Die bei einer einfachen longitudinalen Deformation stattfindende Reaction. — In §§ 681, 682 untersuchten wir die Wirkung einer einfachen longitudinalen Kraft, die eine Ausdehnung in ihrer eigenen Richtung und eine Zusammenziehung in den Linien erzeugt, die zu ihrer Richtung senkrecht sind. Wenn wir statt der Deformationen Reactionen und statt der Reactionen Deformationen setzen, so können wir dasselbe Verfahren zur Bestimmung der longitudinalen und der seitlichen Zugkräfte anwenden, die erfordert werden, um in einem Stabe oder einem festen Körper von beliebiger Form eine einfache longitudinale Deformation (d. i. eine in einer Richtung erfolgende Ausdehnung, die von keiner Aenderung der Dimensionen in den zu dieser Richtung senkrechten Linien begleitet ist) zu erzeugen.

So ist eine einfache longitudinale Deformation e einer von keiner Formänderung begleiteten cubischen Ausdehnung e (oder einer in allen Richtungen gleichen linearen Ausdehnung $^1/_3 e$) und zwei Schiebungen äquivalent, von denen jede aus der Ausdehnung $^1/_3 e$ in der gegebenen Richtung und der Zusammenziehung $^1/_3 e$ in einer der beiden Richtungen besteht, die zur ersteren Richtung und zu einander senkrecht sind. Um die cubische Ausdehnung e allein zu erzeugen, ist (§ 680) ein in allen Richtungen gleicher Zug ke in der Richtung der Normalen erforderlich, und zur Hervorbringung jeder der beiden Schiebungen bedarf es, da das Maass (§ 175) einer jeden $^2/_3 e$ ist, eines verschiebenden Zwanges von der Grösse $n . ^2/_3 e$, welcher aus tangentialen Zugkräften besteht, von denen jede $n . ^1/_3 e$

beträgt, und von denen die eine positiv (nach aussen hin ziehend) ist und in der Linie der gegebenen Elongation wirkt, während die andere negativ (nach innen zu drückend) ist und senkrecht zur ersteren wirkt. Wir erhalten also im Ganzen: —

(4) $\begin{cases} \text{Der normale Zug ist} = (k + \frac{4}{3} n)\, e \text{ in der Richtung der gegebenen Dehnung, und} \\ \text{der normale Zug ist} = (k - \frac{2}{3} n)\, e \text{ in jeder zur gegebenen Dehnung senkrechten Richtung.} \end{cases}$

693. Reactionscomponenten, ausgedrückt durch die Deformation. — Setzen wir jetzt voraus, es sei einem Körper irgend eine nach § 669 ausgedrückte mögliche unendlich kleine Deformation (e, f, g, a, b, c) gegeben, so wird die Reaction (P, Q, R, S, T, U), deren es bedarf, um den Körper in diesem deformirten Zustande zu erhalten, durch die folgenden Formeln ausgedrückt, die man erhält, indem man successive § 692 (4) auf die Componenten e, f, g und § 680 auf a, b, c einzeln anwendet: —

$$(5)\quad \begin{cases} S = na, \quad T = nb, \quad U = nc, \\ P = \mathfrak{A}e + \mathfrak{B}(f + g), \\ Q = \mathfrak{A}f + \mathfrak{B}(g + e), \\ R = \mathfrak{A}g + \mathfrak{B}(e + f), \\ \text{wo} \\ \left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = k + \dfrac{4n}{3} \\ \mathfrak{B} = k - \dfrac{2n}{3} \text{ ist} \end{array}\right\} n = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}). \end{cases}$$

694. Deformationscomponenten, ausgedrückt durch die Reaction. — Auf ähnliche Weise erhalten wir durch § 680 und § 682 (3)

$$(6)\quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{n} S, \; b = \dfrac{1}{n} T, \; c = \dfrac{1}{n} U, \\ Me = \{P - \sigma(Q + R)\}, \\ Mf = \{Q - \sigma(R + P)\}, \\ Mg = \{R - \sigma(P + Q)\}, \\ \text{wo } M = \dfrac{9nk}{3k + n} \\ \text{und } \dfrac{m - n}{2m} = \sigma = \dfrac{3k - 2n}{2(3k + n)} = \frac{1}{2}\dfrac{M}{n} - 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

als die Formeln, welche die Deformation (e, f, g, a, b, c) durch die Reaction (P, Q, R, S, T, U) ausdrücken. Dieselben sind natürlich bloss die algebraischen Umkehrungen der Formeln (5) und hätten (§ 673) durch Auflösung der Gleichungen (5) für e, f, g, a, b, c als Unbekannte gefunden werden können. M ist hier eingeführt, um Young's Modulus (§ 683) zu bezeichnen, und m wird unten in § 698 (5) definirt werden.

695. Gleichung der Energie für einen isotropen Körper. — Um die Gleichung der Energie für eine isotrope Substanz aufzustellen, können wir die allgemeine Formel [§ 673 (20)]

$$w = {}^1/_2\,(Pe + Qf + Rg + Sa + Tb + Uc)$$

nehmen und aus derselben mittels § 693 (5) P, Q, u. s. w., oder auch mittels § 694 (6) e, f, u. s. w. eliminiren. Wir finden auf diese Weise

$$(7)\quad \begin{cases} 2w = \left(k + \frac{4n}{3}\right)(e^2 + f^2 + g^2) + 2\left(k - \frac{2n}{3}\right)(fg + ge + ef) \\ \qquad\qquad + n(a^2 + b^2 + c^2 \\ \quad = {}^1/_3\left\{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3k}\right)(P^2 + Q^2 + R^2) - 2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3k}\right)(QR + RP + P \right. \\ \qquad\qquad + \frac{1}{n}(S^2 + T^2 + \end{cases}$$

696. Fundamentalprobleme der mathematischen Theorie. — Die mathematische Theorie des Gleichgewichts eines elastischen festen Körpers bietet die folgenden allgemeinen Probleme dar: —

Auf die Substanz eines festen Körpers, der im ungestörten Zustande eine beliebig gegebene Form hat, wirken Kräfte ein, die auf eine beliebig gegebene Weise in ihm vertheilt sind, und auf seiner Oberfläche werden willkürlich Verschiebungen erzeugt oder Kräfte angebracht. Man soll die Verschiebung jedes Punktes der Substanz bestimmen.

Dies Problem ist vollständig für eine Schale von homogener isotroper Substanz gelöst worden, die im ungestörten Zustande von concentrischen Kugelflächen begrenzt wird (§ 735), aber noch nicht für einen Körper von einer anderen Form. Die Beschränkungen, unter denen Lösungen für andere Fälle (dünne Platten und Stäbe) erlangt sind, die, wie wir gesehen haben, zu praktisch wich-

tigen Resultaten führen, sind oben (§§ 588, 632) angegeben worden. Der Beweis der oben anticipirten Gesetze (§§ 591, 633) wird auch eine unserer Anwendungen der allgemeinen Gleichungen für das innere Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers sein, zu deren Bestimmung wir uns jetzt wenden.

697. Bedingungen des inneren Gleichgewichts. — Man kann von jedem Theil im Innern eines elastischen festen Körpers annehmen, er werde vollkommen starr (§ 564); durch diese Annahme wird das Gleichgewicht weder des Theils selbst, noch der um ihn her liegenden Masse gestört. Folglich muss der von der ihn einschliessenden Masse ausgeübte Zug, den man als ein auf seine Oberfläche vertheiltes Kraftsystem anzusehen hat, im Verein mit den auf die Substanz des betrachteten Theils von aussen einwirkenden Kräften den Bedingungen des Gleichgewichts der Kräfte genügen, die auf einen starren Körper wirken. Drückt man dies für ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped des Körpers aus, so erhält man die allgemeine Differentialgleichung des inneren Gleichgewichts eines elastischen festen Körpers. Es ist zu beachten, dass hier drei Gleichungen genügen, da die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräftepaare wegen der oben (§ 661) hergeleiteten Relation zwischen den sechs Paaren tangentialer Zugcomponenten, die auf die sechs Seitenflächen des Parallelepipeds wirken, von selbst erfüllt sind.

Es sei (x, y, z) irgend ein Punkt im Innern des festen Körpers und δx, δy, δz die den rechtwinkligen Coordinatenaxen beziehungsweise parallelen Kanten eines unendlich kleinen Parallelepipeds des Körpers, welches jenen Punkt zum Centrum hat.

Wenn P, Q, R, S, T, U die Reaction in (x, y, z) bezeichnen (§ 662), so werden die Mittelwerthe der auf die Flächen des Parallelepipeds wirkenden Zugcomponenten (siehe die Tabelle des § 669) folgende sein: —

$$\text{auf die beiden Flächen } \delta y\,\delta z \text{ wirken} \begin{cases} \pm\left(P \pm \dfrac{dP}{dx}\cdot \tfrac{1}{2}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z & \text{parallel } OX, \\ \pm\left(U \pm \dfrac{dU}{dx}\cdot \tfrac{1}{2}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z & \quad\text{„}\quad OY, \\ \pm\left(T \pm \dfrac{dT}{dx}\cdot \tfrac{1}{2}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z & \quad\text{„}\quad OZ. \end{cases}$$

Nehmen wir die symmetrischen Ausdrücke für die auf die beiden anderen Flächenpaare wirkenden Zugkräfte und summiren für alle Flächen alle den drei Axen einzeln parallelen Componenten, so erhalten wir

$$\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dU}{dy}+\frac{dT}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \text{ parallel } OX$$

$$\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dS}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \quad \text{„} \quad OY,$$

$$\left(\frac{dT}{dx}+\frac{dS}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \quad \text{„} \quad OZ.$$

Es mögen nun X, Y, Z die für die Volumeneinheit genommenen Componenten der auf die Substanz im Punkte (x, y, z) einwirkenden Kraft bezeichnen; für den kleinen betrachteten Theil sind dann diese Componenten $X\delta x\delta y\delta z$, $Y\delta x\delta y\delta z$, $Z\delta x\delta y\delta z$. Wenn wir diese Ausdrücke zu den oben gefundenen entsprechenden Componenten der Zugkräfte addiren, die erhaltenen Summen gleich Null setzen und den Factor $\delta x\ \delta y\ \delta z$ unterdrücken, so ergibt sich

$$2) \quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dx}+\dfrac{dU}{dy}+\dfrac{dT}{dz}+X=0 \\[2mm] \dfrac{dU}{dx}+\dfrac{dQ}{dy}+\dfrac{dS}{dz}+Y=0 \\[2mm] \dfrac{dT}{dx}+\dfrac{dS}{dy}+\dfrac{dR}{dz}+Z=0; \end{cases}$$

dies sind die allgemeinen Gleichungen der zum Bestehen des Gleichgewichts erforderten inneren Reaction.

Wenn wir für P, Q, R, S, T, U die linearen Functionen von e, f, g, a, b, c einsetzen, welche wir in § 673 (14) für jene Grössen hergeleitet haben, so erhalten wir die Gleichungen der inneren Deformation. Und wenn wir vermittels § 670 (6) e, f, g, a, b, c eliminiren, so erhalten wir für die Componenten (α, β, γ) der Verschiebung eines beliebigen inneren Punktes, ausgedrückt durch die Coordinaten (x, y, z) seiner anfänglichen Lage im Körper, drei lineare partielle Differentialgleichungen zweiten Grades, welche die Gleichungen des inneren Gleichgewichts in ihrer letzten Form sind. Wir bemerken noch, dass, wenn die Coefficienten (e, e), (e, f), u. s. w. nicht als Constante, sondern als gegebene Functionen von x, y, z angesehen werden, die Betrachtung nicht auf einen homogenen Körper beschränkt bleibt.

698. Die Gleichungen des inneren Gleichgewichts involviren, dass die auf jeden als starr angesehenen Theil wirkenden Kräfte den sechs Gleichungen des Gleichgewichts in einem starren Körper genügen. — Da diese Gleichungen für das Gleichgewicht des Körpers erforderlich und hinreichend sind, so muss, ihre Gültigkeit vorausgesetzt, die Bedingung des § 697 für jeden beliebigen Körper und jeden nicht unendlich grossen Theil desselben erfüllt sein; dies lässt sich leicht bewahrheiten.

Es bezeichne $\iiint$ eine Integration durch den Raum eines beliebigen Theils des festen Körpers, $d\sigma$ ein Element der diesen Theil um-

grenzenden Fläche und $\left[\int\int\right]$ eine Integration, die sich über diese ganze Fläche erstreckt. Es ist dann

$$\int\int\int X\,dx\,dy\,dz = -\int\int\int\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dU}{dy}+\frac{dT}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

Wenn wir jedes Glied der rechten Seite einmal integriren, die Grenzen wie im Zusatz *A* gehörig berücksichtigen und die Richtungscosinus der durch $d\sigma$ gehenden Normalen mit l, m, n bezeichnen, so folgt

$$\int\int\int X\,dx\,dy\,dz = -\left[\int\int(P\,dy\,dz + U\,dz\,dx + T\,dx\,dy)\right]$$
$$= -\left[\int\int(Pl + Um + Tn)\,d\sigma\right],$$

mithin [§ 662 (1)]

$$\int\int\int X\,dx\,dy\,dz + \left[\int\int F\,d\sigma\right] = 0. \tag{3}$$

Weiter erhalten wir

$$\int\int\int(yZ - zY)\,dx\,dy\,dz$$
$$= -\int\int\int\left\{y\left(\frac{dT}{dx}+\frac{dS}{dy}+\frac{dR}{dz}\right) - z\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dS}{dz}\right)\right\}dx\,dy\,dz.$$

Wenn wir jetzt partiell integriren und weiter wie im Zusatz A) verfahren, so ergibt sich

$$\int\int\int y\,\frac{dS}{dy}\,dx\,dy\,dz = \left[\int\int y\,S\,m\,d\sigma\right] - \int\int\int S\,dx\,dy\,dz$$

und

$$\int\int\int z\,\frac{dS}{dz}\,dx\,dy\,dz = \left[\int\int z\,S\,n\,d\sigma\right] - \int\int\int S\,dx\,dy\,dz.$$

Daraus folgt

$$\int\int\int\left(y\,\frac{dS}{dy} - z\,\frac{dS}{dz}\right)dx\,dy\,dz = \left[\int\int(y\,S\,m - z\,S\,n)\,d\sigma\right].$$

Wenn man dies im vorhergehenden Ausdruck benutzt, jedes der übrigen Glieder wie oben einmal einfach integrirt und auf § 662 (1) Rücksicht nimmt, so erhält man

$$\int\int\int(yZ - zY)\,dx\,dy\,dz + \left[\int\int(yH - zG)\,d\sigma\right] = 0. \tag{4}$$

Damit sind die sechs Gleichgewichtsgleichungen hergeleitet. Es sind dies (3), (4) und die symmetrischen Gleichungen in y und z.

Vereinfachung der Gleichungen für einen isotropen festen Körper. — Für einen isotropen festen Körper werden die Gleichungen (2) natürlich viel einfacher. Wenn man unter Anwendung von § 693 (5) e, f, g, a, b, c vermittels § 670 (6) eliminirt, die erhaltenen Glieder passend gruppirt und

$$m = k + \tfrac{1}{3}n \tag{5}$$

setzt, so ergibt sich

$$
(6)\quad \begin{cases}
m \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy} + \dfrac{d\gamma}{dz}\right) + n\left(\dfrac{d^2\alpha}{dx^2} + \dfrac{d^2\alpha}{dy^2} + \dfrac{d^2\alpha}{dz^2}\right) + X = 0 \\
m \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy} + \dfrac{d\gamma}{dz}\right) + n\left(\dfrac{d^2\beta}{dx^2} + \dfrac{d^2\beta}{dy^2} + \dfrac{d^2\beta}{dz^2}\right) + Y = 0 \\
m \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy} + \dfrac{d\gamma}{dz}\right) + n\left(\dfrac{d^2\gamma}{dx^2} + \dfrac{d^2\gamma}{dy^2} + \dfrac{d^2\gamma}{dz^2}\right) + Z = 0,
\end{cases}
$$

oder, wie wir kurz schreiben können,

$$
(7)\quad \begin{cases}
m \dfrac{d\delta}{dx} + n\, \nabla^2\alpha + X = 0 \\
m \dfrac{d\delta}{dy} + n\, \nabla^2\beta + Y = 0 \\
m \dfrac{d\delta}{dz} + n\, \nabla^2\gamma + Z = 0,
\end{cases}
$$

wenn wir

$$
(8)\quad \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dz} = \delta
$$

und

$$
(9)\quad \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} = \nabla^2
$$

setzen, so dass δ die Grösse der von der Substanz erlittenen Ausdehnung und ∇^2 das schon oben [Zusatz A und B, §§ 491, 492, 499, u. s. w.] benutzte Symbol ist.

699. St. Venant's Anwendung auf Torsionsprobleme. — Eine der schönsten Anwendungen, die bis jetzt von den allgemeinen Gleichungen des inneren Gleichgewichts eines elastisch-festen Körpers gemacht worden sind, ist die von St. Venant „über die Torsion der Prismen" *). Auf das eine Ende eines langen geraden prismatischen Stabes, Drahtes oder eines vollen oder hohlen Cylinders von beliebiger Form wirkt in einer zur Länge senkrechten Ebene ein gegebenes Kräftepaar ein, während das andere Ende festgehalten wird: man soll die Grösse der erzeugten Drillung (§ 120) und die Vertheilung der Deformation und elastischen Reaction durch das Prisma bestimmen. Die Bedingungen, die hier erfüllt werden müssen, bestehen darin, dass die resultirende Wirkung zwischen den zu beiden Seiten eines jeden Normalschnitts liegenden Substanztheilen ein dem gegebenen Kräftepaar gleiches Kräftepaar in der Normalebene ist. Die zur Lösung des Problems erforderliche Arbeit wird bedeutend vereinfacht, wenn wir erst die folgenden einleitenden Sätze beweisen: —

*) Mémoires des Savants Etrangers. 1855. „De la Torsion des Prismes, avec des Considérations sur leur Flexion", etc.

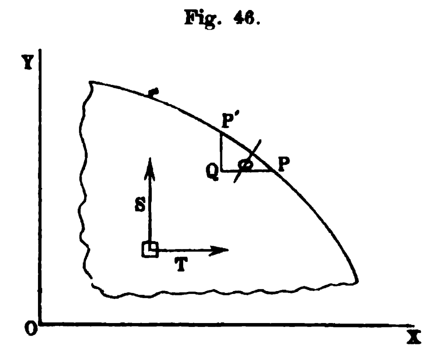
700. Hülfssätze. — Auf die Umgrenzung eines (äolotropen oder isotropen) Körpers wirken von aussen her Kräfte in einer solchen Weise ein, dass in seinem Innern kein Zug in Richtung der Normalen auf eine der Ebenen stattfindet, welche einer gegebenen Ebene XOY parallel oder zu derselben senkrecht sind; dies involvirt natürlich, dass keine verschiebende Reaction auftritt, deren Axen in dieser Ebene oder ihr parallel sind, und dass die ganze Reaction in jedem Punkte des Körpers eine einfache verschiebende Reaction ist, welche aus tangentialen Kräften in einer gewissen Richtung in der XOY parallelen Ebene und in der zu dieser Richtung senkrechten Ebene besteht. Dann gelten folgende Sätze: —

(I.) Die innere verschiebende Reaction muss in allen Theilen des festen Körpers, welche in irgend einer zur Ebene XOY senkrechten Linie liegen, gleich und gleichgerichtet sein.

(II.) Wenn, wie vorausgesetzt wird, der Zug in jedem Punkte jeder zur Ebene XOY senkrechten Fläche eine Kraftvertheilung in Linien ist, die zu dieser Ebene senkrecht sind, so muss der Gesammtbetrag derselben für jede zu XOY senkrechte prismatische oder cylindrische Oberfläche, die von XOY parallelen Ebenen geschlossen wird, Null sein.

(III.) Wenn man die innerhalb der prismatischen Fläche und der in (II.) angegebenen Grenzebenen enthaltene Masse für einen Augenblick (§ 564) als starr ansieht, so wird das System der in (II.) erwähnten Zugkräfte ein Kräftepaar ausmachen, dessen Moment, dividirt durch den Abstand jener Grenzebenen von einander, gleich der Resultante der auf die Fläche einer jeden dieser Ebenen wirkenden Zugkräfte, und dessen Ebene den Linien dieser resultirenden Kräfte parallel ist. Mit anderen Worten: das in Beziehung auf irgend eine Linie (OY oder OX) in der Ebene XOY genommene Moment des über die in (II.) beschriebene prismatische Fläche vertheilten Kraftsystems ist gleich der Summe der zu derselben Linie senkrechten Componenten (T oder S) des Zuges in

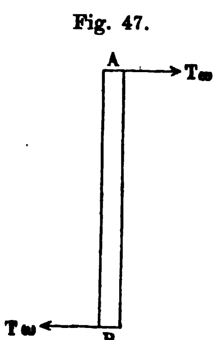
Fig. 46.



jeder der beiden Grenzebenen, multiplicirt mit dem Abstande zwi-
schen diesen Ebenen.

Um (I.) zu beweisen, sehen wir für einen Augenblick (§ 564)
ein unendlich kleines Prisma AB (von der Schnittfläche ω), das z
XOY senkrecht ist, und dessen ebene End-
flächen A, B der Ebene XOY parallel sind,
als starr an. Da auf seine Seiten (oder die
cylindrische Grenzfläche) keine zu seiner
Länge senkrechten Kräfte wirken, so erfor-
dert (§ 551, I.) sein Gleichgewicht, soweit es
sich um eine Bewegung in der Richtung ir-
gend einer zu seiner Länge senkrechten
Linie OX handelt, dass die Componenten
der auf seine Enden wirkenden Zugkräfte
gleich und entgegengesetzt gerichtet seien.
Folglich müssen, um uns der Bezeichnung
des § 662 zu bedienen, die Componenten T der verschiebenden Reac-
tion in A und B und aus demselben Grunde die Reactionscompo-
nenten S gleich sein.

Fig. 47.



Um (II.) und (III.) zu beweisen, haben wir nur zu bemerken,
dass das Gleichgewicht des in (III.) beschriebenen starren Prismas
nach § 551, I. und II. das Bestehen dieser Sätze fordert.

Analytisch gelangen wir zu diesen Sätzen auf folgende Weise: — Da
nach der Voraussetzung $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $P=0$, $Q=0$, $R=0$,
$U=0$ ist, so liefern die allgemeinen Gleichungen (2) des § 697

$$\frac{dT}{dz}=0,\quad \frac{dS}{dz}=0 \tag{1}$$

und

$$\frac{dT}{dx}+\frac{dS}{dy}=0. \tag{2}$$

Nun zeigt (1), dass S und T Functionen von x und y allein (von z un-
abhängig) sind, und damit ist der Satz (I.) bewiesen.

Bezeichnet weiter $\int\int$ eine Integration durch irgend eine in XOY
liegende geschlossene Fläche, so erhalten wir

$$\int\int\left(\frac{dT}{dx}+\frac{dS}{dy}\right)dx\,dy=\left[\int(T\,dy+S\,dx)\right]^{*)}.$$

Wenn im zweiten Gliede dieser Formel die Grenzen der ausgeführten und

*) Die Klammern [ ] bezeichnen hier, dass das eingeschlossene Integral für
die ganze Curve genommen werden soll, welche die in Rede stehende Fläche um-
grenzt.

der angedeuteten Integration richtig bestimmt werden, so ergibt sich, dass dasselbe gleich

$$\int (T \sin \varphi + S \cos \varphi)\, ds$$

ist, wo $\int$ eine Integration, die sich über die ganze Grenzcurve, ds ein Element der Länge dieser Curve und φ die Neigung von ds gegen XO bezeichnen. Nach § 662 (1) ist aber, wenn $l = \sin \varphi$, $m = \cos \varphi$, $n = 0$ angenommen wird,

$$H = T \sin \varphi + S \cos \varphi, \tag{3}$$

wo H den wie gewöhnlich für die Flächeneinheit gerechneten (OZ parallelen) Zug bezeichnet, den die umgrenzende prismatische Oberfläche erfährt. Folglich ist

$$\int\int \left(\frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dy}\right) dx\, dy = \int H\, ds, \tag{4}$$

also nach (2)

$$\int H\, ds = 0, \tag{5}$$

und dies ist der analytische Ausdruck des Satzes (II).

Wird jetzt partiell integrirt und (nach 2) $\frac{dS}{dy}$ statt $-\frac{dT}{dx}$ geschrieben, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} &\int\int T\, dx\, dy = \left[\int Tx\, dy\right]^* - \int\int x \frac{dT}{dx}\, dx\, dy \\ &= \left[\int Tx\, dy\right]^* + \int\int x \frac{dS}{dy}\, dx\, dy = \left[\int Tx\, dy\right]^* + \left[\int Sx\, dx\right]^* \\ &= \int x\, (T \sin \varphi + S \cos \varphi)\, ds = \int x H\, ds, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

und dies beweist den Satz (III).

701. Torsion eines Cylinders mit kreisförmiger Basis. — Für einen vollen oder hohlen Cylinder von kreisförmiger Basis ist die (unseres Wissens zuerst von Coulomb gegebene) Lösung des in § 699 aufgestellten Problems offenbar die, dass jeder kreisförmige Normalschnitt in seinen Dimensionen, seiner Gestalt und seiner inneren Anordnung unverändert bleibt (so dass jede gerade Linie seiner Massenpunkte eine Gerade von derselben Länge bleibt), aber um die Axe des Cylinders durch einen solchen Winkel sich dreht, dass eine gleichförmige Drillung (§ 120) erzeugt wird, welche gleich ist dem einwirkenden Kräftepaar, dividirt durch das Product des Trägheitsmoments der kreisförmigen Fläche (sei dieselbe nun ringförmig oder eine bis zum Centrum hin vollständige Kreisfläche) in die Starrheit der Substanz.

Denn wenn wir voraussetzen, die angegebene Deformation werde durch Einführung des erforderlichen Zwanges wirklich erzeugt, so haben wir in jedem Theile der Substanz eine einfache Schiebung parallel dem Normalschnitt und senkrecht zu dem durch denselben gehenden Radius. Um der elastischen Reaction dieser Schiebung das Gleichgewicht zu halten, ist (§§ 679, 682) ein einfach schiebender Zwang erforderlich, welcher aus Kräften im Normalschnitt, die der Schiebung gleichgerichtet sind, und aus Kräften in den durch die Axe gehenden Ebenen besteht, welche der Axe parallel gerichtet sind. Die Grösse der Schiebung ist für die Theile der Substanz, welche den Abstand r von der Axe haben, offenbar gleich τr, wenn τ die Grösse der Drillung ist. Folglich ist die Grösse der Tangentialkraft in jeder der beiden Ebenenschaaren für die Einheit der Fläche $n \tau r$, wenn n die Starrheit der Substanz ist. Es wirkt daher keine Kraft zwischen den Substanztheilen zu beiden Seiten eines Elements eines jeden Cylinders von kreisförmiger Basis, der mit dem Grenzcylinder oder den Grenzcylindern die Axe gemeinschaftlich hat; und somit braucht auf die cylindrische Grenzfläche keine Kraft einzuwirken, um den vorausgesetzten Deformationszustand zu erhalten. Die Wechselwirkung zwischen den Substanztheilen zu beiden Seiten eines jeden ebenen Normalschnitts besteht aus der Kraft in dieser Ebene; diese Kraft ist senkrecht zu dem durch jeden Punkt gehenden Radius und beträgt $n \tau r$ für die Einheit der Fläche. Das Moment dieser Kraftvertheilung in Beziehung auf die Axe des Cylinders ist (wenn $d\sigma$ ein Element der Fläche bezeichnet) $n\tau \int\int d\sigma r^2$, oder das Product von $n\tau$ in das Trägheitsmoment der Fläche in Beziehung auf die durch das Centrum gehende zur Ebene senkrechte Linie; es ist folglich gleich dem Moment des in jeder Endfläche wirkenden Kräftepaars.

702. Die auf den Seitenflächen eines beliebigen Prisma für eine einfache Drillung erforderliche Zugkraft. — Auf ähnliche Weise erkennen wir, dass, wenn ein Cylinder oder Prisma von irgend einer Form gezwungen wird, genau den oben (§ 701) angegebenen Deformationszustand anzunehmen, wo statt der Axe des Cylinders die Verbindungslinie der Trägheitsmittelpunkte der Normalschnitte zu setzen ist, die Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten jedes Normalschnitts liegenden Massentheilen ein Kräftepaar sein wird, dessen Moment sich durch dieselbe Formel ausdrücken lässt; dasselbe ist nämlich das Product aus der Starrheit, der Grösse der Drillung und dem in Beziehung auf den Trägheitsmittelpunkt genommenen Trägheitsmoment des Schnittes.

Dies zu beweisen, haben wir den obigen Entwicklungen nur noch hinzuzufügen, dass, wenn die im Normalschnitt wirkenden Kräfte nach zwei beliebigen zu einander senkrechten Richtungen OX, OY zerlegt werden, die Summen der Componenten, die beziehungsweise $n\tau \int\int x\, d\sigma$

und $n\tau \int\int y\, d\sigma$ sind, in Folge der Eigenschaft (§ 230) des Trägheitsmittelpunktes einzeln verschwinden.

703. Wenn das Prisma nicht ein voller oder hohler symmetrischer Cylinder von kreisförmiger Basis ist, sondern irgend eine andere Form hat, so erfordert der vorausgesetzte Deformationszustand ausser den an den Enden wirkenden entgegengesetzten Kräftepaaren noch eine über die prismatische Umgrenzung vertheilte, der Länge des Prisma parallele Kraft, welche dem längs der Tangente gemessenen Abstande jedes Punktes der Oberfläche von dem Punkte proportional ist, in welchem diese Tangente von einer vom Trägheitsmittelpunkte des Normalschnitts aus auf sie gezogenen Senkrechten geschnitten wird. Dies zu beweisen nehmen wir an, die Fig. 48 stelle einen Normalschnitt des Prisma dar. Die Strecke PK, welche die Schiebung in irgend einem der prismatischen Grenze nahe liegenden Punkte P darstellen möge, werde in die beziehungsweise in den Richtungen der Normalen und der Tangente genommenen Componenten PN und PT zerlegt. Da die ganze Schiebung PK gleich τr ist, so ist ihre Componente PN gleich $\tau r \sin\omega$ oder $\tau . PE$. Die entsprechende Componente der erforderten elastischen Reaction ist $n\tau . PE$ und besteht (§ 661) aus gleichen Kräften in der Ebene der Zeichnung und der durch TP gehenden zur Ebene der Zeichnung senkrechten Ebene, von denen jede für die Einheit der Fläche $n\tau . PE$ beträgt.

Fig. 48.

Ein System von Kräften, welche den in der eben angegebenen Weise über die prismatische Umgrenzung vertheilten gleich und entgegengesetzt sind, würde natürlich für sich allein in dem sonst freien Prisma einen Deformationszustand erzeugen, welcher, verbunden mit dem oben vorausgesetzten, den Deformationszustand ausmachen würde, welcher wirklich entsteht, wenn man bloss die einander das Gleichgewicht haltenden Kräftepaare an den Enden anbringt. Das Ergebniss ist, wie man leicht sieht (und wie unten bewiesen werden wird), eine vermehrte Drillung und zugleich eine

Krümmung der von Natur ebenen Normalschnitte, die sich durch unendlich kleine zu ihren Ebenen senkrechte Verschiebungen in gewisse Flächen von anticlastischer Krümmung umbiegen, bei denen die durch jeden Punkt gehenden Hauptschnitte (§ 130) gleiche und entgegengesetzte Krümmungen haben. Diese Theorie verdanken wir St. Venant, der nicht nur die Falschheit der von mehreren früheren Schriftstellern gemachten Voraussetzung, dass das Coulomb'sche Gesetz auch für andere Prismenformen als für volle oder hohle Cylinder von kreisförmiger Basis gelte, nachwies, sondern auch die Natur der erforderten Correction vollständig entdeckte, die Bestimmung derselben auf ein Problem der reinen Mathematik zurückführte, die Lösung für eine grosse Menge wichtiger und merkwürdiger Fälle ausarbeitete, die Resultate in einer dem Physiker genügenden und interessanten Weise mit der Beobachtung verglich und Schlüsse von grossem praktischen Werthe für den Ingenieur zog.

704. **Analoges Problem der Hydrokinetik.** — Die Identität der mathematischen Bedingungen in dem auf die Torsion bezüglichen Probleme von St. Venant und einem einige Jahre früher zuerst von Stokes*) gelösten hydrokinetischen Problem veranlasst uns, den folgenden Satz mitzutheilen, der sich sehr nützlich erweisen wird bei der Berechnung des Betrages, um welchen der Widerstand gegen eine Torsion kleiner ist, als die aus der falschen Ausdehnung des Coulomb'schen Gesetzes berechnete Grösse.

705. Man denke sich, eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit 1 fülle vollständig ein geschlossenes unendlich dünnes prismatisches Gefäss, dessen innerer Raum dieselbe Form wie das gegebene elastische Prisma, und welches die Einheit zur Länge hat. Auf das Gefäss wirke in einer zur Länge desselben senkrechten Ebene ein Kräftepaar ein. Das wirksame Trägheitsmoment der Flüssigkeit**) ist dann gleich dem Betrage, um welchen der aus der falschen Ausdehnung des Coulomb'schen Gesetzes berechnete Widerstand des elastischen Prisma gegen eine Torsion verringert werden muss, um die richtige Grösse dieses Widerstandes zu liefern.

---

*) „On some cases of Fluid Motion." — Camb. Phil. Trans. 1843.

**) Das ist das Trägheitsmoment eines starren festen Körpers, welcher, wie im zweiten Bande bewiesen werden wird, in dem Gefässe nach Entfernung der Flüssigkeit befestigt werden kann und so beschaffen ist, dass dasselbe dann die nämlichen Bewegungen vollführt, wie wenn es die Flüssigkeit enthält.

Weiter ist die wirkliche **Schiebung** des festen Körpers in jeder zwischen zwei Normalschnitten liegenden unendlich dünnen Platte desselben, wenn man diese Schiebung als ein den Schnittebenen paralleles unendlich kleines Gleiten (§ 172) ansieht, in jedem Punkte der Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit in Beziehung auf das sie einschliessende Gefäss hat, gleich und gleich gerichtet.

706. Lösung des Torsionsproblems. — Um diese Sätze zu beweisen und die mathematischen Gleichungen des Problems aufzustellen, zeigen wir erstens, dass die Bedingungen des vorliegenden Falles (§ 699) durch einen Deformationszustand erfüllt werden, welcher aus (1) einer einfachen Drillung um die Verbindungslinie der Trägheitsmittelpunkte und (2) einer Verzerrung jedes Normalschnitts durch unendlich kleine zu seiner Ebene senkrechte Verschiebungen besteht; darauf ermitteln wir die inneren und die Oberflächengleichungen zur Bestimmung dieser Krümmung, und zum Schluss berechnen wir das wirkliche Moment des Kräftepaars, welchem die Wechselwirkung zwischen den zu beiden Seiten eines beliebigen Normalschnitts liegenden Massentheilen äquivalent ist.

Durch einen passend gewählten Punkt O (der nicht gerade der Trägheitsmittelpunkt zu sein braucht) in einem beliebigen Normalschnitt legen wir die Axen OX, OY und nehmen OZ senkrecht zu diesen Linien an. Ein Punkt (x, y, z) des undeformirten festen Körpers möge durch die oben beschriebene zusammengesetzte Deformation in eine Lage gelangen, welche die Coordinaten $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ hat. Dann ist γ eine von z unabhängige Function von x und y, und wenn wir die Drillung (1) nach der in § 120 gegebenen einfachen Berechnungsart mit τ bezeichnen, so erhalten wir

$$(7)\qquad \begin{cases} x+\alpha = x\cos(\tau z) - y\sin(\tau z) \\ y+\beta = x\sin(\tau z) + y\cos(\tau z), \end{cases}$$

folglich für unendlich kleine Werthe von z

$$(8)\qquad \alpha = -\tau y z, \quad \beta = \tau x z.$$

Nun ist nach §§ 670, 693, wenn wir statt der lateinischen deutsche Buchstaben benutzen, im Uebrigen aber die Bezeichnung beibehalten,

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e} = 0, \quad \mathfrak{f} = 0, \quad \mathfrak{g} = 0, \\ \mathfrak{a} = \tau x + \frac{d\gamma}{dy}, \; \mathfrak{b} = -\tau y + \frac{d\gamma}{dx}, \; \mathfrak{c} = 0, \end{cases}$$

mithin [§ 693 (5)]

$$(10)\qquad \begin{cases} P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0 \\ S = n\left(\tau x + \frac{d\gamma}{dy}\right), \quad T = n\left(-\tau y + \frac{d\gamma}{dx}\right), \quad U = 0, \end{cases}$$

und nach der Bezeichnung des § 698, (8) und (9)

(11) $$\delta = 0,\quad \nabla^2 \alpha = 0,\quad \Delta^2 \beta = 0.$$

Wenn also auch

(12) $$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} = 0$$

ist, so sind die Gleichungen des inneren Gleichgewichts [§ 698 (6)] sämmtlich erfüllt.

Für den auf die Oberfläche ausgeübten Zug erhalten wie bei Anwendung der Bezeichnung der §§ 662, 700 aus § 662 (1)

(13) $$F = 0,\quad G = 0,\quad H = T \sin \varphi + S \cos \varphi.$$

Hieraus eliminiren wir T und S mittels der Formeln (10); ausserdem führen wir die Grössen $\frac{d\gamma}{dp}$ zur Bezeichnung der Variation von γ in der zur prismatischen Oberfläche senkrechten Richtung und q (die Linie PE der Fig. 48, § 703) zur Bezeichnung des Abstandes des Oberflächenpunktes, für welchen H ausgedrückt wird, von dem Schnittpunkt der Tangentialebene und einer von O auf dieselbe gezogenen Senkrechten ein. Auf diese Weise ergibt sich

(14) $$\begin{cases} H = n\left\{\left(\frac{d\gamma}{dy} \cos \varphi + \frac{d\gamma}{dx} \sin \varphi\right) - \tau\,(y \sin \varphi - x \cos \varphi)\right\}, \\ \text{oder } H = n\left(\frac{d\gamma}{dp} - \tau q\right). \end{cases}$$

Um die Wechselwirkung zu bestimmen, welche zwischen den zu beiden Seiten eines Normalschnitts liegenden Massentheilen stattfindet, bemerken wir zunächst, dass, insofern jeder der beiden Theile der betrachteten zusammengesetzten Deformation (die Drillung und die Krümmung der Normalschnitte) einzeln den Bedingungen des § 700 genügt,

(15) $$\iint T\,dx\,dy = \iint x\,H\,ds, \text{ und} \iint S\,dx\,dy = \int y\,H\,ds$$

sein muss. Wenn also die für die Oberfläche vorgeschriebene Bedingung $H = 0$ erfüllt ist, so erhalten wir

(16) $$\iint T\,dx\,dy = 0, \iint S\,dx\,dy = 0,$$

und es bleibt nur ein Kräftepaar

(17) $$\begin{cases} N = \iint (Sx - Ty)\,dx\,dy \\ = n\tau \iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy - n \iint \left(y\,\frac{d\gamma}{dx} - x\,\frac{d\gamma}{dy}\right) dx\,dy \end{cases}$$

in der Ebene des Normalschnitts. Jene Bedingung $H = 0$ liefert nach (14) für jeden Punkt der prismatischen Fläche

(18) $$\frac{d\gamma}{dp} = \tau q, \text{ oder } \frac{d\gamma}{dy} \cos \varphi + \frac{d\gamma}{dx} \sin \varphi = \tau\,(y \sin \varphi - x \cos \varphi).$$

Wir werden im zweiten Bande sehen, dass (12) und (18) Differentialgleichungen sind, welche eine Function γ von x und y bestimmen, die so beschaffen ist, dass $\frac{d\gamma}{dx}$ und $\frac{d\gamma}{dy}$ die Geschwindigkeitscomponenten einer vollkommenen Flüssigkeit bedeuten, welche sich anfänglich in

einem prismatischen Gefäss, wie wir es in § 705 beschrieben haben, in Ruhe befand und dadurch in Bewegung gesetzt worden ist, dass man dem Gefäss in der als negativ gerechneten Richtung eine Winkelgeschwindigkeit τ um OZ ertheilte. Ferner wird sich zeigen, dass das Zeitintegral (§ 297) des Kräftepaars, durch welches diese Bewegung plötzlich oder allmälig erzeugt ist, d. i. der Ueberschuss von $n\tau \int\int (x^2+y^2)\, dx\, dy$ über N, den Werth $n \int\int \left(x \frac{d\gamma}{dy} - y \frac{d\gamma}{dx}\right) dx\, dy$ hat. Auch sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in (9) die OX und OY parallelen Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit in Beziehung auf das Gefäss, da $-\tau y$ und τx die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes (x, y) sind, welcher in der positiven Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit τ um OZ rotirt. Wir erhalten somit die zu erweisenden Sätze (§ 705).

707. St. Venant's Ermittlung lösbarer Fälle. — St. Venant findet auf zwei Wegen Lösungen dieser Gleichungen: — (A) Er nimmt eine beliebige Lösung von (12) und bestimmt eine Schaar von Curven, für deren jede (18) erfüllt ist; jede dieser Curven kann daher als die Grenze der Basis eines Prisma angenommen werden, auf welches jene Lösung anwendbar sein soll. (B) Er löst nach der rein analytischen Methode Fourier's mit Rücksicht auf die Oberflächengleichung (18) die Gleichung (12) für den besonderen Fall eines rechtwinkligen Prisma.

(A.) Auf dem ersteren Wege erhält St. Venant folgendermaassen ein allgemeines Integral der als Differentialgleichung in den beiden Veränderlichen x, y angesehenen Bedingung, welcher die Umgrenzung zu genügen hat: — Multiplicirt man (18) mit ds und ersetzt die Grössen $\sin\varphi\, ds$ und $\cos\varphi\, ds$ durch ihre Werthe dy und $-dx$, so erhält man

$$\frac{d\gamma}{dx}\, dy - \frac{d\gamma}{dy}\, dx - \tfrac{1}{2}\tau d\,(x^2+y^2) = 0. \tag{19}$$

Hier machen die beiden ersten Glieder ein vollständiges Differential einer Function der unabhängig Veränderlichen x und y aus, da γ der Gleichung (12) genügt. Wird diese Function mit u bezeichnet, so folgt

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{du}{dy} \text{ und } \frac{d\gamma}{dy} = -\frac{du}{dx}, \tag{20}$$

und (19) verwandelt sich in

$$du - \tfrac{1}{2}\tau d\,(x^2+y^2) = 0,$$

was für jeden Punkt in der Umgrenzung

$$u - \tfrac{1}{2}\tau\,(x^2+y^2) = C \tag{21}$$

erfordert. Wir bemerken, dass, weil

$$\frac{d}{dx}\frac{d\gamma}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{d\gamma}{dx}$$

ist, aus (20)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \tag{22}$$

folgt, oder dass auch u, wie γ, der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ genügt. Eine i
Beziehung auf x, y algebraisch homogene Function, welche dieser Gl
chung genügt, ist [Zusatz B (a)] eine von z unabhängige harmonisch
Kugelfunction. Eine homogene Lösung von einem ganzzahligen Grade
kann also nur der Theil des Zusatzes B (39) sein, welcher z nicht en
hält. Dieser ist

$$C\xi^n + C'\eta^n,$$

wo [Zusatz B (26)] $\xi = x + y\sqrt{-1}$ und $\eta = x - y\sqrt{-1}$ ist, od
wenn wir die Constanten so ändern, dass das imaginäre Symbol beseiti
wird,

$$A\{(x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n\} - \sqrt{-1}\,B\{(x+y\sqrt{-1})^n - (x-y\sqrt{-1})^n\} \tag{23}$$

oder in Polarcoordinaten

$$2r^n(A\cos n\vartheta + B\sin n\vartheta). \tag{24}$$

Lösung für einen Cylinder mit elliptischer Basis. — Wend
wir diese Lösung für den Fall $n = 2$ an, und setzen (unbeschadet d
Allgemeinheit) $B = 0$, so erhalten wir

$$u = 2A(x^2 - y^2), \tag{25}$$

woraus nach (20)

$$\gamma = -4Axy \tag{26}$$

folgt, und die Gleichung (21) der Grenzcurven, auf welche sich diese L
sung anwenden lässt, ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{27}$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{-C}{\frac{1}{2}\tau - 2A} = a^2, \quad \frac{-C}{\frac{1}{2}\tau + 2A} = b^2$$

setzen, was

$$4A = \tau\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

liefert, so dass (26) in

$$\gamma = -\tau\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}xy \tag{28}$$

übergeht. Bei Benutzung dieses Resultats folgt aus (17)

$$N = n\tau\left\{\int\!\!\int(x^2 + y^2)\,dx\,dy - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\int\!\!\int(x^2 - y^2)\,dx\,dy\right\},$$

oder wenn I, J die beziehungsweise für die Axen der x und der y g
nommenen Trägheitsmomente der Fläche des Normalschnitts bezeichn

$$N = n\tau\left\{J + I - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(J - I)\right\}, \tag{29}$$

oder endlich, da wir für die elliptische Fläche (27)

$$I = \frac{\pi a b}{4} b^2, \quad J = \frac{\pi a b}{4} a^2$$

haben,

$$(30) \qquad N = n\tau (J + I) \left\{ 1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \right\} = n\tau \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Zu einem andern sehr einfachen, aber recht interessanten Fall, den St. Venant gleichfalls untersucht hat, gelangt man, wenn man für u eine harmonische Function dritten Grades nimmt. Um die folgenden Ausdrücke homogen zu machen und auf eine passende Form zu bringen, empfiehlt es sich, einen Factor $\frac{1}{2} \frac{\tau}{a}$ einzuführen; es ergibt sich

$$(31) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} (x^3 - 3 y^2 x) - \frac{1}{2} \tau (x^2 + y^2) = C, \\ \text{oder in Polarcoördinaten} \\ \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} r^3 \cos 3\vartheta - \frac{1}{2} \tau r^2 = C \end{cases}$$

als eine Gleichung, welche für verschiedene Werthe von C eine Schaar von Grenzcurven liefert, für die

$$(32) \qquad \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} (y^3 - 3 x^2 y) = - \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} r^3 \sin 3\vartheta$$

die der Bedingung (18) unterworfene Lösung von (12) ist.

Lösung für einen Cylinder, dessen Basis ein gleichseitiges Dreieck ist. — Für den besonderen Werth

$$C = - \tfrac{2}{27} a^2 \tau$$

liefert (31) drei gerade Linien, die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, für welches a die Senkrechte von einer Ecke auf die gegenüberstehende Seite ist, und dessen Lage zur x- und y-Axe die Figur 50 des § 708 zeigt. Wir haben also die vollständige Lösung des Torsionsproblems für ein Prisma, dessen Normalschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. Wird die Gleichung (17) für diese Fläche ausgearbeitet und für γ der Werth (32) benutzt, so erhält man

$$N = n (K - \tfrac{2}{5} K) \tau.$$

Es ist aber (da K das wirkliche Trägheitsmoment und A die Fläche des Dreiecks ist)

$$K = \frac{a^4}{9\sqrt{3}} = \frac{a^2}{9} A = \frac{A^2}{3\sqrt{3}},$$

und somit ergeben sich für den Widerstand gegen eine Torsion die verschiedenen Ausdrücke

$$(33) \quad N - \tau = \tfrac{3}{5} n K = n \frac{a^4}{15\sqrt{3}} = n \frac{a^2}{15} A = n \frac{A^2}{5\sqrt{3}} = n \frac{A^4}{45 K}.$$

Lösung für einen Cylinder, dessen Basis ein krummliniges Quadrat ist. — Auf ähnliche Weise fand St. Venant, indem er für u eine harmonische Function vierten Grades nahm und die Constanten passend wählte, die Gleichung

$$(34)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 - a\,(x^4 - 6\,x^2 y^2 + y^4) = 1 - a \\ \text{oder}\quad r^2 - a\,r^4 \cos 4\,\vartheta = 1 - a, \end{cases}$$

welche für verschiedene Werthe von a eine Schaar krummliniger Quadrate [siehe Fig. 51, § 708 (3)] liefert, welche sämmtlich abgerundete Ecken haben, mit Ausnahme zweier ähnlichen, aber gegen die Axen verschieden gelegenen Curven; diesen letzteren, die den Werthen $a = 0{,}5$ und $a = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ entsprechen, haben concave Seiten und spitze Winkel. Für jede dieser Curven ist das Torsionsproblem algebraisch gelöst.

Lösung für einen Cylinder, dessen Basis ein Stern mit vier abgerundeten Ecken ist. — Indem St. Venant weiter u als Summe zweier harmonischen Functionen annahm, die beziehungsweise vom vierten und achten Grade sind, und die Constanten passend wählte, fand er

$$35\quad \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{r_0^2} - \dfrac{48}{49}\cdot\dfrac{16}{17}\cdot\dfrac{x^4 - 6\,x^2 y^2 + y^4}{r_0^4} \\ + \dfrac{12}{49}\cdot\dfrac{16}{17}\,\dfrac{x^8 - 28\,x^6 y^2 + 70\,x^4 y^4 - 28\,x^2 y^6 + y^8}{r_0^8} = 1 - \dfrac{36}{49}\cdot\dfrac{16}{17} \\ \text{oder}\quad \dfrac{r^2}{r_0^2} - \dfrac{48}{49}\cdot\dfrac{16}{17}\,\dfrac{r^4 \cos 4\,\vartheta}{r_0^4} + \dfrac{12}{49}\cdot\dfrac{16}{17}\cdot\dfrac{r^8 \cos 8\,\vartheta}{r_0^8} = 1 - \dfrac{36}{49}\cdot\dfrac{16}{17} \end{cases}$$

als die Gleichung der unten in § 709 Fig. 66 gezeichneten Curve, für welche daher das Torsionsproblem gelöst ist.

Reduction des Problems von St. Venant auf das von Green. — (B.) Die Integration (21) der Gleichung der Umgrenzung, welche St. Venant in seiner synthetischen Entwicklung (A) benutzte, ist auch in der analytischen Untersuchung von grossem Nutzen, obwohl St. Venant sie nicht dazu verwandt hat. Wir bemerken erstens, dass die Bestimmung von u für eine gegebene Prismenform ein besonderer Fall des im Zusatz A (e) als möglich und bestimmt erwiesenen „Green'schen Problems" ist, indem dieses darin besteht, eine Function u von x und y zu finden, welche für jeden Punkt der von einer der Bedingung

$$(36)\qquad u = \tfrac{1}{2}\,\tau\,(x^2 + y^2)$$

genügenden geschlossenen Curve umgrenzten Fläche die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{d^2 u}{d y^2} = 0$$

erfüllt.

Wenn u bestimmt worden ist, so vervollständigen die Gleichungen (20) und (17) in Verbindung mit (10) die Lösung des Torsionsproblems.

Lösung für ein rechteckiges Prisma. — Für den Fall eines rechteckigen Prisma wird die Lösung bedeutend vereinfacht durch die Annahme

$$(37)\quad \begin{cases} u = v + A\,(x^2 - y^2) + B, \\ \text{welche}\ \dfrac{d^2 v}{d x^2} + \dfrac{d^2 v}{d y^2} = 0 \\ \text{und für die Grenzbedingung} \\ v = (\tfrac{1}{2}\tau - A)\,x^2 + (\tfrac{1}{2}\tau + A)\,y^2 - B \\ \text{liefert.} \end{cases}$$

Wenn das Rechteck nicht quadratisch ist, so mögen seine längeren Seiten parallel OX sein; ferner seien a, b beziehungsweise die Längen jeder der längeren und jeder der kürzeren Seiten. Nehmen wir jetzt

38) $$A = \tfrac{1}{2}\tau \quad \text{und} \quad B = \tfrac{1}{4}\tau b^2$$

an, so verwandelt sich die Grenzbedingung in

39) $$\begin{cases} v = 0, & \text{wenn } y = \pm \tfrac{1}{2} b \\ v = -\tau\,(\tfrac{1}{4} b^2 - y^2), & \text{wenn } x = \pm \tfrac{1}{2} a \text{ ist.} \end{cases}$$

Um das Problem nach Fourier's Methode zu lösen (vergl. das schwierigere Problem des § 655), müssen wir $\tfrac{1}{4} b^2 - y^2$ in eine harmonische Reihe entwickeln. Die Entwicklung*) ist offenbar

40) $$\tfrac{1}{4} b^2 - y^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \left\{\cos\eta - \frac{1}{3^3}\cos 3\eta + \frac{1}{5^3}\cos 5\eta - \text{u. s. w.}\right\},$$

wo der Kürze wegen

41) $$\eta = \frac{\pi y}{b}$$

gesetzt worden ist. Setzt man aus demselben Grunde

41) $$\xi = \frac{\pi x}{b},$$

so erhalten wir für die Form der Lösung

(42) $$v = \Sigma\,\{A_{2n+1}\, e^{-(2n+1)\xi} + B_{2n+1}\, e^{+(2n+1)\xi}\}\cos(2n+1)\,\eta,$$

welcher Ausdruck (37) genügt und $v = 0$ für $y = \pm \tfrac{1}{2} b$ liefert. Die noch übrig gebliebene Grenzbedingung liefert zur Bestimmung von A_{2n+1} und B_{2n+1}

(43) $$\begin{cases} \left[A_{2n+1}\, e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + B_{2n+1}\, e^{+(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}\right] \\ = \left[A_{2n+1}\, e^{+(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + B_{2n+1}\, e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}\right] = -\tau b^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen geben einen gemeinsamen Werth für die beiden Unbekannten A_{2n+1}, B_{2n+1}, durch dessen Einsetzung (42) sich in

(44) $$v = -\tau \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \Sigma \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\, \frac{e^{-(2n+1)\xi} + e^{+(2n+1)\xi}}{e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{+(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}} \cos(2n+1)\,\eta$$

verwandelt. Hieraus erhalten wir mit Benutzung von (37), (38) und (20)

(45) $$\gamma = -\tau x y + \tau \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \Sigma \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\, \frac{e^{+(2n+1)\xi} - e^{-(2n+1)\xi}}{e^{+(2n+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}} \sin(2n+1)\eta,$$

*) Man kann dieselbe natürlich aus dem allgemeinen Fourier'schen Satze herleiten; leichter erhält man sie aber durch zwei successive Integrationen der bekannten Formel

$$\tfrac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\cos\vartheta - \tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta + \tfrac{1}{5}\cos 5\vartheta - \text{u. s. w.}\right).$$

und (17) liefert für den Widerstand gegen eine Torsion

$$(46)\qquad N-\tau=n\,a\,b^3\left[{}^1/_3-\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\frac{b}{a}\,\Sigma\,\frac{1}{(2n+1)^5}\,\frac{1-e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{b}}}{1+e^{-(2n+1)\frac{\pi a}{b}}}\right]$$

Wenn wir in allen Hinsichten wie oben verfahren wären und $A = -\,{}^1/_2\,\tau$ statt $A = {}^1/_2\,\tau$ in (37) angenommen hätten, so würden Ausdrücke für γ und $N - \tau$ erhalten haben, welche von den gegeb anscheinend ganz verschieden sind, aber nothwendig dieselben Wer liefern. Man kann diese anderen Ausdrücke ohne Weiteres niederschr ben, wenn man in (45) und (46) x, y, a, b statt y, x, b, a setzt und dem Gliede von (45) das entgegengesetzte Zeichen gibt. Die neuen A drücke convergiren offenbar nicht so rasch wie (45) und (46), wenn, wir vorausgesetzt haben, $a > b$ ist, und dies ist der Grund, weshalb den oben eingeschlagenen Weg dem andern Wege vorgezogen hab Der Vergleich der Resultate liefert bemerkenswerthe Sätze der rein Mathematik, wie sie selten denjenigen Mathematikern aufstossen, sich auf die reine Analysis oder Geometrie beschränken, statt sich die reichen und schönen Gebiete der am Wege physikalischer Forsch gen liegenden mathematischen Wahrheiten zu begeben.

Eine Relation, welche Stokes*) und Lamé**) unabhängig von ander entdeckten [wir haben dieselbe schon in den Gleichungen (20), (benutzt] gestattet uns, wenn wir sie mit Lamé's Methode der krum linigen Coordinaten***) verbinden, Fourier's analytische Metho auf eine grosse Klasse krummliniger Rechtecke auszude nen, welche das geradlinige Rechteck als einen besonderen Fall in sic schliesst. Das geschieht auf folgende Weise: —

Es sei ξ eine Function von x, y, welche der Gleichung

$$(47)\qquad \frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d^2\xi}{dy^2}=0$$

genügt, und da dies zeigt, dass $\frac{d\xi}{dx}\,dy - \frac{d\xi}{dy}\,dx$ ein vollständiges Di ferential ist, so sei

$$(48)\qquad \eta=\int\left(\frac{d\xi}{dx}\,dy-\frac{d\xi}{dy}\,dx\right),$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$(49)\qquad \frac{d\eta}{dy}=\frac{d\xi}{dx}\ \text{und}\ \frac{d\eta}{dx}=-\frac{d\xi}{dy}.$$

Auch diese andere Function η genügt, wie wir aus (49) sehen, der Gl chung

$$(50)\qquad \frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{d^2\eta}{dy^2}=0.$$

---

*) On the Steady Motion of Incompressible Fluids. Camb. Phil. Trans., 184

**) Mémoire sur les lois de l'Equilibre du Fluide Ethéré. Journal de l'Eco Polytechnique, 1834.

***) Siehe Thomson, on the Equations of the Motion of Heat referred Curvilinear coordinates. Camb. Math. Journal, 1845.

ßbenso geht aus (49) hervor, dass zwei einander schneidende Curven, deren Gleichungen

$$(51)\qquad \xi = A, \quad \eta = B$$

sind, rechtwinklig aufeinander stehen. Es werden nun, A und B als gegeben vorausgesetzt, x und y durch diese beiden Gleichungen bestimmt. Den Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, kann man sich auch als durch A, B), d. h. durch die Werthe von ξ, η bestimmt denken, welche Curren liefern, die sich in (x, y) schneiden. Danach bestimmt (ξ, η), wenn man ξ und η irgend welche besonderen Werthe beilegt, einen Punkt in einer Ebene. Die gewöhnlichen geradlinigen Coordinaten sind offenbar ein besonderer Fall (geradlinige rechtwinklige Coordinaten) des Systems der so definirten krummlinigen rechtwinkligen Coordinaten. Es werde nun eine beliebige Function u von x, y durch ξ, η ausgedrückt. Durch Differentiation erhalten wir

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{d^2u}{d\xi^2}\left(\dfrac{d\xi^2}{dx^2} + \dfrac{d\xi^2}{dy^2}\right) + 2\dfrac{d^2u}{d\xi\, d\eta}\left(\dfrac{d\xi}{dx}\dfrac{d\eta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{d\eta}{dy}\right) \\ \qquad + \dfrac{d^2u}{d\eta^2}\left(\dfrac{d\eta^2}{dx^2} + \dfrac{d\eta^2}{dy^2}\right) + \dfrac{du}{d\xi}\left(\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + \dfrac{d^2\xi}{dy^2}\right) + \dfrac{du}{d\eta}\left(\dfrac{d^2\eta}{dx^2} + \dfrac{d^2\eta}{dy^2}\right), \end{cases}$$

was durch (49) und (50) auf

$$(53)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2}\right)\left(\frac{d\xi^2}{dx^2} + \frac{d\xi^2}{dy^2}\right)$$

reducirt wird. Die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

transformirt sich also in

$$(54)\qquad \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2} = 0.$$

Auch gehen die Relationen

$$\frac{du}{dy} = \frac{d\gamma}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{d\gamma}{dy}$$

wegen (49) über in

$$(55)\qquad \frac{du}{d\eta} = \frac{d\gamma}{d\xi}, \quad \frac{du}{d\xi} = -\frac{d\gamma}{d\eta}.$$

Das allgemeine Problem, u und γ zu bestimmen, führt also zu genau denselben Ausdrücken in ξ, η, wie das oben [(22), (36) und (20)] behandelte in x, y; es findet nur der Unterschied statt, dass wir nicht $u = \frac{1}{2}\tau(\xi^2 + \eta^2)$, sondern, wenn $f(\xi, \eta)$ die Function von ξ, η bezeichnet, in welche sich $x^2 + y^2$ transformirt, für jeden Punkt der Umgrenzung

$$(56)\qquad u = \tfrac{1}{2}\tau f(\xi, \eta)$$

haben.

Die Lösung für das krummlinige Rechteck

$$(57)\qquad \left\{\begin{array}{l|l} \xi = \alpha & \eta = \beta \\ \xi \quad 0 & \eta = 0 \end{array}\right.$$

nach dem **Fourier**'schen Plan ist

$$u = \Sigma \sin \frac{n\pi\xi}{\alpha}\left(A_n e^{\frac{n\pi\eta}{\alpha}} + A'_n e^{-\frac{n\pi\eta}{\alpha}}\right) \tag{58}$$
$$+ \Sigma \sin \frac{n\pi\eta}{\beta}\left(B_n e^{\frac{n\pi\xi}{\beta}} + B'_n e^{-\frac{n\pi\xi}{\beta}}\right),$$

wo A_n, A_n' durch zwei Gleichungen bestimmt werden müssen, die man folgendermaassen erhält: — Man setze den Coefficienten von $\sin \frac{n\pi\xi}{\alpha}$, wenn $\eta = 0$ und wenn $\eta = \beta$ ist, beziehungsweise gleich den Coefficienten von $\sin \frac{n\pi\xi}{\alpha}$ in den nach dem **Fourier**'schen Satze (§ 77) erhaltenen Entwicklungen von $f(\xi, 0)$ und $f(\xi, \beta)$ in Reihen von der Form

$$P_1 \sin \frac{\pi\xi}{\alpha} + P_2 \sin \frac{2\pi\xi}{\alpha} + P_3 \sin \frac{3\pi\xi}{\alpha} + \text{u. s. w.} \tag{59}$$

Auf ähnliche Weise werden B_n, B_n' aus den Entwicklungen von $f(0, \eta)$ und $f(\alpha, \eta)$ in Reihen von der Form

$$Q_1 \sin \frac{\pi\eta}{\beta} + Q_2 . \sin \frac{2\pi\eta}{\beta} + Q_3 \sin \frac{3\pi\eta}{\beta} + \text{u. s. w.} \tag{60}$$

bestimmt.

Beispiel. Ein von zwei concentrischen Bogen und zwei Radien begrenztes Rechteck. — Von einem äusserst einfachen, theoretisch sehr interessanten und für die praktische Mechanik nützlichen **Beispiele** wollen wir die Details angeben. Es sei

$$\xi = \log \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}. \tag{61}$$

Dieser Ausdruck genügt offenbar (47) und liefert nach (48)

$$\eta = \arctan \frac{y}{x}. \tag{62}$$

Die Lösung kann durch eine Reihe von Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi\xi}{\alpha}$ [nach dem Plane von (37) . . . (45)] ausgedrückt werden, indem man

$$u = v + \tfrac{1}{2}\, \tau \alpha^2 \frac{e^{2\xi} \cos(\beta - 2\eta)}{\cos \beta} \tag{63}$$

macht*), was in Verbindung mit (54)

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{d^2 v}{d\eta^2} = 0 \tag{64}$$

liefert und als Grenzbedingungen in der Lösung für v

$$\begin{cases} v = \tfrac{1}{2}\tau\alpha^2 \left\{1 - \dfrac{\cos(\beta - 2\eta)}{\cos\beta}\right\}, \text{ wenn } \xi = 0 \\ v = \tfrac{1}{2}\tau\alpha^2 e^{2\alpha}\left\{1 - \dfrac{\cos(\beta - 2\eta)}{\cos\beta}\right\}, \text{ wenn } \xi = \alpha \\ \text{und } v = 0, \text{ wenn } \eta = 0 \text{ und wenn } \eta = \beta \text{ ist} \end{cases} \tag{65}$$

---

*) Man übersehe nicht, dass diese Lösung für den Fall $\beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ illusorisch wird.

rgibt. Die letzte Bedingung zeigt, dass der B_n und B_n' enthaltende Theil von (58) geeignet ist, v auszudrücken, und die beiden ersten bestimmen B_n und $B_{n'}$ in der gewöhnlichen Weise.

Wenn es am besten ist, das Resultat in einer Reihe von Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi\xi}{\alpha}$ zu haben, so können wir

$$u = w + \tfrac{1}{2}\tau a^2 \left(1 + \frac{e^{2\alpha}-1}{\alpha}\xi\right) \tag{66}$$

nehmen, was in Verbindung mit (54)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} = 0 \tag{67}$$

liefert und als Grenzbedingungen in der Lösung für w

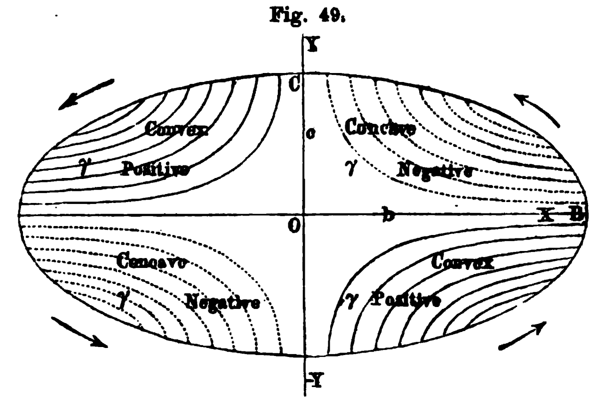
$$\left\{\begin{array}{l} w = \tfrac{1}{2}\tau a^2 \left\{e^{2\xi} - 1 - \dfrac{e^{2\alpha}-1}{\alpha}\xi\right\}, \text{ wenn } \eta = 0 \text{ und wenn } \eta = \beta \\ w = 0, \text{ wenn } \xi = 0 \text{ und wenn } \xi = \alpha \text{ ist} \end{array}\right. \tag{68}$$

rgibt. Die letzte zeigt, dass der A_n und A'_n enthaltende Theil von (58) zur Bestimmung von w passend ist, und die beiden ersten bestimmen A_n, A'_n.

708. St. Venant's Arbeit ist reich an schönen und lehrreichen graphischen Erläuterungen seiner Resultate, von denen wir die folgenden auswählen: —

(1.) **Cylinder mit elliptischer Basis.** — Die einfachen und punktirten Linien sind die „topographischen Contouren"

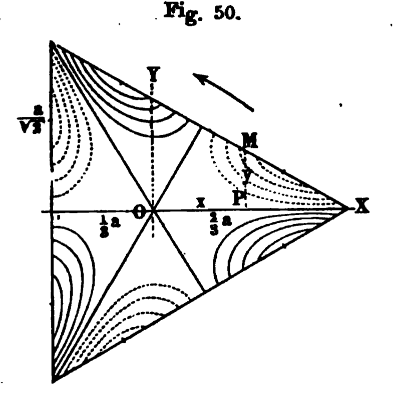
Fig. 49.



(coupes topographiques) des durch die Torsion gekrümmten Normalschnitts, d. h. die Linien, in welchen der Normalschnitt von einer Schaar der Axe paralleler Ebenen geschnitten wird, oder die Linien, für deren jede γ (§ 706) einen anderen constanten Werth hat. Diese Linien sind in diesem Falle [§ 707 (28)] gleichseitige

Hyperbeln. Der Pfeil zeigt die Richtung der Rotation in dem üb der Ebene der Zeichnung liegenden Theil des Prisma an.

Fig. 50.



(2.) Prisma, dessen Basis ein gleichseitiges Dreieck ist. — Die Contouren sind wie im Falle (1) gezeichnet, und zwar sind die punktirten Curven diejenigen, wo der gekrümmte Schnitt unter die Ebene der Zeichnung hinabsinkt. Die Richtung, in welcher der über dieser Ebene befindliche Theil des Prisma rotirt, ist durch den gebogenen Pfeil angegeben.

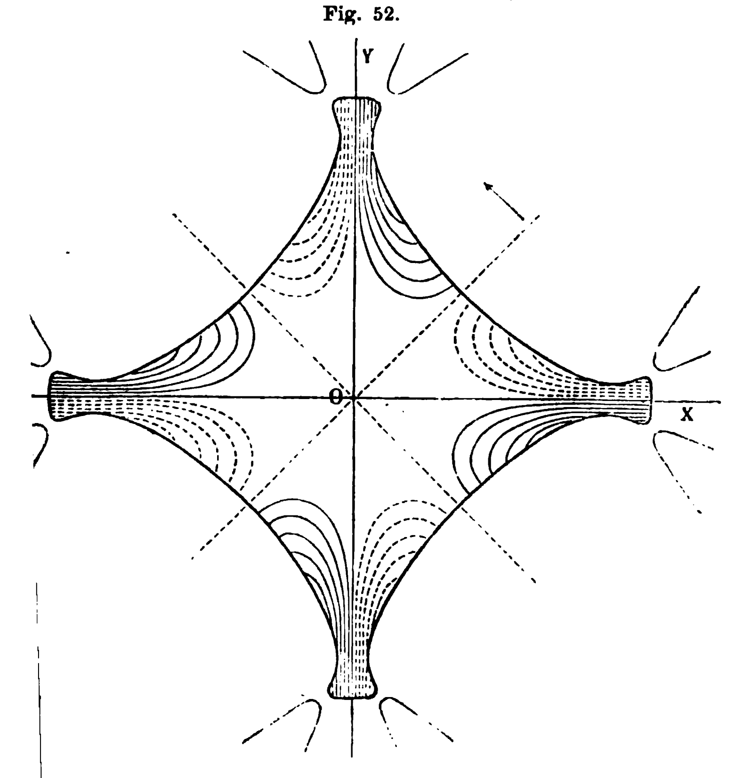
(3.) Die Figur 51 zeigt die Schaar der Linien, welche die Formel (34) des § 707 für die beigefügten Werthe von a darstellt. Es ist bemerkenswerth, dass die Werthe $a = 0{,}5$ und $a = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ähnliche, aber nicht gleiche krummlinig

Fig. 51.

drate (concave Seiten und spitze Winkel) liefern, von denen das durch einen Winkel von 45° gedreht werden muss, um mit andern gleiche Lage zu erhalten. Alles, was in der Zeichnung erhalb des grösseren dieser Quadrate liegt, hat man als nicht physikalischen Problem gehörig wegzuschneiden; die Schaar übrig bleibenden geschlossenen Curven stellt die Grundlinien Prismen dar, für deren jedes das Torsionsproblem gelöst ist. e Figuren variiren continuirlich von einem Kreise aus, der sich rhalb des einen jener spitzwinkligen Vierecke und ausserhalb andern befindet, und diese beiden Grenzlinien ausgenommen, ede Figur eine continuirliche geschlossene Curve ohne Winkel. den Werthen $a = 0{,}4$ und $a = -0{,}2$ entsprechenden Curven nur äusserst wenig von den geradlinigen Quadraten verschieden, in der Figur theilweise durch punktirte Linien angedeutet sind.

(4.) Contouren für St. Venant's „étoile à quatre points ondis." Die Fig. 52 zeigt ganz, wie es in den Fällen (1.) und geschehen ist, die Contouren für den Fall eines Prisma, welches

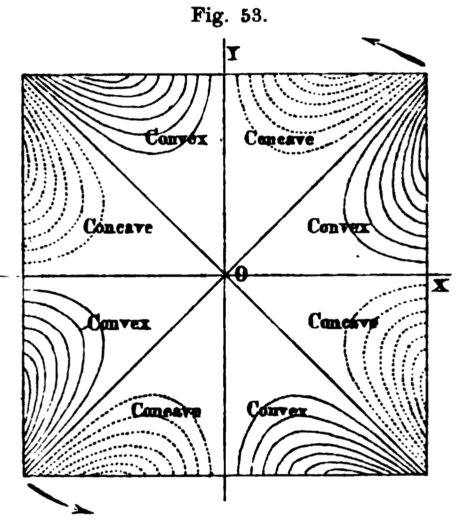
Fig. 52.



die angegebene Figur zum Normalschnitt hat. Die ausserhalb d continuirlichen geschlossenen Curven liegenden Curventheile si bloss Darstellungen der mathematischen Erweiterungen und hab keine Beziehung zum physikalischen Problem.

(5.) Die Fig. 53 zeigt, wie die Figuren 49 bis 52 in d übrigen Fällen, die Contouren für den gekrümmten Schnit eines gedrillten Prisma von quadratischer Grundfläch

Fig. 53.

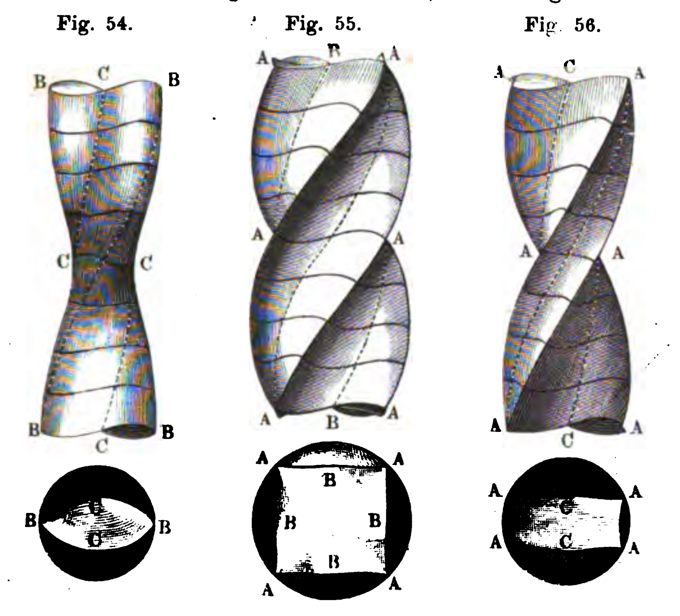


(6.), (7.), (8.) Die Figuren 54, 55, 56 sind schattirte Ze nungen, welche die Formen von Stäben mit elliptischer, q dratischer und rechteckiger Basis darstellen, wenn man selben einer übergrossen Torsion unterwirft, wie sie bei ei Substanz wie Gummi elasticum ausgeführt werden kann.

709. Verhältniss des Widerstandes gegen eine Tor zur Summe der Hauptbiegungswiderstände. — Insofern Trägheitsmoment einer ebenen Fläche in Beziehung auf eine d ihren Trägheitsmittelpunkt gehende zu ihrer Ebene senkrechte offenbar gleich ist der Summe ihrer Trägheitsmomente in Be hung auf zwei beliebige durch denselben Punkt gehende zu ei der senkrechte Linien ihrer Ebene, so würde die in § 703 ang bene falsche Ausdehnung des Coulomb'schen Gesetzes den Wi stand, welchen ein Stab von beliebigem Normalschnitt einer Tor entgegensetzt, gleich dem Product aus $\frac{n}{M}$ (§ 694) in die Su

ser Biegungswiderstände (siehe § 715, unten) in zwei beliebigen rch seine Längsrichtung gehenden zu einander senkrechten Ebe- machen. Die richtige Theorie liefert, wie wir gesehen haben

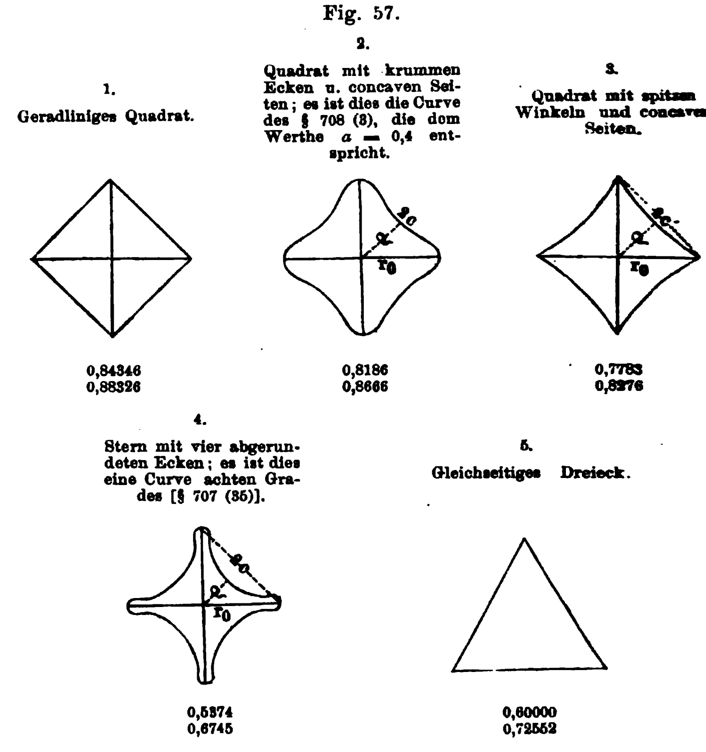
Fig. 54. Fig. 55. Fig. 56.



705, 706), immer eine kleinere Grösse für den Widerstand gegen e Torsion. St. Venant hat bestimmt, wie gross die Abweichung die man in Fällen erwarten darf, in denen die Form des Schnitts vorspringende Winkel oder beträchtliche Hervorragungen zeigt. ne Vorstellung davon kann man sich mittels der Analogie mit n in § 705 gegebenen Satze der Hydrokinetik machen.] Auch er die für die Praxis wichtige Schlussfolgerung gezogen, dass trippen oder hervorspringende Theile [siehe z. B. Fig. 57 (4)], sie beim Maschinenbau angewandt werden, um den Stäben ssere Steifheit zu geben, das Gegentheil einer guten Wirkung en, wenn es sich um den Widerstand gegen eine Torsion han- t, obschon sie allerdings insofern von grossem Werthe sind, als den Widerstand gegen eine Biegung vergrössern und gewöhn- e Deformationen, die immer mehr oder weniger von Biegungen leitet sind, leichter aushalten lassen. St. Venant hat mit gros- Talent und mathematischer Geschicklichkeit aus seinen alge- ischen und transcendenten Lösungen [§ 707 (32), (34), (35), (45)] öne Illustrationen dieses für die Praxis wichtigen Princips ent-

nommen. So findet er in den Fällen des gleichseitigen Dreiecks und des geradlinigen und der drei krummlinigen Quadrate der Fig. 57 für die Torsionswiderstände die angegebenen Werthe. Die unmittelbar unter der Figur stehende Zahl gibt in jedem Falle den Bruchtheil an, welcher der richtige Torsionswiderstand von dem

Fig. 57.



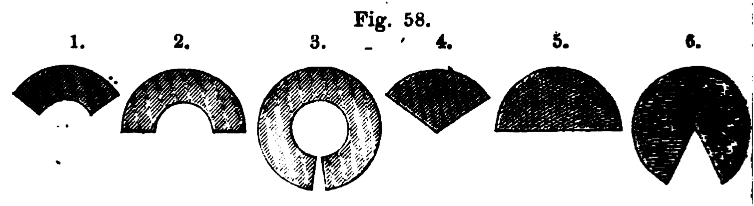
früher angenommenen falschen (§ 703) ist; der letztere ist das Product der Starrheit der Substanz in das Trägheitsmoment des Querschnitts in Beziehung auf eine durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende zu seiner Ebene senkrechte Axe. Die zweite Zahl gibt in jedem Falle den Bruchtheil an, welcher der Torsionswiderstand von demjenigen eines vollen Cylinders von kreisförmiger Basis und gleich grosser Schnittfläche ist.

710. Die Stellen grösster Verzerrung in gedrillten Prismen. — St. Venant macht ferner auf eine aus seinen Lösungen sich ergebende Thatsache aufmerksam, die Vielen überraschend sein wird, dass nämlich in seinen einfacheren Fällen die Stellen grösster

Verzerrung diejenigen Punkte der Grenzfläche sind, welche der Axe des gedrillten Prisma in jedem Falle am nächsten liegen, und dass die Stellen der kleinsten Verzerrung die am weitesten entfernten Punkte sind. So ist in dem Cylinder mit elliptischer Basis die Substanz in den Endpunkten des kleineren Hauptdurchmessers am meisten, in den Endpunkten des grösseren am wenigsten deformirt. In den Prismen, welche beziehungsweise ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat zur Grundfläche haben, gibt es Längslinien grösster Deformation durch die Mitten der Seiten. In dem Prisma mit rechteckiger Basis gibt es zwei Linien grösserer und zwei Linien kleinerer Maximaldeformation; die ersteren Linien gehen durch die Mitten des breiten, die letzteren durch die Mitten des engen Seitenpaars. Die Deformation ist, wie wir aus dem analogen hydrokinetischen Problem (§ 705) schliessen können, ausserordentlich klein, aber nicht verschwindend, in den vorspringenden Theilen eines Prisma von der in Fig. 57 (4) gezeichneten Basis. Sie ist Null in unendlich kleiner Entfernung von dem Winkel bei den Prismen mit dreieckiger und rechteckiger Basis, sowie in jedem anderen Falle [wie Fig. 57 (3)], in welchem die Basis einen nach aussen springenden spitzen oder stumpfen Winkel von endlicher Grösse hat. Dies führt uns zu einer allgemeinen Bemerkung, die wir freilich aus Mangel an Raum nicht formell beweisen werden: Wenn auf einen festen Körper von irgend einer isotropen oder äolotropen elastischen Substanz, der von beliebigen Oberflächen mit vorspringenden oder einspringenden Kanten oder Ecken von beliebiger Weite begrenzt wird, ein System beliebig vertheilter Kräfte einwirkt, in welchem sich nur keine in unendlich kleiner Entfernung von den in Rede stehenden Ecken oder Kanten auf die Oberfläche wirkende Zugkräfte befinden dürfen, so kann der Körper keine Reaction oder Deformation von endlicher Grösse in der Nähe einer vorspringenden Ecke (triedrisch, polyedrisch oder conisch) erleiden; in der Nähe einer Kante kann er nur einen einfachen longitudinalen Zwang in einer dem benachbarten Theil der Kante parallelen Richtung erleiden; endlich erleidet er im Allgemeinen eine unendlich grosse Deformation in der Nähe einer einspringenden Kante oder Ecke. Eine wichtige Anwendung des letzten Theils dieses Satzes ist die in der Mechanik wohlbekannte praktische Regel, dass bei Maschinentheilen, die eine Reaction ertragen sollen, jede einspringende Kante oder Ecke abgerundet werden muss, damit die Gefahr eines Bruchs beseitigt werde. Eine Erläuterung dieser Principien liefert das am Schluss des § 707 ge-

gebene Beispiel, welches die vollständige mathematische Lösung des Torsionsproblems für Prismen von fächerförmigen Schnitten, wie sie die Figuren 58 darstellen, enthält. In den $a = 0$ entsprechenden Fällen sehen wir, ohne die Lösung auszuarbeiten, dass die

Fig. 58.



Verzerrung $\frac{d\gamma}{r\,d\eta}$ für $r = 0$ verschwindet, wenn $\beta < \pi$ ist, dass sie für $r = 0$ unendlich gross wird, wenn $\beta > \pi$ ist, und dass sie endlich und bestimmt ist, wenn man $\beta = \pi$ hat.

Wenn wir Polarcoordinaten r, η einführen, indem wir $x = r \cos\eta$ und $y = r \sin\eta$ annehmen, und wenn ausserdem $\frac{\pi}{\beta} = \nu$ gesetzt wird, so verwandelt sich die oben angegebene Lösung, welche den Werth von v bestimmt, der den Gleichungen (64) und (65) des § 707 genügt, einfach in

$$(69) \qquad v = \Sigma\,(B_n r^{n\nu} + B'_n r^{-n\nu}) \sin n\nu\eta \; {}^{*)},$$

wo B_n, B'_n durch die Gleichungen (64) des § 707 bestimmt werden müssen, in denen man $r = a$ und $r = a'$ statt $\xi = 0$ und $\xi = a$ und a^2 statt $a^2 e^{2\alpha}$ zu setzen hat (a und a' bezeichnen beziehungsweise die Radien der concaven und der convexen Cylinderflächen). Wenn $a = 0$ ist, so liefern diese Gleichungen $B_n = 0$, folglich

$$\left(\frac{dv}{r\,d\eta}\right)_{r=0} = 0, \; = B_1 \cos\eta, \; = \infty,$$

jenachdem $\nu > 1$, $= 1$ oder < 1 ist; daraus ergeben sich auch ähnliche Resultate für $\left(\frac{d\gamma}{r\,d\eta}\right)_{r=0}$.

711. Problem der Biegung. — Um das Gesetz der Biegung (§§ 591, 592) zu beweisen und den Widerstand (§ 596) zu bestimmen, den ein Stab oder Draht von isotroper Substanz einer Biegung entgegensetzt, denken wir uns zunächst, der Stab sei so gebogen, dass er einen Kreisbogen bildet, und bestimmen die Kraft

---

*) Der Vergleich mit § 707 (23), (24) lässt erkennen, dass diese Lösung bloss der allgemeine Ausdruck in Polarcoordinaten für Reihen harmonischer Kugelfunctionen von x und y und mit $z = 0$ ist, die von den Graden n, $2n$, $3n$, u. s. w. $-n$, $-2n$, $-3n$, u. s. w. sind. Es sind dies „vollkommene harmonische Functionen", wenn n die Einheit oder eine beliebige ganze Zahl ist.

ie hierzu erforderlich ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt ein sollen: —

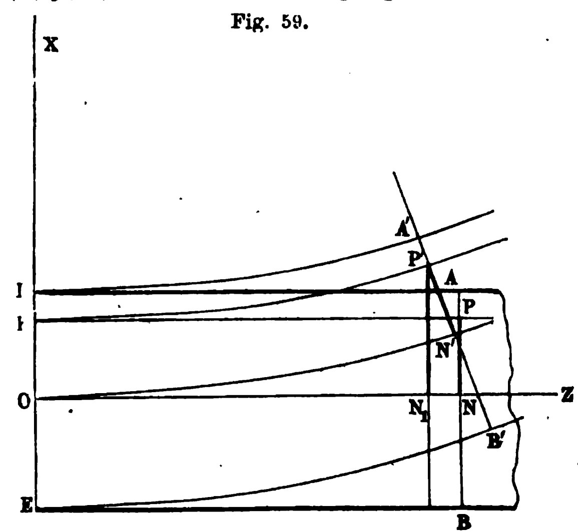
(1) Alle Linien des Stabes, welche seiner Länge parallel sind, erden Kreisbogen, die in der Ebene ZOX oder in ZOX parallen Ebenen liegen, und deren Mittelpunkte einer zu dieser Ebene enkrechten Linie angehören, indem die Linie OZ und alle durch Y gehenden ihr parallelen Linien gebogen werden, ohne die Länge u ändern.

(2) Alle Normalschnitte bleiben eben und senkrecht zu jenen ängslinien (so dass ihre Ebenen nach der Deformation durch jene erbindungslinie der Mittelpunkte hindurchgehen).

(3) Kein Theil eines Normalschnitts erleidet eine Deformation.

Es werde ein Schnitt DOE des Stabes zur Coordinatenebene XOY enommen, und es sei P (x, y, z) ein beliebiger Punkt des ungebogenen, P' (x', y', z') derselbe Punkt des gebogenen Stabes. Die Figur

Fig. 59.



zeigt die Projection dieser Punkte auf die Ebene ZOX. Ferner sei ϱ der Radius des Bogens ON', in welchen sich die Linie ON des geraden Stabes umbiegt. Dann ist

$$x' = x + (\varrho - x)\left(1 - \cos\frac{z}{\varrho}\right),\ y' = y,$$

$$z' = (\varrho - x)\sin\frac{z}{\varrho}.$$

Nach der oben (§ 588) aufgestellten Beschränkung ist aber x höchstens unendlich klein im Vergleich mit ϱ, und für jede beliebige Länge des

Stabes, welche nicht grösser als die grösste Querdimension desselben ist, gilt dasselbe von z. Deshalb vernachlässigen wir in den vorhergehenden Ausdrücken die Potenzen von $\frac{x}{\varrho}$ und $\frac{z}{\varrho}$, deren Grad den zweiten übersteigt, und erhalten, wenn wir noch $x' - x = \alpha$, $y' - y = \beta$, $z' - z = \gamma$ setzen,

$$(1) \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{\varrho},\ \beta = 0,\ \gamma = -\frac{xz}{\varrho}.$$

Werden diese Werthe in § 693 (5) und § 697 (2) substituirt, so folgt

$$(2) \qquad \begin{cases} P = -(m-n)\frac{x}{\varrho},\ Q = -(m-n)\frac{x}{\varrho},\ R = -(m+n)\frac{x}{\varrho} \\ S = 0,\quad T = 0,\quad U = 0, \end{cases}$$

$$(3) \qquad X = \frac{m-n}{\varrho},\ Y = 0,\quad Z = 0.$$

Die Interpretation dieses Resultats ist zwar nicht uninteressant; da wir ihrer aber für unsere jetzige Betrachtung nicht bedürfen, so überlassen wir sie dem Leser als Uebungsaufgabe.

712. Das Problem der einfachen Biegung setzt voraus, dass keine Kraft von aussen her als Zugkraft auf die Seiten des Stabes oder auf die innere Substanz desselben einwirke, sondern dass der Stab durch entgegengesetzte Kräftepaare, die man in geeigneter Weise an seinen Enden anbringt, in einer Kreisform erhalten wird, wobei seine Deformation und Reaction eine überall gleichmässige ist.

Fügen wir den Grössen α, β, γ des vorhergehenden Paragraphen die Correctionen

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} K (x^2 - y^2),\quad \beta' = Kxy,\ \gamma' = 0$$

zu, so erhalten wir [nach § 693 (5)]

$$P' = Q' = 2mKx,\ R' = 2(m-n)Kx,\ S' = 0,\quad T' = 0,\ U' = 0$$

und [nach § 698 (2)]

$$X' = -2mK,\quad Y' = 0,\quad Z' = 0$$

als die Correctionen, die wir zu $P, Q, \ldots, X, Y, Z$ zu addiren haben. Nehmen wir also

$$K = \frac{m-n}{2m\varrho}$$

an, so werden die auf die Seitenflächen des Stabes wirkenden Zugkräfte und die inneren Kräfte auf Null reducirt. Wenn daher jetzt

$$(1) \quad \alpha = \frac{1}{2\varrho}\left\{z^2 + \frac{m-n}{2m}(x^2 - y^2)\right\},\ \beta = \frac{1}{\varrho}\,\frac{m-n}{2m}\,xy,\ \gamma = -\frac{1}{\varrho}\,xz$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{cases} e = \frac{m-n}{2\varrho m}\,x = \frac{\sigma}{\varrho}\,x,\ f = \frac{m-n}{2\varrho m}\,x = \frac{\sigma}{\varrho}\,x,\ g = -\frac{1}{\varrho}\,x \\ a = b = c = 0 \end{cases}$$

nd [§ 693 (5), § 694 (6)]

$$(5)\quad \begin{cases} P = 0,\ Q = 0,\ R = -\dfrac{(3m-n)n}{m}\dfrac{x}{\varrho} = -M\dfrac{x}{\varrho} \\ X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0. \end{cases}$$

Zur Vervollständigung der Erfüllung der Bedingungen ist nur nöthig, dass die durch jeden Normalschnitt wirkende Zugkraft sich auf ein Kräftepaar reduciren lasse. Folglich ist

$$\int\int R\, dx\, dy = 0,$$

oder nach (3)

$$\int\int x\, dx\, dy = 0,$$

in Worten: —

713. Damit längs des Stabes keine Kraft, sondern nur ein Biegungskräftepaar fortgepflanzt werden könne, muss der Trägheitsmittelpunkt des Normalschnitts in OY, d. h. in der Linie liegen, in welcher er von der Oberfläche geschnitten wird, welche die Substanztheile, die in ihrer Längsrichtung eine Ausdehnung erfahren haben, von denen trennt, bei welchen eine Verkürzung in der Längsrichtung stattgefunden hat.

714. In unseren analytischen Ausdrücken ist nur ein unendlich kurzer Theil des Stabes betrachtet worden, und es war nicht nöthig, zu untersuchen, ob die Axe des ins Leben gerufenen Kräftepaars zur Ebene der Biegung senkrecht sei oder nicht. Wenn es sich aber um eine so grosse Länge des Stabes handelt, dass die Richtungsänderung (§ 5) vom einen zum anderen Ende von endlicher Grösse ist, so können die an den Enden angreifenden Kräftepaare nicht direct entgegengesetzt sein, wofern nicht ihre Axen beide zur Ebene der Biegung senkrecht sind, da jede Axe in dem entsprechenden Normalschnitt des Stabes liegt. Für eine nicht unendlich kleine Biegung in einem Kreisbogen, der keinem seitlichen Zwange unterworfen ist, müssen wir also

$$\int\int Ry\, dx\, dy = 0, \text{ folglich nach (3) } \int\int xy\, dx\, dy = 0$$

haben, d. h. die Ebene der Biegung muss senkrecht sein zu einer von den beiden seiner eigenen Ebene angehörenden Hauptträgheitsaxen des Normalschnitts. Wenn dies der Fall ist, so ist das Moment des ganzen durch jeden Normalschnitt wirkenden Kräftepaars gleich dem Product aus der Krümmung, dem Young'schen Modulus und dem in Beziehung auf die zur Ebene der Biegung senkrechte Hauptaxe genommenen Trägheitsmoment der Fläche des Normalschnitts.

Denn wir haben [§ 712 (3)]

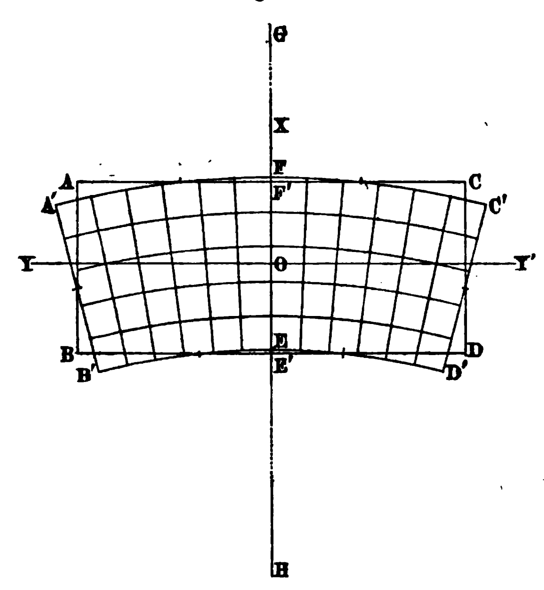
$$\iint R x \, dx \, dy = - \frac{M}{\varrho} \iint x^2 \, dx \, dy.$$

715. **Hauptaxen und Hauptwiderstände der Biegung.** — Es fallen somit in einem Stabe von isotroper Substanz die Haup axen der Biegung (§ 599) mit den Hauptträgheitsaxen der Fläch des Normalschnitts zusammen, und die entsprechenden Biegungs widerstände (§ 596) sind die Trägheitsmomente dieser Fläche i Beziehung auf diese Axen, multiplicirt mit dem Young'schen Mo dulus.

716. **Geometrische Interpretation und experimentell Erläuterung.** — Die Interpretation der Resultate [§ 712 (2), (3 zu welchen die analytische Untersuchung uns geführt hat, ist ei fach die, dass, wenn wir uns den ganzen Stab parallel zu sein Länge in unendlich kleine Fasern (dieselben sind Prismen, so lang der Stab gerade ist) zertheilt denken, jede derselben eine seitlich Zusammenziehung oder Ausdehnung mit nahezu derselben Freih erleidet, wie wenn sie von den übrigen Substanztheilen getrenn wäre, und in ihrer Längsrichtung in demselben Grade verlänge oder verkürzt wird, in welchem sie bei der Umbiegung des Stab in einen Kreisbogen wirklich verlängert oder verkürzt wird. Di Verzerrung des Querschnitts, von welcher diese Veränderungen de seitlichen Dimensionen nothwendig begleitet sind, wird durch d Figur 60 erläutert, in welcher entweder der ganze Normalschn eines Stabes mit rechteckiger Basis, oder ein rechteckiger Theil d Normalschnitts eines Stabes von beliebiger Gestalt in der deform ten und der undeformirten Form, die beide den Mittelpunkt O ge meinschaftlich haben, dargestellt wird. Die Biegung erfolgt i Ebenen, die senkrecht zu YOY sind, und ist nach oben (oder geg X hin) concav; der Krümmungsmittelpunkt G liegt in der in der Fi gur angegebenen Richtung, ist aber zu weit entfernt, als dass e hier gezeichnet werden könnte. Die geraden Seiten AC, BD un alle ihnen parallelen geraden Linien der undeformirten rechteckig Fläche werden concentrische Kreisbogen, die in der entgegengesetz ten Richtung concav sind, indem ihr Krümmungsmittelpunkt H au der entgegengesetzten Seite von O liegt, und zwar für Stäbe vo gallertartiger Substanz, oder von Glas oder Metall 2 bis 4 mal so weit entfernt als G. Danach werden die anfänglich ebenen Seiten flächen AC, BD eines Stabes von rechteckiger Basis anticlastisch Oberflächen, deren Krümmungen in den beiden Hauptschnitten

und $\frac{-\sigma}{\varrho}$ sind. Sehr schön zeigt diese Erscheinung ein recht-
:kiges oder quadratisches Band von Gummi elasticum [für welches

Fig. 60.



nur wenig kleiner als $^1/_2$ ist (§ 684), und welches im hohen Grade
formirt werden kann, ohne die entsprechende elastische Wirksam-
it völlig zu verlieren].

717. Die einschränkende Bedingung des § 588, dass die Krüm-
ung sehr klein sein muss im Vergleich mit der eines Kreises, des-
n Radius gleich dem grössten Durchmesser des Normalschnitts
; (die Nothwendigkeit dieser Bedingung ist nicht unmittelbar er-
:htlich, und in der That weiss man, so viel uns bekannt ist, nicht,
ss dieselbe allgemein erfüllt sein muss, wenn der grösste Durch-
esser zur Krümmungsebene senkrecht ist), erhält jetzt ihre volle
:klärung; denn wofern nicht die Breite AC des Stabes (oder der
r Ebene der Biegung senkrechte Durchmesser) sehr klein wäre
ı Vergleich zur mittleren Proportionale zwischen dem Radius OH
ıd der Dicke AB, so würden die Abstände von OY nach den Ecken
', C' kürzer und die Abstände von OY nach B', D' länger sein, als die
lbe Dicke OE, und zwar würden die Verhältnisse der Differenzen
eser Abstände zur halben Dicke endliche Werthe haben. Dadurch

würden in den Fasern nach den Ecken zu Verkürzungen und Verlängerungen erzeugt werden, die merklich kleiner und grösser als die in unseren Formeln (§ 712 (2)] ausgedrückten sind, und auf diese Weise würde die Lösung verletzt werden. Leider ist den Mathematikern bisher nicht gelungen (vielleicht haben sie auch gar nicht versucht), das schöne Problem zu lösen, welches die Biegung eines breiten, sehr dünnen Bandes (wie z. B. einer Uhrfeder) in einen Kreis darbietet, dessen Radius zu einer dritten Proportionale zwischen der Dicke und der Breite des Bandes in einem endlichen Verhältnisse steht. Siehe § 657.

718. Wenn aber der Krümmungsradius der Biegung ein grosses Vielfache nicht nur des grössten Durchmessers, sondern auch einer dritten Proportionale zwischen den beziehungsweise in der Ebene der Biegung und senkrecht zu derselben gezogenen Durchmessern ist, so lässt sich die vorhergehende Lösung anwenden, wie gross auch das Verhältniss des grössten Durchmessers zum kleinsten sein möge, und es ist beachtenswerth, dass die (in Fig. ... § 716 erläuterte) nothwendige Verzerrung des Normalschnitts ... freien seitlichen Zusammenziehungen und Ausdehnungen in den Fasern nicht verhindert, sogar im Falle eines breiten dünnen Bandes (dasselbe sei nun von genau rechteckigem Schnitt, oder in verschiedenen Theilen verschieden dick).

719. **Biegung einer Platte.** — Betrachten wir jetzt ... gleichförmiges, dünnes, breites Band, welches in der in der vorhergehenden Lösung vorausgesetzten Weise gebogen ist, so haben wir genau den Fall einer unter der Einwirkung einer einfachen Biegungsreaction (§ 638) stehenden Platte. Wenn a die Breite und ... die Dicke ist, so ist das Trägheitsmoment des Querschnitts $^1/_{12}\, b^3$ ... folglich der Widerstand gegen eine Biegung $^1/_{12}\, Mab^3$ oder, ... Breite als Eins angenommen, $^1/_{12}\, Mb^3$. Daher würde ein Kräftepaar K (§ 637) das Band so biegen, dass seine Krümmung der Länge nach $K — ^1/_{12}\, Mb^3$ und (§ 716) der Breite nach $\sigma K — ^1/_{12}\, M$... wäre; die concave Seite würde aber bei der letzteren Krümmung die entgegengesetzte Richtung von der der ersteren haben. Genau dieselbe Lösung gilt für die Wirkung einer Biegungsreaction, welche aus einander das Gleichgewicht haltenden Kräftepaaren besteht, die man an den beiden Rändern angebracht hat, um das Band senkrecht zu der Dimension zu biegen, die wir bisher die Breite genannt haben. Nach dem Princip der Superposition klei...

r Bewegungen können wir auf jedes Paar paralleler Seiten einer
ɔhteckigen Platte gleichzeitig ein Paar einander das Gleichgewicht
ltender Kräftepaare wirken lassen, ohne durch eins dieser beiden
Gleichgewicht befindlichen Systeme die Wirkung des andern zu
dern, so dass die Gesammtwirkung die geometrische Resultante
r beiden einzeln berechneten Wirkungen ist. Es sei also eine
adratische Platte von der Dicke b gegeben, deren Grundfläche
ɔ Länge Eins hat, und es mögen auf das eine Paar entgegen-
setzter Seiten einander das Gleichgewicht haltende Kräftepaare
auf das andere Paar ebensolche Kräftepaare A einwirken; jedes
ɔser Kräftepaarsysteme suche, wenn es positiv ist, die concave
ite der Platte nach derselben Richtung zu biegen. Bezeichnen
an $\varkappa$ und λ die in den Ebenen dieser Kräftepaare erzeugten Ge-
ammtkrümmungen, so erhalten wir

$$\varkappa = \frac{1}{{}^1/_{12} M b^3} (K - \sigma A) \quad)$$

ıd

$$\lambda = \frac{1}{{}^1/_{12} M b^3} (A - \sigma K). \quad)$$

720. Um zu bestimmen, welches die Kräftepaare sein müssen,
ımit einfach eine cylindrische Krümmung $\varkappa$ erzeugt werde,
ıhmen wir $\lambda = 0$ an. Es ergibt sich

$$A = \sigma K$$

ıd

$$K = {}^1/_{12} \frac{M b^3}{1 - \sigma^2} \varkappa. \quad)$$

'enn eine sphärische Krümmung erzeugt werden soll, so ha-
ɪn wir $\varkappa = \lambda$ zu setzen. Dies liefert

$$K = A = {}^1/_{12} \frac{M b^3}{1 - \sigma} \varkappa. \quad)$$

m endlich eine in beiden Richtungen gleiche anticlastische
rümmung zu erzeugen, muss $\varkappa = -\lambda$ angenommen werden.
adurch erhält man

$$K = -A = {}^1/_{12} \frac{M b^3}{1 + \sigma} \varkappa. \quad)$$

ergleichen wir die erhaltenen Resultate mit § 641 (10) und § 642
ı6), so erhalten wir für den Widerstand A gegen eine cylindrische
iegung und für die Widerstände $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ gegen eine synclastische

und eine anticlastische Biegung einer gleichförmigen Platte von isotropem Material

$$
(6)\quad \begin{cases} A = {}^1/_{12}\,\dfrac{Mb^3}{1-\sigma^2}, \\[2ex] \mathfrak{h} = {}^1/_{12}\,\dfrac{Mb^3}{1-\sigma}, \quad \mathfrak{k} = {}^1/_{12}\,\dfrac{Mb^3}{1+\sigma}, \\[1ex] \text{oder nach § 694 (6) und § 698 (5)} \\[1ex] \mathfrak{h} = \dfrac{3nkb^3}{2(3k+4n)} = \dfrac{n(3m-n)b^3}{6(m+n)}, \quad \mathfrak{k} = {}^1/_6\, nb^3. \end{cases}
$$

Der Coefficient A, welcher in der Gleichung des inneren Gleichgewichts einer von beliebigen Kräften angegriffenen Platte auftritt [§ 644 (6) und §§ 649...652], und die Grösse c, welche in den Grenzbedingungen erscheint, denen die Platte genügt, lassen sich [§ 642 (16)] auf folgende Weise einfach durch $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ ausdrücken:—

$$
(7)\qquad A = {}^1/_2\,(\mathfrak{h}+\mathfrak{k}), \quad c = {}^1/_2\,(\mathfrak{h}-\mathfrak{k}).
$$

721. Es ist interessant und lehrreich, die anticlastische Biegung einer Platte noch auf eine andere Weise zu untersuchen, indem man sie nämlich als einen äussersten Fall der Torsion ansieht. Betrachten wir zunächst einen flachen Stab von rechteckigem Schnitt, der gleichmässig gedrillt ist durch passende tangentiale Zugkräfte [§ 706 (10)], die an seinen Enden angreifen. Es stehe nun die Breite des Stabes zu seiner Länge in einem endlichen Verhältniss; beide seien z. B. einander gleich. Wir haben dann eine quadratische Platte, welche durch entgegengesetzte Kräftepaare gedrillt wird, die in den Ebenen zweier entgegengesetzten Ränder wirken und so über diese Flächen vertheilt sind, dass sie, wenn die beiden anderen Ränder ganz frei gelassen werden, eine gleichförmige Wirkung in allen den ersteren Flächen parallelen Schnitten erzeugen. Wenn wir endlich noch in § 707 (46) die Dicke b als unendlich klein im Vergleich zur Breite a voraussetzen, so erhalten wir

$$
(8)\qquad N = {}^1/_3\, n\tau ab^3.
$$

Die Drillung τ für die Einheit der Länge liefert $a\tau$ für die Länge a, was [§ 640 (4)] einer anticlastischen Krümmung ϖ (nach der Bezeichnung des § 639) $= \tau$ äquivalent ist, und das Kräftepaar N, welches in nur einem Paar entgegengesetzter Seiten des Quadrates wirkt, ist, wie wir aus § 656 ersehen, einer anticlastischen Reaction (nach der Bezeichnung des § 637) $\Pi = {}^1/_2\, N - a$ äquivalent. Wir erhalten somit für den Widerstand gegen eine anticlastische Krümmung, nach § 642 (13),

)
$$\mathfrak{f} = \Pi - \varpi = \frac{N}{2\tau a} = \frac{n}{6} b^3,$$

s mit dem Werthe (6) in § 720 übereinstimmt, der auf andere eise, nämlich durch Zusammensetzung der Biegungen gefunden rden ist.

Es ist von grösster Wichtigkeit, Folgendes zu bemerken: — (1) Eine lfte des Theils $\frac{1}{3} n \tau a b^3$ in dem Werthe von N, welchen die Formel) des § 707 liefert, leitet sich aus α und β, wie sie § 706 (8) gibt, her, d das Glied $-\tau x y$ von γ folgt aus (45). — (2) Bezeichnet γ' die nscendente Reihe, welche den Ausdruck (45) für γ vervollständigt, so es das Glied $n \int\int x \frac{d\gamma'}{dy} dx\, dy$ der Formel (17) des § 706, welches andere Hälfte des in Rede stehenden Theils von N ausmacht. Um sen Ausdruck zu bestimmen, werden wir partiell integriren, wobei zu achten ist, dass sich einfach das Zeichen von γ' ändert, wenn man x er y ein anderes Zeichen gibt. Es ergibt sich

)
$$\left\{\begin{aligned} n \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} x \frac{d\gamma'}{dy} dy\, dx &= \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x\, G\, dx \\ &= a \int_0^{\frac{1}{2}a} G\, dx - 2 \int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^x G\, dx, \end{aligned}\right.$$

)

l)
$$\left\{\begin{aligned} G &= n \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \frac{d\gamma'}{dy} dy = 2 n \gamma'_{y=\frac{1}{2}b} \\ &= 2 n \tau \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum_\nu \frac{1}{(2\nu+1)^3} \frac{e^{(2\nu+1)\frac{\pi x}{b}} - e^{-(2\nu+1)\frac{\pi x}{b}}}{e^{(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}}} \end{aligned}\right.$$

Wir erhalten also in N ein Glied

$$\int_0^{\frac{1}{2}a} G\, dx = n \tau a \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 b^3 \sum \frac{1}{(2\nu+1)^4} \left\{1 - \frac{2}{e^{(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}}}\right\},$$

er, weil (wie wir sehen, wenn wir (40) nach y integriren und $y = \frac{1}{2} b$ tzen)

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \text{u. s. w.} = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \qquad \text{ist,}$$

$$\text{2)}\quad a \int_0^{\frac{1}{2}a} G\, dx = \tfrac{1}{6} n \tau a b^3 - n \tau \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 a b^3 \sum \frac{2}{(2\nu+1)^4 \left[e^{(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}} + e^{-(2\nu+1)\frac{\pi a}{2b}}\right]}$$

ie transcendente Reihe des zweiten Gliedes dieser Formel macht im erein mit

$$-2\int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_0^x G\,dx - n\int\int y\frac{d\gamma'}{dx}\,dx\,dy$$

die transcendente Reihe aus, welche in dem Ausdruck (46) für N scheint. Diese ist, wie wir oben [§ 721 (8)] gesehen haben, unendli klein im Vergleich zum ersten Gliede von (46), wenn $a - b$ unendli gross ist. Wenn wir aber wie jetzt die Zusammensetzung des Ausdru untersuchen, so ist zu beachten, dass für ein unendlich grosses $a -$ die Grösse γ' verschwindet, ausser für Werthe von x, die unendlich we von $\pm \frac{1}{2}a$ verschieden sind, und daraus erkennen wir leicht, dass diesem Falle

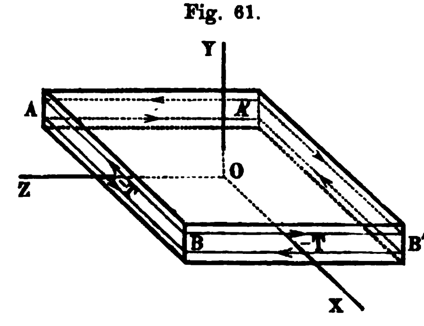
$$n\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy\left(x\frac{d\gamma'}{dy} - y\frac{d\gamma'}{dy}\right) = n\,a\int_0^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \frac{d\gamma'}{dy}\,dy = a\int_0^{\frac{1}{2}a} G\,dx$$

ist, woraus mit Rücksicht auf das Vorhergehende Folgendes hervorgeht:

722. Eine Hälfte des auf jeden der Ränder wirkenden Kräfte paars, durch welches die obigen Bedingungen erfüllt werden, besteht aus zwei tangentialen Zugkräften, welche über die Randflächen in unendlich kleiner Entfernung von deren Enden vertheilt sind und senkrecht zur Platte nach entgegengesetzten Seiten hin ziehen. Die andere Hälfte besteht aus einem über die Ränder gleichmässig vertheilten System von Kräften, welche der Längsrichtung der Ränder parallel sind und deren Grösse überall dem positiven oder negativen Abstande ihres Angriffsortes von der Mittellinie ihres Randes einfach proportional ist.

723. Wenn wir jetzt die erstere Hälfte entfernen und statt derselben über die bisher freien Ränder (BB', AA') gleichmässig ein Kräftepaarsystem vertheilen, welches der letzteren Hälfte gleich und ähnlich und so gerichtet ist, dass in der ganzen Platte dieselbe Drillung unterhalten wird, so haben wir die zur Erfüllung der drei Poisson'schen Grenzbedingungen (§ 645) für den vorliegenden Fall geeigneten Zugkräfte, d. h. wir haben ein System von Zugkräften, die über die vier Ränder einer quadratischen Platte so vertheilt sind, dass nicht nur in allen Theilen der Platte, deren Abstände

Fig. 61.



den Rändern gross sind im Vergleich zur Dicke, sondern in der zen Platte bis zu den Rändern hin eine gleichmässige anticlasti- Reaction (§ 638) erzeugt wird. Der Deformations- und Reacszustand in der Platte wird durch die folgenden Formeln gestellt [die wir aus §§ 706 und 707 (8), (45), (9), (10), (17) § 722 entnehmen, oder direct bewahrheiten können]

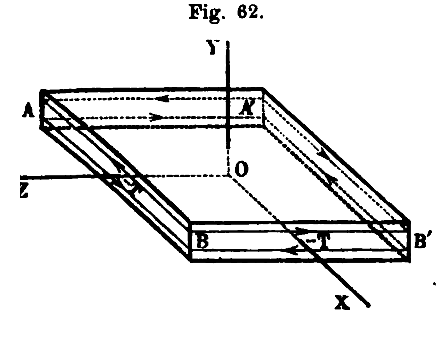
$$\begin{cases} \alpha = -\tau y z, \quad \beta = \tau x z, \quad \gamma = -\tau x y \\ \mathfrak{e} = \mathfrak{f} = \mathfrak{g} = 0, \quad \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = -2\tau y, \quad \mathfrak{c} = 0 \\ P = Q = R = 0, \quad S = 0, \quad T = -2n\tau y, \quad U = 0 \\ -L = N = -\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} Ty\, dy\, dx = \frac{n\tau}{6} ab^3; \end{cases}$$

n bezeichnen L und N die Momente (deren Vorzeichen wie in i1 gerechnet werden) der ganzen Beträge des auf die beiden ehungsweise zu OX und OZ senkrechten Ränder in den Ebe- dieser Ränder wirkenden Kräftepaars.

Drehen wir die Axen OX, OZ in ihrer eigenen Ebene um 45°, so kom- wir wieder zu den Formeln der Biegung (wie in § 719) für den besonde- Fall gleicher Biegungen in den beiden entgegengesetzten Richtungen.

724. Eine dünne rechteckige Platte wird den Zugkräf- des § 647 unterworfen. — Wenn wir jetzt andererseits zu in § 721 betrachteten Deformationszustand einen zweiten hin- gen, der dadurch erzeugt wird, dass wir auf das vom ersteren gelassene Ränderpaar das in § 722 beschriebene Kräftepaar- em einwirken lassen, aber in der Richtung, welche der vom er- en der Platte ertheilten Drillung entgegengesetzt ist (so dass elbe jetzt nicht $-L$, sondern $L = N$ ist), so befindet sich die dratförmige Platte, ausser in unendlich kleiner Entfernung von n Ecken, genau in dem in § 647 beschriebenen Zustande. Um

Fig. 62.



in diesem Falle die Ausdrücke für die Componenten der Verschiebung, der Deformation und der elastischen Reaction zu finden, müssen wir zu den Ausdrücken für α, β, γ in § 706 (8) und § 707 (45) die Werthe addiren, die man erhält, wenn man das

Zeichen jedes jener Ausdrücke ändert und x gegen z, sowie α gegen γ vertauscht. Die zugehörigen Werthe von $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, P, Q, R, S, T$, erhält man natürlich auf dieselbe Weise. Man hat aber nicht nöthig, sie nieder zu schreiben, da man sie ohne Weiteres aus α, β, bilden kann. Endlich würde die neu hinzugefügte Deformation, wenn sie allein existirte, die x parallelen Ränder frei von Zug lassen, ganz wie die anfangs vorausgesetzte Deformation [§ 706 (8 die Ränder frei lässt, welche der z-Axe parallel sind, und so erkennen wir ohne eine neue Integration, dass N noch den Werth (4 hat und die Resultante der in § 722 beschriebenen Zugkräfte ist. Die Theile der Verschiebungscomponenten, welche durch die Producte der Coordinaten dargestellt werden, verschwinden, und es bleiben nur die folgenden transcendenten Reihen: —

$$(14)\begin{cases} \alpha = -\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum_\nu \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} \frac{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi z}{b}} - e^{-\frac{(2\nu+1)\pi z}{b}}}{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}} + e^{-\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b} \\ \gamma = +\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum_\nu \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} \frac{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi x}{b}} - e^{-\frac{(2\nu+1)\pi x}{b}}}{e^{+\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}} + e^{-\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b} \end{cases}$$

725. Wenn $\frac{a}{b}$ unendlich gross ist, so wird $e^{+\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}$ unendlich gross und $e^{-\frac{(2\nu+1)\pi a}{2b}}$ unendlich klein. Setzen wir dann $\frac{1}{2}a - z = z'$ und $\frac{1}{2}a - x = x'$, so verwandeln sich die vorhergehenden Ausdrücke in

$$(15)\quad \alpha = -\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} e^{-\frac{(2\nu+1)\pi z'}{b}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b}$$

für Punkte, welche dem Rande $A'B'$ nicht unendlich nahe liegen; also ist

$$\gamma = +\tau\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 b^2 \sum \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^3} e^{\frac{(2\nu+1)\pi x'}{b}} \sin\frac{(2\nu+1)\pi y}{b}$$

für Punkte, welche dem Rande AA' nicht unendlich nahe liegen; also ist

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

für alle Punkte, die keinem Rande unendlich nahe liegen:

$$\beta = 0 \text{ überall;}$$

endlich $$L = N = \frac{1}{3}\, n\tau a b^3,$$

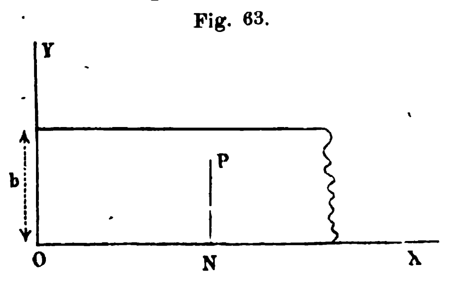
und zwar wird die Hälfte des Werthes jedes dieser beiden Kräftepaarsysteme durch die über den entsprechenden Rand gleichmässig vertheilten und den Abständen von der Mittellinie proportionalen Zugkräfte gebildet, die andere Hälfte durch die unendlich nahe den Ecken und senkrecht zur Platte wirkenden Zugkräfte.

726. **Eine Platte ohne Ecken wird den Zugkräften des § 647 unterworfen.** — Es ist klar, dass, wenn die Ecken abgerundet wären, oder wenn die Platte eine beliebige Form ohne Ecken hätte, d. h. wenn in keinem Theile ihres Randes der Krümmungsradius nicht sehr gross wäre im Vergleich zur Dicke, die Wirkung eines auf die in § 647 angegebene Weise über den ganzen Rand vertheilten Kräftepaarsystems durch jede dieser letzten Formeln für α und γ ausgedrückt werden würde. So wird die ganze Verschiebung der Substanz für alle dem Rande unendlich nahe liegenden Punkte dem Rande parallel sein; sie wird für alle übrigen Punkte der Platte verschwinden; sie wird gleich dem vorhergehenden Ausdruck (15) für γ sein, wenn x' einfach den Abstand von dem nächsten Punkte des Randes der Platte und y, wie in allen diesen Formeln, den Abstand von der Mittelfläche bezeichnet.

727. Wir können daraus schliessen, dass, wenn eine gleichförmige Platte, deren Rand überall zu den Seitenflächen senkrecht, und deren Dicke ein kleiner Bruchtheil des kleinsten Krümmungsradius des Randes in jedem Punkte ist, der in § 647 beschriebenen Einwirkung unterworfen wird, und wenn dabei noch die Bedingung erfüllt wird, dass die tangentialen Zugkräfte [wie in § 634 (3) für jeden von der Umgrenzung einer gebogenen Platte entfernten Normalschnitt ausgesagt wurde] dem positiven oder negativen Abstande von der Mittellinie des Randes einfach proportional vertheilt seien, die innere Deformation und Reaction durch den folgenden Satz bestimmt sein werden: —

Es sei O ein beliebiger Punkt in einer Ecke des Randes; ferner sei die Axe OX senkrecht zum Rande nach innen zu gerichtet, OY senkrecht zur Ebene der Platte. Dann ist die Verschiebung γ eines beliebigen Massenpunktes P (x, y), dessen Abstand von O

Fig. 63.



kein beträchtliches Vielfache der Dicke b ist, senkrecht zur Ebene YOX und durch die Formel

$$(16)\quad \gamma = 6\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(e^{-\frac{\pi x}{b}}\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3^3}e^{-\frac{3\pi x}{b}}\cos\frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{5^3}e^{-\frac{5\pi x}{b}}\cos\frac{5\pi y}{b} + \ldots\right)$$

bestimmt, wo Ω die für die Einheit der Randlänge genommene Grösse des Kräftepaars und n die Starrheit (§ 680) der Substanz bezeichnen. Die einfachste und leichteste Art, zu diesem Resultat zu gelangen, besteht jedoch darin, dass man direct nach Fourier's analytischer Methode das folgende Problem löst, welches ein besonderer Fall eines der allgemeinen Probleme des § 696 ist: —

728. Unabhängige Behandlung des Falles des § 647. — Es ist eine gleichförmige ebene Platte von der Dicke b gegeben, welche sich zu einer Seite eines geraden Randes (oder einer zu den Seitenflächen senkrechten Ebene) nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt. Man soll die Verschiebung, die Deformation und die Reaction bestimmen, welche ein nach einer gegebenen willkürlichen Function [$\varphi(y)$] der Entfernung von der Kante über den Rand gleichmässig vertheiltes System tangentialer Zugkräfte hervorruft.

Wenn wir die Coordinatenaxen wie in § 727 wählen, so haben wir die Gleichungen (2) des § 697, nachdem $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ gesetzt ist, für alle Punkte des Raumes zu lösen, für welche x positiv ist und zwischen 0 und b liegt; dabei sind noch die Grenzbedingungen

$$(17)\quad \begin{cases} P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0,\ T=0,\ U=0, \text{ wenn } y=0 \text{ oder } b \text{ ist;} \\ P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0,\ U=0,\ T=\varphi(y), \text{ wenn } x=0 \text{ ist;} \\ \text{und } \alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0, \text{ wenn } x=\infty \text{ ist} \end{cases}$$

zu erfüllen.

Da jede der Grössen α, β, γ von z unabhängig sein muss, so ergiebt sich hieraus

$$(18)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \dfrac{d^2\gamma}{dx^2} + \dfrac{d^2\gamma}{dy^2} = 0 \text{ in allen Punkten des Körpers;} \\ \text{(b)} & \gamma = 0, \text{ wenn } x = \infty \text{ ist;} \\ \text{(c)} & n\dfrac{d\gamma}{dy} = 0, \text{ wenn } y = 0 \text{ oder } b \text{ ist;} \\ \text{(d)} & n\dfrac{d\gamma}{dx} = \varphi(y), \text{ wenn } x = 0 \text{ ist,} \end{cases}$$

und alle, sowohl die für das Innere, wie die für die Oberfläche geltenden Gleichungen, welche α und β enthalten, werden durch die Werthe $\alpha = 0$, $\beta = 0$ befriedigt, erfordern also (Zusatz C) $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Aus (a), (b) und (c) sieht man natürlich zunächst, dass die Fourier'sche Lösung von der Form

$$19)\qquad \gamma = \Sigma\, A_\nu\, e^{-\frac{\nu\pi x}{b}} \cos\frac{\nu\pi y}{b}$$

ist, und wegen (d) sind die Coefficienten A_ν so zu bestimmen, dass

$$(20)\qquad -\frac{n\pi}{b}\, \Sigma\nu\, A_\nu \cos\frac{\nu\pi y}{b} = \varphi(y)$$

wird. Sie sind daher [wie man erkennt, wenn man in § 77 (13) und (14) φ so annimmt, dass $\varphi(p-\xi) = \varphi\xi$ wird, und $p = 2b$ setzt] folgende: —

$$(21)\qquad A_\nu = -\frac{b}{n\pi}\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\frac{2}{b}\int_0^b \varphi(y)\cos\frac{\nu\pi y}{b}\,dy.$$

Nehmen wir (für den vorliegenden besonderen Fall)

$$(22)\qquad \varphi(y) = \frac{12\,\Omega}{b^3}\,(y - \tfrac{1}{2}b)$$

an, so erhalten wir

$$(23)\qquad A_{2\nu} = 0 \text{ und } A_{2\nu+1} = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{1}{(2\nu+1)^3}$$

und gelangen auf diese Weise zum Resultat (16).

729. Schnelle Abnahme der Störung vom Rande aus nach innen zu. — Es ist bemerkenswerth, wie schnell die ganze durch dieses Resultat dargestellte Störung von dem Rande aus, wo die störende Zugkraft angreift, nach innen zu sich verringert (vergleiche § 586), und wie jedes folgende Glied viel schneller als das vorhergehende abnimmt.

Da $e = 2{\cdot}71828$, $e^{\frac{1}{2}\pi} = 4{\cdot}801$, $e^{2{\cdot}303} = 10$, $e^\pi = 23{\cdot}141$, $e^{2\pi} = 535{\cdot}5$ ist, so erhalten wir

$$\text{für } x = \frac{1}{3{\cdot}1416}b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{2{\cdot}718} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.2{\cdot}718^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.2{\cdot}718^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = \tfrac{1}{2}b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{4{\cdot}801} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.4{\cdot}801^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.4{\cdot}801^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = \frac{2{\cdot}303}{\pi}b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{10} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.10^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.10^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{23{\cdot}14} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.23{\cdot}14^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.23{\cdot}14^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

$$x = 2b,\quad \gamma = 6\,\frac{\Omega}{nb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{\cos\frac{\pi y}{b}}{535{\cdot}5} - \frac{\cos\frac{3\pi y}{b}}{3^3.535{\cdot}5^3} + \frac{\cos\frac{5\pi y}{b}}{5^3.535{\cdot}5^5} - \text{u. s. w.}\right)$$

wodurch der am Schluss des § 647 ausgesprochene Satz schlagend bewiesen wird.

730. Allgemeines Problem eines unendlich grossen festen Körpers. — Wir bedauern, dass der Mangel an Raum uns zwingt, die Widerstände eines Prisma gegen torquirende Biegung und die Biegungswiderstände einer Platte von aeolotroper Substanz ununtersucht zu lassen, und uns auch jetzt noch auf isotrope Substanzen zu beschränken, wo wir zum Schluss die vollständigen Integrale der Gleichung [§ 697 (2)] des inneren Gleichgewichts für einen unter der Einwirkung beliebig gegebener Kräfte stehenden unendlich grossen festen Körper und die in harmonischen Reihen dargestellten Lösungen ermitteln wollen, welche für Probleme über die Deformation von Kugeln und Kugelschalen, sowie von vollen und hohlen Cylindern mit kreisförmiger Basis (§ 738) passend sind. Das Problem, das wir für den unendlich grossen festen Körper zu lösen haben, ist folgendes: —

Es seien in § 698 (6) X, Y, Z beliebige Functionen von (x, y, z), die entweder discontinuirlich sind und in allen Punkten ausserhalb einer gewissen geschlossenen Oberfläche von endlicher Grösse verschwinden, oder continuirlich sind und in allen unendlich weit vom Anfangspunkt entfernten Punkten verschwinden. Im letzteren Falle mögen diese Functionen so rasch abnehmen, dass, wenn R die Resultante von X, Y, Z in einem Punkte ist, welcher den Abstand D vom Coordinatenanfang hat, RD gegen Null convergirt, wenn D unbegränzt wächst. Man soll die Werthe α, β, γ bestimmen, welche jenen Gleichungen [§ 698 (6)] genügen und für unendlich entfernte Punkte (d. h. für unendlich grosse Werthe von x, y oder z) einzeln verschwinden.

Lösung für eine isotrope Substanz. — (a) Wenn man die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y und die dritte nach z differentiirt und die Resultate addirt, so erhält man

$$(1)\qquad (m+n)\,\nabla^2\delta + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

(b) Dies zeigt, dass, wenn wir uns durch einen Raum eine Masse vertheilt denken, deren Dichtigkeit ϱ durch die Formel

$$(2)\qquad \varrho = \frac{1}{4\pi(m+n)}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right)$$

gegeben ist, δ gleich dem Potential dieser Masse im Punkte (x, y, z) sein muss. Denn [§ 491 (c)] wenn V dieses Potential ist, so haben wir

$$\nabla^2 V + 4\pi\varrho = 0.$$

Wird dies von (1) subtrahirt und das Resultat durch $(m+n)$ dividirt, so folgt

$$\nabla^2 (\delta - V) = 0$$

alle Werthe von (x, y, z). Da nun XD, YD, ZD gegen Null congiren, wenn D unendlich gross wird, so muss offenbar für alle unend- weit entfernten Punkte $V = 0$ sein. Ist also S eine beliebige gelossene Oberfläche, welche den Coordinatenanfangspunkt umgibt und rall unendlich weit von ihm entfernt ist, so ist die Function $(\delta - V)$ alle auf S liegenden Punkte Null, während sie für alle innerhalb S genen Punkte der Gleichung (3) genügt. Es muss also [Zusatz A (e)] $= V$ sein. Mit anderen Worten: Die Thatsache, dass (1) für alle kte des Raumes besteht, liefert

$$\delta = -\frac{1}{4\pi(m+n)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{dX'}{dx'} + \frac{dY'}{dy'} + \frac{dZ'}{dz'}\right) dx'\, dy'\, dz'}{\sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}},$$

X', Y', Z' die Werthe von X, Y, Z für einen beliebigen Punkt y', z') bezeichnen.

(c) Wir können diesen Ausdruck durch eine partielle Integration und ch Beachtung der vorgeschriebenen Convergenzbedingung, nach welcher $x' = \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'\, dy'\, dz'}{\sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}} = 0$$

modificiren und erhalten die Formel

$$\delta = \frac{-1}{4\pi(m+n)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'(x-x') + Y'(y-y') + Z'(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dx'dy'dz',$$

che für die meisten Zwecke passender als (4) ist.

(d) Nach genau demselben Verfahren, das wir in (b) anwandten, inriren wir jetzt jede der drei Gleichungen (6) des § 698 einzeln bezieigsweise nach α, β, γ und finden

$$\alpha = u + U,\ \beta = v + V,\ \gamma = w + W,$$

u, v, w, U, V, W die Potentiale von Massen im Punkte (x, y, z) eichnen, welche durch den ganzen Raum vertheilt sind und bezieigsweise die Dichtigkeiten

$$\frac{m}{4\pi n}\frac{d\delta}{dx},\quad \frac{m}{4\pi n}\frac{d\delta}{dy},\quad \frac{m}{4\pi n}\frac{d\delta}{dz},\quad \frac{X}{4\pi n},\quad \frac{Y}{4\pi n},\quad \frac{Z}{4\pi n}$$

en; mit anderen Worten: u, u. s. w., U, u. s. w. sind solche Funcen, dass in allen Punkten des Raumes

$$\nabla^2 u + \frac{m}{n}\frac{d\delta}{dx} = 0, \text{ u. s. w.}, \quad \nabla^2 U + \frac{X}{n} = 0, \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnen also δ'', X'', Y'', Z'' die Werthe von δ, X, Y, Z für en Punkt (x'', y'', z''), so erhalten wir für α

$$\alpha = \frac{1}{4\pi n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(m\frac{d\delta''}{dx''} + X''\right) dx''\, dy''\, dz''}{\sqrt{[(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2]}};$$

d hierin δ'' durch seinen Werth (6) ersetzt, so wird α durch die

Summme eines sechsfachen und eines dreifachen Integrals ausgedrückt; da letztere ist das U der Formel (7). Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für β und γ. Dieselben lassen sich jedoch bedeutend vereinfachen, da, wie wir alsbald sehen werden, jedes der sechsfachen Integrale auf ein dreifaches reducirt werden kann.

Specieller Fall. — (e) Um einen besonderen Fall zu betrachten nehmen wir an, jede der Grössen X, Y, Z sei im Innern einer Kugel die den Coordinatenanfang zum Mittelpunkt und den Radius a hat, überall constant, in jedem andern Punkte dagegen Null. Unter dieser Voraussetzung wird $-\delta$ nach (6) die Summe der Producte jeder der Grössen X, Y, Z in die entsprechende Componente der Attraction einer durch jenen Raum mit der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi(m+n)}$ gleichförmig vertheilten Masse. Folglich ist [§ 491 (b)]

$$(10)\quad \begin{cases} \delta = \dfrac{-a^3}{3(m+n)} \dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3} & \text{für Punkte ausserhalb der Kugelfläche,} \\ \delta = \dfrac{-1}{3(m+n)}(Xx+Yy+Zz) & \text{für Punkte innerhalb der Kugelfläche.} \end{cases}$$

Nun können wir das u der Formel (8) in zwei Theile u', u'' theilen welche beziehungsweise von den Werthen abhängen, die $\frac{d\delta}{dx}$ innerhalb und ausserhalb der Kugelfläche hat; dann ist

$$(11)\quad \begin{cases} \text{für } r<a & \nabla^2 u' = \dfrac{mX}{3n(m+n)} = const., \\ \quad\text{„}\ \ r>a & \nabla^2 u' = 0; \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \text{für } r<a & \nabla^2 u'' = 0, \\ \quad\text{„}\ \ r>a & \nabla^2 u'' = -\dfrac{m}{n}\dfrac{d\delta}{dx}, \end{cases}$$

und dies ist eine räumliche harmonische Kugelfunction vom Grade -3, da δ durch die erste der Gleichungen (10) gegeben ist.

Die Lösung von (11), welche einfach das Potential einer gleichmässig mit Masse erfüllten Kugel von der Dichtigkeit $-\frac{1}{4\pi}\frac{mX}{3n(m+n)}$ bedeutet, ist natürlich

$$(13)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{-mX}{18n(m+n)}(3a^2-r^2) \text{ für } r<a \\ u' = \dfrac{-mX}{9n(m+n)}\dfrac{a^3}{r} \text{ für } r>a. \end{cases}$$

Wenn wir weiter in der Formel (12) des Zusatzes B $m=2$, $n=-$ und $V_{-3} = \frac{d\delta}{dx}$ setzen, so erhalten wir

$$(14)\quad \nabla^2\left(r^2\frac{d\delta}{dx}\right) = -6\frac{d\delta}{dx} \text{ für } r>a,$$

da, für $r>a$, $\frac{d\delta}{dx}$ eine harmonische Kugelfunction der Ordnung -3 ist

Nun ist $r^5 \frac{d\vartheta}{dx}$ [Zusatz B (13)] eine räumliche harmonische Kugelfunction vom Grade 2; bezeichnet also $\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right]$ für irgend einen Punkt innerhalb der Kugelfläche denselben algebraischen Ausdruck, welchen $\frac{d\vartheta}{dx}$ nach (10) für den äusseren Raum bezeichnet, so ist $\frac{r^5}{a^3}\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right]$ eine Function, welche für den ganzen Raum innerhalb der Kugel der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ genügt und für die der Kugeloberfläche innen und aussen unendlich nahe liegenden Punkte gleich $r^2 \frac{d\vartheta}{dx}$ ist. Folglich ist $\frac{r^5}{a^3}\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right]$ für den inneren und $r^2 \frac{d\vartheta}{dx}$ für den äusseren Raum das Potential einer Masse, deren Dichtigkeit ausserhalb der Kugel $\frac{1}{4\pi} \cdot 6 \frac{d\vartheta}{dx}$, innerhalb dagegen Null ist, und einer, so viel wir bis jetzt wissen, völlig unbestimmten Massenschicht, welche über die trennende Kugeloberfläche vertheilt ist. Um die Flächendichtigkeit dieser Schicht zu finden, nehmen wir zunächst für einen der Oberfläche unendlich nahe liegenden äusseren Punkt

$$\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz}\right)\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dx}\right),$$

was wir mit $-\{rR\}$ bezeichnen können, und für einen der Oberfläche unendlich nahe liegenden inneren Punkt

$$\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz}\right)\left(\frac{r^5}{a^3}\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right]\right)$$

was mit $-[rR]$ bezeichnet werden möge. Berücksichtigen wir dann, dass nach der Bezeichnung des Zusatzes A (a) $x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz}$ dasselbe wie $r \frac{\partial}{dr}$ ist, so erhalten wir nach Zusatz B (5)

$$\{R\} = r \frac{d\vartheta}{dx} \text{ und } [R] = -2 \frac{r^4}{a^3}\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right].$$

Folglich ist, da $r^3 \frac{d\vartheta}{dx}$ für den äusseren Raum von r unabhängig ist, und da r für jeden der beiden Punkte sich unendlich wenig von a unterscheidet,

$$\{R\} - [R] = \frac{3}{a^2} \cdot r^3 \frac{d\vartheta}{dx}.$$

Nun sind aber $\{R\}$ und $[R]$ die in der Richtung der Radien genommenen Componenten der dem in der vorausgesetzten Weise vertheilten Potential entsprechenden Kraft in Punkten, die einander unendlich nahe zu beiden Seiten der Kugelfläche liegen. Mithin geht aus § 478 hervor, dass es zur Erzeugung jener Vertheilung einer Massenschicht auf der trennenden Oberfläche bedarf, welche die Flächendichtigkeit

$$\frac{1}{4\pi}(\{R\} - [R])$$

hat. Da aber $\{R\} - [R]$ eine harmonische Flächenfunction zweiter Ordnung ist, so ist das Potential dieser Schicht allein [§ 536 (4)]

$$\tfrac{1}{5}\,(\{R\} - [R])\,\frac{r^2}{a} \text{ im Innern der Kugel}$$

und

$$\tfrac{1}{5}\,(\{R\} - [R])\,\frac{a^4}{r^3} \text{ im äusseren Raum,}$$

oder, mit Rücksicht auf den oben für $\{R\} - [R]$ gefundenen Werth.

$$\frac{3}{5a^3}\,r^5\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right] \text{ im Innern der Kugel}$$

und

$$\frac{3a^2}{5}\,\frac{d\vartheta}{dx} \text{ im äusseren Raum.}$$

Wird dieses Potential von dem früher angenommenen Gesammtpotential subtrahirt, so folgt

$$\text{für das Innere der Kugel } \frac{2}{5a^3}\,r^5\left[\frac{d\vartheta}{dx}\right]$$

$$\text{und für den äusseren Raum } (r^2 - \tfrac{3}{5}\,a^2)\,\frac{d\vartheta}{dx}$$

als Werth des Potentials einer durch den äusseren Raum mit der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi}\cdot 6\,r^2\frac{d\vartheta}{dx}$ vertheilten Masse, die keine Oberflächenschicht hat. Hieraus und aus (14) ersehen wir, dass die Lösung von (12) folgende ist:—

$$(15)\quad \begin{cases} u'' = \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{5}\,\dfrac{m}{n}\,\dfrac{r^5}{a^3}\left[\dfrac{d\vartheta}{dx}\right] \text{ für } r < a \\ u'' = \tfrac{1}{6}\,\dfrac{m}{n}\,(r^2 - \tfrac{3}{5}\,a^2)\,\dfrac{d\vartheta}{dx} \text{ für } r > a. \end{cases}$$

Da aus (8) hervorgeht, dass U das Potential einer Masse von der Dichtigkeit $\frac{X}{4\pi n}$ ist, und da X im Innern der Kugel constant und in jedem äusseren Punkte Null ist, so erhalten wir

$$(16)\quad \begin{cases} U = \dfrac{X}{6n}\,(3a^2 - r^2) \text{ für } r < a \\ U = \dfrac{X}{3n}\,\dfrac{a^3}{r} \text{ für } r > a. \end{cases}$$

Dies liefert nach (7), mit Rücksicht auf (13), (15) und (10),

$$17\quad \begin{cases} \text{für } r < a \\ \alpha = \dfrac{1}{18n(m+n)}\left\{(2m+3n)\,X\,(3a^2 - r^2) - \tfrac{2}{5}\,m\,r^5\,\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3}\right\} \\ \text{und für } r > a \\ \alpha = \dfrac{a^3}{18n(m+n)}\left\{2(2m+3n)\,\dfrac{X}{r} - m\,(r^2 - \tfrac{3}{5}\,a^2)\,\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3}\right\}, \end{cases}$$

und symmetrische Ausdrücke für β und γ.

731. Eine eingehende Betrachtung dieses Resultats mit gra- ischen Erläuterungen der Verschiebungen, Deformationen und stischen Reactionen, zu denen es führt, ist in der Theorie der rtleitung der Kraft durch feste Körper vom grössten Interesse. r müssen es uns aber versagen, hierauf einzugehen, und werden ı auf die Lösung des allgemeinen Problems des § 730 be- ränken.

Um dieselbe herzuleiten, haben wir jetzt nur zu bemerken, dass, wenn nendlich klein wird, die Ausdrücke für α, β, γ, da X, Y, Z endlich iben, gleichfalls unendlich klein werden, sogar innerhalb des Angriffs- ı der Kraft; in Entfernungen von diesem Angriffsort, die gross sind Vergleich zu a, wird

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{V}{24\pi n(m+n)}\left\{2(2m+3n)\dfrac{X}{r} - mr^2\dfrac{d}{dx}\dfrac{Xx+Yy+Zz}{r^3}\right\}\\ \qquad\beta = \text{u. s. w.},\quad \gamma = \text{u. s. w.},\end{array}\right.$$

V das Volumen der Kugel bezeichnet. Da diese Ausdrücke einfach ı dem ganzen Betrage der Kraft abhängen (deren Componenten XV, V, ZV sind) und, wenn letztere gegeben ist, von dem Radius der Ku- unabhängig sind, so drücken dieselben Formeln auch die Wirkung es im Ganzen ebenso grossen Kraftsystems aus, welches durch einen ndlich kleinen Raum von beliebiger Form vertheilt ist, der nach kei- Richtung hin mehr als unendlich wenig vom Coordinatenanfangs- ıkt aus ausgedehnt ist. Wir erhalten daher, wenn wir wieder die Be- hnung des § 730 (b) anwenden, für die gesuchte allgemeine Lösung

$$\frac{1}{(m+n)}\iiint dx'\,dy'\,dz'\left\{2(2m+3n)\frac{X'}{D} - mD^2\frac{d}{dx}\frac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{D^3}\right\}$$

$$\frac{1}{(m+n)}\iiint dx'\,dy'\,dz'\left\{2(2m+3n)\frac{Y'}{D} - mD^2\frac{d}{dy}\frac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{D^3}\right\}$$

$$\frac{1}{(m+n)}\iiint dx'\,dy'\,dz'\left\{2(2m+3n)\frac{Z'}{D} - mD^2\frac{d}{dz}\frac{X'(x-x')+Y'(y-y')+Z'(z-z')}{D^3}\right\},$$

$\sqrt{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}}$ ist, die Integration $\iiint$ sich durch den aum erstreckt und X', Y', Z' drei willkürliche, nur durch die Convergenz- ; des § 730 beschränkte Functionen von x', y', z' sind.

se Lösung wurde, wenn auch in etwas anderer Form, zuerst im Cam- idge and Dublin Mathematical Journal 1848 gegeben. (On the uations of Equilibrium of an Elastic Solid.)

Vergleichen wir sie mit (9), so sehen wir, dass das in (9) enthaltene hsfache Integral jetzt wirklich auf ein dreifaches reducirt ist.

Der Process (e), durch welchen diese Reduction ausgeführt wird, be- ht der Hauptsache nach aus der Berechnung eines gewissen dreifachen egrals mittels der passenden Lösung der partiellen Differentialgleichung $V + 4\pi\varrho = 0$ [vergl. § 649, wo der viel einfachere Fall behandelt rd, in welchem ϱ bloss eine Function von r ist]. Das Resultat durch

directe Integration zu prüfen, ist eine gute Uebung in der Integralrechnung.

732. Anwendung auf das Problem des § 696. — In §§ 730, 731 ist der gedachte Gegenstand ein homogener elastischer fester Körper, welcher den ganzen Raum erfüllt und die Wirkung eines gegebenen Kräftesystems erfährt, welches auf seine Substanz körperlich einwirkt. Abgesehen von der in § 731 angedeuteten interessanten Anwendung, ist die Lösung insofern von Nutzen, als sie das Problem des § 696 vereinfacht; sie reducirt dasselbe nämlich unmittelbar auf den Fall, in welchem keine Kraft auf die innere Substanz des Körpers wirkt: —

Die Gleichungen, denen genügt werden muss, sind für den ganzen vom Körper eingenommenen Raum die Formeln (6) des § 698 und für alle Punkte seiner Umgrenzung gewisse andere Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Verschiebungen oder die Zugkräfte auf der Oberfläche den vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Es seien nun ${}'\alpha$, ${}'\beta$, ${}'\gamma$ Functionen von (x, y, z), welche für den vom Körper eingenommenen Raum die Gleichungen

$$(1)\quad\begin{cases} n\nabla^2\,{}'\alpha + m\dfrac{\partial\,{}'\vartheta}{dx} + X = 0, \quad n\nabla^2\,{}'\beta + m\dfrac{\partial\,{}'\vartheta}{dy} + Y = 0, \\ n\nabla^2\,{}'\gamma + m\dfrac{\partial\,{}'\vartheta}{dz} + Z = 0, \quad \text{wo der Kürze wegen} \\ {}'\vartheta = \dfrac{\partial\,{}'\alpha}{dx} + \dfrac{\partial\,{}'\beta}{dy} + \dfrac{\partial\,{}'\gamma}{dz} \text{ ist,} \end{cases}$$

befriedigen. Setzen wir dann

$$(2)\qquad \alpha = {}'\alpha + \alpha_{\prime}, \quad \beta = {}'\beta + \beta_{\prime}, \quad \gamma = {}'\gamma + \gamma_{\prime},$$

so sehen wir, dass wir, um die Aufgabe vollständig zu lösen, $\alpha_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\gamma_{\prime}$ mittels der Gleichungen

$$(3)\quad\begin{cases} n\nabla^2\alpha_{\prime} + m\dfrac{d\vartheta_{\prime}}{dx} = 0, \quad n\nabla^2\beta_{\prime} + m\dfrac{d\vartheta_{\prime}}{dy} = 0, \\ n\nabla^2\gamma_{\prime} + m\dfrac{d\vartheta_{\prime}}{dz} = 0, \quad \vartheta_{\prime} = \dfrac{d\alpha_{\prime}}{dx} + \dfrac{d\beta_{\prime}}{dy} + \dfrac{d\gamma_{\prime}}{dz}, \end{cases}$$

die in dem ganzen vom Körper eingenommenen Raum erfüllt sein müssen, und zugleich mittels der für die Punkte der Umgrenzung des Körpers geltenden Gleichungen zu bestimmen haben; die letzteren Gleichungen erhält man, wenn man von den vorgeschriebenen Werthen der Oberflächenverschiebung oder Zugkraft die aus ${}'\alpha$, ${}'\beta$, ${}'\gamma$ berechneten Componenten der Verschiebung oder der Zugkraft subtrahirt.

Werthe für ${}'\alpha$, ${}'\beta$, ${}'\gamma$ kann man nach §§ 730, 731 immer finden, indem man voraussetzt, die Gleichungen (1) des § 732 seien für den ganzen Raum gültig und X, Y, Z seien discontinuirliche Functionen, welche für alle Punkte des Körpers die gegebenen Werthe haben, und von denen jede für alle dem Körper nicht angehörenden Punkte Null sei. Ab

einzige Bedingung, die erfüllt sein muss, ist die, dass die Gleichun- (1) in dem vom Körper wirklich eingenommenen Raume erfüllt seien, l in einigen der wichtigsten Fälle der Praxis kann dieser Bedingung hter auf eine andere Weise genügt werden, als indem man $'\alpha$, $'\beta$, $'\gamma$ die angegebene Art bestimmt, und noch eine Bedingung für den übri- Raum hinzufügt.

733. Eine wichtige Klasse von Fällen. — So z. B. wollen voraussetzen, die Kräfte seien so beschaffen, dass $Xdx + Ydy$ Zdz[1]) das Differential einer Function W der als unabhängig ränderliche angesehenen Grössen x, y, z ist. Diese Voraussetzung fasst einige der wichtigsten und interessantesten Anwendungen f die Praxis, darunter folgende: —

(1) Ein homogener isotroper Körper, auf welchen in pa- lelen Linien gleiche Gravitationskräfte wirken, wie es bei einem rper von geringen Dimensionen unter dem Einfluss der terrestri- en Gravitation der Fall ist.

(2) Ein homogener isotroper Körper, auf welchen eine be- big vertheilte schwere Masse wirkt, und der entweder im Zu- nd der Ruhe durch Oberflächenzugkräfte ins Gleichgewicht ge- acht wird, wenn die Attractionskräfte einander nicht selbst das eichgewicht halten; oder der dem D'Alembert'schen Princip 264) gemäss die Bedingungen des inneren Gleichgewichts erfüllt, dem die Widerstände aller Theile seiner Masse gegen Beschleuni- ngen und die Attractionskräfte, denen er unterworfen ist, einan- r das Gleichgewicht halten, wenn die Umstände von der Art sind, ss keine Beschleunigung der Rotation in Rechnung gezogen werden

---

1) Es sei m die Masse eines kleinen Theils des Körpers; x, y, z die Coordi- ten, welche dieser Theil zu irgend einer Zeit hat; und Pm, Qm, Rm die Com- nenten der auf den Theil wirkenden Kraft. Wenn dann das System conservativ , so muss $Pdx + Qdy + Rdz$ das Differential einer Function von x, y, z in. Es mögen z. B. die auf alle Theile des Körpers wirkenden Kräfte in den n einer festliegenden Masse ausgeübten Anziehungen oder Abstossungen bestehen, d es sei der betrachtete Massenpunkt die Masse des Körpers innerhalb eines endlich kleinen Volumens $\delta x \delta y \delta z$. Dann haben wir $Pm = X\delta x \delta y \delta z$, s. w. Wenn also ϱ die Dichtigkeit der Masse von m bezeichnet, so dass $\delta x \delta y \delta z = m$ ist, so ist in der Bezeichnung des Textes $P\varrho = X$, $Q\varrho = Y$, $\varrho = Z$; folglich ist $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential oder cht, jenachdem ϱ eine Function des Potentials ist oder nicht, d. h. jenachdem e Dichtigkeit des Körpers auf den Flächen constanten Potentials für die Kraft- rtheilung, zu der (P, Q, R) gehört, gleichförmig ist oder nicht. So wird die edingung des Textes im Falle eines conservativen Kraftsystems erfüllt, wenn der örper homogen ist. Sie wird aber erfüllt, das System mag conservativ sein oder cht, für ein solches Dichtigkeitsgesetz, dass, wenn der Körper seine Starrheit rlöre und sich in eine in einem geschlossenen starren Gefäss befindliche unzu- mmendrückbare Flüssigkeit verwandelte, er sich im Gleichgewicht (§ 755) befin- en würde.

muss. Zu diesem Falle gehört das unten gelöste Problem, die durch den Ebbe und Fluth erzeugenden Einfluss der Sonne und des Mon des hervorgebrachte Deformation der festen Erde zu bestimmen wenn das specifische Gewicht und die Starrheit derselben überal als gleichmässig angenommen werden.

(3) Ein gleichförmiger Körper, deformirt durch eine Centri fugalkraft, die aus einer gleichförmigen Rotation um eine feste Ax herrührt.

In jener Voraussetzung sind aber nicht enthalten: der Fa eines festen Körpers, dessen specifisches Gewicht nach einem beli bigen Gesetz in den verschiedenen Theilen variirt, und der belieb gen jener Einwirkungen unterworfen ist; allgemein der Fall ein Stücks magnetisirten Stahls, das einer magnetischen Anziehung au gesetzt ist; ja nicht einmal der Fall eines gleichförmigen Körpe welcher den Bedingungen des inneren Gleichgewichts genügt, sob die Widerstände gegen eine Beschleunigung seiner Rotation um ei feste Axe, die durch Oberflächenkräfte erzeugt wird, in Betrach kommen.

Wir haben nach der hier gemachten Voraussetzung

$$\frac{dW}{dx} = X, \quad \frac{dW}{dy} = Y, \quad \frac{dW}{dz} = Z, \tag{4}$$

und dies liefert

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \nabla^2 W.$$

Hieraus folgt für $'\delta$, wie sich in § 730 (a) für δ ergab,

$$(m + n)\, \nabla^2 {}'\delta + \nabla^2 W = 0,$$

welche Formel durch die Annahme

$$\delta = -\frac{W}{m+n} \tag{5}$$

befriedigt wird. Führen wir weiter diese Voraussetzungen in die Glei chungen (1) des § 732 ein, so sehen wir, dass dieselben schliesslich durch folgende Werthe für $'\alpha$, $'\beta$, $'\gamma$ befriedigt werden: —

$$\left\{\begin{array}{l} '\alpha = \dfrac{1}{m+n}\dfrac{d\vartheta}{dx}, \quad '\beta = \dfrac{1}{m+n}\dfrac{d\vartheta}{dy}, \quad '\gamma = \dfrac{1}{m+n}\dfrac{d\vartheta}{dz}, \\ \text{wo } \vartheta \text{ eine beliebige Function ist, welche der Gleichung} \\ \nabla^2\vartheta = -W \text{ genügt.} \end{array}\right. \tag{6}$$

Wir bemerken noch, dass, wenn W eine harmonische Kugelfunction [Zusatz B (a)] ist, eine Voraussetzung, welche, wie wir später sehen werden, die wichtigsten Anwendungen auf physikalische Probleme in sich schliesst, wir ohne Weiteres aus Zusatz B (12) folgendes Integral der Gleichung für ϑ erhalten: —

$$\vartheta = \frac{r^2}{2(2\nu+3)} W_\nu, \tag{7}$$

wo der an W gehängte Index ausdrückt, dass diese Grösse vom Grade ν ist

734. Das Problem des § 696 unter der Voraussetzung, dass nur auf die Oberfläche Kräfte einwirken. — Das allgemeine Problem des § 696, welches jetzt auf den Fall zurückgeführt ist, in dem keine Kraft auf die innere Substanz einwirkt, wird danach, mathematisch ausgedrückt, folgendes: —

Drei Functionen α, β, γ von (x, y, z), welche für alle Punkte des vom Körper eingenommenen Raumes den Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} n\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right)+m\frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=0\\ n\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)+m\frac{d}{dy}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=0\\ n\left(\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}+\frac{d^2\gamma}{dz^2}\right)+m\frac{d}{dz}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)=0 \end{cases}$$

genügen, und die Gleichungen für alle Punkte der Umgrenzung zu bestimmen, welche geeignet sind, eine beliebige genügende Combination der beiden in § 696 angegebenen Oberflächenbedingungen oder eine derselben auszudrücken. Wenn diese Bedingungen darin bestehen, dass die Verschiebungen auf der Oberfläche gegeben sind, so sind die sie ausdrückenden Gleichungen natürlich bloss die Angabe willkürlicher Werthe von α, β, γ für jeden Punkt der Umgrenzungsfläche. Wenn andererseits auf der ganzen Oberfläche in einer völlig bestimmten Weise Kräfte angreifen, die nur den Bedingungen unterworfen sind, dass sie den in seinem deformirten Zustande als starr (§ 564) angenommenen Körper im Gleichgewicht halten, und wenn es sich darum handelt, zu bestimmen, wie der Körper sowohl an seiner Oberfläche, als in seinem Innern nachgibt, so sind die Bedingungen folgende: — Es bezeichne $d\Omega$ ein unendlich kleines Element der Oberfläche, und F, G, H Functionen der Lage auf der Oberfläche, welche die Componenten der einwirkenden Zugkraft ausdrücken. Diese Functionen sind willkürlich und nur den folgenden Bedingungen unterworfen, welche die Gleichungen [§ 551 (a), (b)] des Gleichgewichts eines starren Körpers sind: —

$$(2)\quad \begin{cases} \iint F\,d\Omega=0,\quad \iint G\,d\Omega=0,\quad \iint H\,d\Omega=0,\\ \iint(Hy-Gz)\,d\Omega=0,\quad \iint(Fz-Hx)\,d\Omega=0,\quad \iint(Gx-Fy)\,d\Omega=0; \end{cases}$$

ferner muss die vom Körper erlittene Deformation so beschaffen sein, dass sie für jeden Punkt der Oberfläche die Gleichungen

$$(3)\begin{cases}\left\{(m+n)\frac{d\alpha}{dx}+(m-n)\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\right\}f+n\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)g+n\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dz}\right)h=F\\ \left\{(m+n)\frac{d\beta}{dy}+(m-n)\left(\frac{d\gamma}{dz}+\frac{d\alpha}{dx}\right)\right\}g+n\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)h+n\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)f=G\\ \left\{(m+n)\frac{d\gamma}{dz}+(m-n)\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\right\}h+n\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dz}\right)f+n\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)g=H\end{cases}$$

befriedigt, welche aus § 662 (1) mit Anwendung von § 670 (6), § 693 (5) und § 698 (5) gefunden werden; f, g, h bezeichnen hier die Richtungscosinus der an die Umgrenzungsfläche in (x, y, z) gelegten Normalen.

735. Lösung des Problems des § 696 für Kugelschalen. — Die mittels der Laplace'schen Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen erhaltene Lösung dieses Problems für den Fall einer Kugelschale (§ 696) hat zuerst Lamé in einer in Liouville's Journal 1854 veröffentlichten Arbeit gegeben. Sie wird durch unsere Bezeichnungsweise und symmetrischen Formeln [Zusatz B (1) — (24)] sehr vereinfacht [1]), die wir so lange beibehalten, bis wir für praktische Zwecke geeignete Entwicklungen der harmonischen Functionen in algebraischer oder trigonometrischer Form suchen werden.

(a) Wenn wir der Kürze wegen die bisher [§ 698 (8), (9)] gebrauchten Zeichen δ und ∇^2 beibehalten, so erhalten wir aus § 734 (1) nach dem Verfahren (a) des § 730

$$\nabla^2\delta = 0.$$

(b) **Beweis, dass die Ausdehnung sich in convergenten Reihen harmonischer Kugelfunctionen ausdrücken lässt.** — Es seien nun die Werthe, welche δ auf zwei beliebigen concentrischen Kugelflächen von den Radien a und a' hat, nach Zusatz B (52) in Reihen harmonischer Flächenfunctionen S_0, S_1, S_2, u. s. w. und S_0', S_1', S_2', u. s. w. entwickelt, so dass

$$(4)\qquad\begin{cases}\delta = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_\nu + \ldots \text{ für } r = a\\ \delta = S_0' + S_1' + S_2' + \ldots + S_\nu' + \ldots \text{ für } r = a'\end{cases}$$

ist. Dann muss in dem ganzen zwischen beiden Kugelflächen liegenden Raum

$$(5)\qquad \delta = \sum_0^\infty \frac{(a^{\nu+1}S_\nu - a'^{\nu+1}S'_\nu)\,r^\nu - (a\,a')^{\nu+1}(a'^\nu S_\nu - a^\nu S'_\nu)\,r^{-\nu-1}}{a^{2\nu+1} - a'^{2\nu+1}}$$

sein. Denn erstens convergirt diese Reihe für alle zwischen a und a'

---

[1]) „Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells, and Spheroids of Incompressible Liquid." W. Thomson, Phil. Trans., 1862.

liegenden Werthe von r. Dies zu beweisen, nehmen wir an, a' sei kleiner als a und schreiben (5) in der Form

$$(6) \qquad \delta = \sum_0^\infty \delta_\nu + \sum_0^\infty \delta_{-\nu-1},$$

wo δ_ν, $\delta_{-\nu-1}$ räumliche harmonische Kugelfunctionen von den Graden ν und $-\nu-1$ sind, die durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind: —

$$\delta_\nu = \frac{S_\nu - \left(\frac{a'}{a}\right)^{\nu+1} S'_\nu}{1-\left(\frac{a'}{a}\right)^{2\nu+1}} \left(\frac{r}{a}\right)^\nu \text{ und } \delta_{-\nu-1} = -\frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^\nu S_\nu - S'_\nu}{1-\left(\frac{a'}{a}\right)^{2\nu+1}} \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+1}.$$

Für sehr grosse Werthe von ν nähern sich diese Ausdrücke den Grenzen

$$\delta_\nu = S_\nu \left(\frac{r}{a}\right)^\nu \text{ und } \delta_{-\nu-1} = S'_\nu \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+1},$$

und da jede der Reihen (4) nothwendig convergirt, so convergiren die beiden Reihen, in welche in (6) die Entwicklung (5) getheilt ist, zuletzt rascher, als beziehungsweise die „geometrischen" Reihen

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\nu, \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu+1}, \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu+2}, \ldots \text{ und} \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+1}, \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+2}, \left(\frac{a'}{r}\right)^{\nu+3}, \ldots$$

Zweitens stimmt der Ausdruck (5) an der Grenze des betrachteten Raumes (den beiden concentrischen Kugelflächen) mit (4) überein.

Drittens genügt er in diesem Raume überall der Gleichung $\nabla^2\delta = 0$.

Folglich kann viertens keine Function, deren Werth von dem durch (5) gegebenen in irgend einem Punkte des zwischen beiden Kugelflächen liegenden Raumes verschieden ist, [Zusatz A (e)] den Bedingungen (3) und (4), denen δ unterworfen ist, genügen. In Worten lässt sich dies folgendermaassen ausdrücken: —

736. Allgemeiner Satz über die Möglichkeit einer Entwicklung nach räumlichen harmonischen Kugelfunctionen. — Jede Function δ von x, y, z, welche für alle Punkte des zwischen $\nabla^2\delta = 0$ genügt, zwei concentrischen Kugelflächen liegenden Raumes der Gleichung kann als die Summe zweier Reihen vollkommener harmonischer Kugelfunctionen [Zusatz B (c)] dargestellt werden, von denen dieeine von einem positiven, die andere von einem negativen Grade ist, und von denen jede für alle Punkte jenes Raumes convergirt.

(c) Wir können jetzt (6) kurz in folgender Form schreiben: —

$$(7) \qquad \delta = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_\nu,$$

wo die vollkommene harmonische Kugelfunction δ_ν vom positiven oder negativen Grade ν schliesslich so bestimmt werden muss, dass den Bedingungen des Problems genügt wird. Wenn wir dieselbe aber erst als bekannt voraussetzen, so finden wir α, β, γ wie in § 730 (d), nur dass

wir jetzt die für harmonische Kugelfunctionen geeigneten Formeln benutzen, statt eine dreifache Integration anzuwenden. So erhalten wir aus (1) und (7)

$$\nabla^2 \alpha = -\frac{m}{n} \Sigma \frac{d\delta_\nu}{dx},$$

und da $\frac{d\delta_\nu}{dx}$ eine harmonische Function vom Grade $\nu - 1$ ist, so sehen wir, wenn wir im Zusatz B (12) $n = \nu - 1$ und $m = 2$ nehmen, dass die vollständige Lösung dieser Gleichung, als Gleichung für α angesehen,

$$\alpha = u - \frac{m r^2}{2n} \Sigma \frac{1}{2\nu + 1} \frac{d\delta_\nu}{dx}$$

ist, wo u eine ganz beliebige Lösung der Gleichung $\nabla^2 u = 0$ bezeichnet. Sind ebenso v und w Functionen, für welche $\nabla^2 v = 0$ und $\nabla^2 w = 0$ ist, so erhalten wir

$$\beta = v - \frac{m r^2}{2n} \Sigma \frac{1}{2\nu + 1} \frac{d\delta_\nu}{dy}, \; \gamma = w - \frac{m r^2}{2n} \Sigma \frac{1}{2\nu + 1} \frac{d\delta_\nu}{dz}.$$

Lösung der Gleichungen des innern Gleichgewichts in harmonischen Kugelfunctionen. — (d) Damit nun die Gleichungen (1) befriedigt werden, muss δ_ν in einem solchen Zusammenhange mit u, v, w stehen, dass

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \delta = \Sigma \delta_\nu$$

sei. Wenn wir folglich die eben für α, β, γ gefundenen Werthe differentiiren und die Formel

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(r^2 \frac{d\varphi_\nu}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(r^2 \frac{d\varphi_\nu}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(r^2 \frac{d\varphi_\nu}{dz}\right) \\ = 2\left(x \frac{d}{dx} + y \frac{d}{dy} + z \frac{d}{dz}\right) \varphi_\nu + r^2 \nabla^2 \varphi_\nu = 2\nu\varphi_\nu + r^2 \nabla^2 \varphi_\nu \end{cases}$$

in welcher φ_ν eine beliebige homogene Function νten Grades ist, berücksichtigen, so erhalten wir

$$\Sigma \delta_\nu = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} - \frac{m}{n} \Sigma \frac{\nu}{2\nu + 1} \delta_\nu.$$

Dies liefert

$$(9) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \Sigma \frac{(2\nu + 1) n + \nu m}{(2\nu + 1) n} \delta_\nu.$$

Wenn also Σu_ν, Σv_ν, Σw_ν die harmonischen Entwicklungen (§ 738) von u, v, w sind, so muss

$$(10) \qquad \delta_\nu = \frac{(2\nu + 1) n}{(2\nu + 1) n + \nu m} \left(\frac{du_{\nu+1}}{dx} + \frac{dv_{\nu+1}}{dy} + \frac{dw_{\nu+1}}{dz}\right)$$

sein. Wird dies, nachdem ν in $\nu - 1$ verwandelt ist, in die vorhergehenden Ausdrücke für α, β, γ eingesetzt, so gelangen wir schliesslich zu der Lösung der Gleichungen (1) des § 734 in harmonischen Kugelfunctionen: —

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \left\{ u_\nu - \tfrac{1}{2} \dfrac{m r^2}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du_\nu}{dx}+\dfrac{dv_\nu}{dy}+\dfrac{dw_\nu}{dz}\right)\right\} \\ \beta = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \left\{ v_\nu - \tfrac{1}{2} \dfrac{m r^2}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m} \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{du_\nu}{dx}+\dfrac{dv_\nu}{dy}+\dfrac{dw_\nu}{dz}\right)\right\} \\ \gamma = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \left\{ w_\nu - \tfrac{1}{2} \dfrac{m r^2}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{du_\nu}{dx}+\dfrac{dv_\nu}{dy}+\dfrac{dw_\nu}{dz}\right)\right\}, \end{cases}$$

wo u_ν, v_ν, w_ν beliebige harmonische Kugelfunctionen vom Grade ν bezeichnen.

Für die folgenden analytischen Untersuchungen ist es zweckmässig, die Abkürzungen

$$(12)\quad M_\nu = \tfrac{1}{2} \frac{m}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m}$$

und

$$(13)\quad \psi_{\nu-1} = \frac{du_\nu}{dx} + \frac{dv_\nu}{dy} + \frac{dw_\nu}{dz}$$

einzuführen, wodurch (11) in

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \left(u_\nu - M_\nu r^2 \dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dx}\right) \\ \beta = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \left(v_\nu - M_\nu r^2 \dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dy}\right) \\ \gamma = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty} \left(w_\nu - M_\nu r^2 \dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dz}\right) \end{cases}$$

übergeht.

(e) Es ist wichtig zu bemerken, dass, wenn man zu u, v, w beziehungsweise die Glieder $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ addirt (φ ist eine beliebige Function, welche der Gleichung $\nabla^2\varphi = 0$ genügt), die Gleichung (10) nicht geändert wird. Dies gestattet uns, die Lösung des Problems für eine Vollkugel, wenn die Verschiebungen über die Oberfläche gegeben sind, ohne Weiteres niederzuschreiben:

Es sei a der Radius der Kugel, und es seien die willkürlich gegebenen Werthe der drei Verschiebungs-Componenten für jeden Punkt der Oberfläche durch Reihen harmonischer Flächenfunctionen, nämlich beziehungsweise durch ΣA_ν, ΣB_ν, ΣC_ν ausgedrückt [Zusatz B (52)]. Dann ist die Lösung

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha = \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left\{ A_\nu \left(\dfrac{r}{a}\right)^\nu + \dfrac{m(a^2-r^2)}{2a^\nu[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]} \dfrac{d\Theta_{\nu-1}}{dx}\right\} \\ \beta = \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left\{ B_\nu \left(\dfrac{r}{a}\right)^\nu + \dfrac{m(a^2-r^2)}{2a^\nu[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]} \dfrac{d\Theta_{\nu-1}}{dy}\right\} \\ \gamma = \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left\{ C_\nu \left(\dfrac{r}{a}\right)^\nu + \dfrac{m(a^2-r^2)}{2a^\nu[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]} \dfrac{d\Theta_{\nu-1}}{dz}\right\} \\ \text{wo } \Theta_{\nu-1} = \dfrac{d(A_\nu r^\nu)}{dx} + \dfrac{d(B_\nu r^\nu)}{dy} + \dfrac{d(C_\nu r^\nu)}{dz} \text{ ist.} \end{cases}$$

Denn dies ist's, was (11) wird, wenn wir

$$u_\nu = A_\nu \left(\frac{r}{a}\right)^\nu + \frac{m}{2a^\nu[(2\nu+3)n+(\nu+1)m]} \frac{d\Theta_{\nu+1}}{dx}, \quad v_\nu = \text{u. s. w.}$$

nehmen, und es folgt

$$(16) \qquad \alpha = \Sigma A_\nu, \quad \beta = \Sigma B_\nu, \quad \gamma = \Sigma C_\nu, \text{ wenn } r = a \text{ ist.}$$

Dieses Resultat hätte man natürlich durch ein rein analytisches Verfahren erhalten können, und wir werden zu demselben als einem besonderen Fall der folgenden Betrachtung gelangen: —

(f) Das Problem für eine Kugelschale, bei welcher die Verschiebungen für alle Punkte der beiden concentrischen sphärischen Umgrenzungsflächen willkürlich gegeben sind, ist viel verwickelter, und wir werden finden, dass ein rein analytisches Verfahren für die Lösung am geeignetsten ist.

Es seien a und a' die Radien der äusseren und der inneren Kugelfläche, und ΣA_ν, u. s. w., $\Sigma A'_\nu$, u. s. w. die Reihen der harmonischen Flächenfunctionen, welche [Zusatz B (52)] die willkürlich gegebenen Componenten der Verschiebung auf diesen Flächen ausdrücken, so dass unsere Oberflächenbedingungen folgende sind: —

$$(17) \quad \left.\begin{cases} \alpha = \Sigma A_\nu \\ \beta = \Sigma B_\nu \\ \gamma = \Sigma C_\nu \end{cases}\right\}, \text{ wenn } r = a \text{ ist;} \quad \left.\begin{matrix} \alpha = \Sigma A'_\nu \\ \beta = \Sigma B'_\nu \\ \gamma = \Sigma C'_\nu \end{matrix}\right\}, \text{ wenn } r = a' \text{ ist.}$$

Wir bedienen uns jetzt der abgekürzten Bezeichnung (12) und (13), nehmen aus (14) alle Glieder von α, welche für einen constanten Werth von r harmonische Flächenfunctionen ν ter Ordnung werden, und setzen dieselben den entsprechenden Gliedern von (17) gleich. Dadurch ergibt sich

$$(18) \quad \begin{cases} u_\nu + u_{-\nu-1} - r^2\left(M_{\nu+2}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx} + M_{-\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx}\right) \\ \qquad \begin{cases} = A_\nu, \text{ wenn } r = a \text{ ist} \\ = A'_\nu, \quad \text{,,} \quad r = a' \text{ ,,} \end{cases} \end{cases}.$$

Wenn wir beachten, dass jede der Grössen

$$r^{-\nu}u_\nu, \quad r^{\nu+1}u_{-\nu-1}, \quad r^{-\nu}\frac{d\psi_{\nu+1}}{dx}, \quad r^{\nu+1}\frac{d\psi_{-\nu}}{dx}$$

von r unabhängig ist, so erhalten wir aus (18) unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen zur Bestimmung dieser vier Functionen: —

$$19 \begin{cases} a^\nu(r^{-\nu}u_\nu) + a^{-\nu-1}(r^{\nu+1}u_{-\nu-1}) \\ -a^2\left[M_{\nu+2}a^\nu\left(r^{-\nu}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx}\right) + M_{-\nu+1}a^{-\nu-1}\left(r^{\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx}\right)\right] = A_\nu \\ a'^\nu(r^{-\nu}u_\nu) + a'^{-\nu-1}(r^{\nu+1}u_{-\nu-1}) \\ -a'^2\left[M_{\nu+2}a'^\nu\left(r^{-\nu}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx}\right) + M_{-\nu+1}a'^{-\nu-1}\left(r^{\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx}\right)\right] = A'_\nu \end{cases}$$

Diese und die auf y und z bezüglichen symmetrischen Gleichungen genügen in Verbindung mit (13), u_ν, v_ν, w_ν für jeden positiven und negati-

ist *folgende*: Man ermittle durch Elimination von u, v, w zunächst Gleichungen zur Bestimmung der Functionen ψ. Das geschieht auf folgende Weise: —

Aus (19) erhalten wir

$$(20)\quad \begin{cases} u_\nu = \dfrac{(a^{2\nu+3}-a'^{2\nu+3})M_{\nu+2}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx}+(a^2-a'^2)M_{-\nu+1}r^{2\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx}+(a^{\nu+1}A_\nu-a'^{\nu+1}A'_\nu)r^\nu}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}} \\ u_{-\nu-1} = \dfrac{-(aa')^{2\nu+1}(a^2-a'^2)M_{\nu+2}r^{-2\nu-1}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx}+(aa')^2(a^{2\nu-1}-a'^{2\nu-1})M_{-\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx}+(aa')^{\nu+1}(a^\nu A'_\nu-a'^\nu A_\nu)r^{-\nu-1}}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}} \end{cases}$$

und symmetrische Gleichungen für v und w. Setzen wir der Kürze wegen

$$(21)\quad \mathfrak{A}_\nu = \frac{a^{\nu+1}A_\nu-a'^{\nu+1}A'_\nu}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}},\quad \mathfrak{A}'_\nu = \frac{(aa')^{\nu+1}(a^\nu A'_\nu-a'^\nu A_\nu)}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}}$$

und

$$(22)\quad \mathfrak{M}_{\nu+2} = \frac{a^{2\nu+3}-a'^{2\nu+3}}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}}M_{\nu+2},\quad \mathfrak{N}_{\nu+2} = \frac{(aa')^{2\nu+1}(a^2-a'^2)}{a^{2\nu+1}-a'^{2\nu+1}}M_{\nu+2},$$

so gehen die Formeln (20) über in

$$(23)\quad \begin{cases} u_\nu = \mathfrak{M}_{\nu+2}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx} - \mathfrak{N}_{-\nu+1}r^{2\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx} + \mathfrak{A}_\nu r^\nu \\ u_{-\nu-1} = -\mathfrak{N}_{\nu+2}r^{-2\nu-1}\dfrac{d\psi_{\nu+1}}{dx} + \mathfrak{M}_{-\nu+1}\dfrac{d\psi_{-\nu}}{dx} + \mathfrak{A}'_\nu r^{-\nu-1} \\ v_\nu = \text{u. s. w.},\quad v_{-\nu-1} = \text{u. s. w.},\quad w_\nu = \text{u. s. w.},\quad w_{-\nu-1} = \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wenn wir die zur Elimination der Functionen u, v, w aus (23) und (13) erforderlichen Differentiationen und Summationen ausführen und die Eigenschaften der Functionen ψ benutzen, nach denen

$$\nabla^2\psi_{\nu+1}=0,\ \nabla^2\psi_{-\nu}=0,\ x\frac{d\psi_{\nu+1}}{dx}+y\frac{d\psi_{\nu+1}}{dy}+z\frac{d\psi_{\nu+1}}{dz}=(\nu+1)\psi_{\nu+1}$$

$$x\frac{d\psi_{-\nu}}{dx}+y\frac{d\psi_{-\nu}}{dy}+z\frac{d\psi_{-\nu}}{dz}=-\nu\psi_{-\nu}$$

ist, so erhalten wir

$$(24)\quad\begin{cases}\psi_{\nu-1}=(2\nu+1)\nu\mathfrak{R}_{-\nu+1}r^{2\nu-1}\psi_{-\nu}+\dfrac{d(\mathfrak{A}_\nu r^\nu)}{dx}+\dfrac{d(\mathfrak{B}_\nu r^\nu)}{dy}+\dfrac{d(\mathfrak{C}_\nu r^\nu)}{dz}\\ \psi_{-\nu-2}=(2\nu+1)(\nu+1)\mathfrak{R}_{\nu+2}r^{-2\nu-3}\psi_{\nu+1}\\ \qquad+\dfrac{d(\mathfrak{A}'_\nu r^{-\nu-1})}{dx}+\dfrac{d(\mathfrak{B}'_\nu r^{-\nu-1})}{dy}+\dfrac{d(\mathfrak{C}'_\nu r^{-\nu-1})}{dz}.\end{cases}$$

Wird in der ersteren dieser Gleichungen ν in $\nu+1$, in der zweiten ν in $\nu-1$ verwandelt, so ergeben sich zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Grössen ψ_ν, $\psi_{-\nu-1}$, aus denen

$$(25)\quad\begin{cases}\psi_\nu=\dfrac{\Theta_\nu+(2\nu+3)(\nu+1)\mathfrak{R}_{-\nu}\Theta'_{-\nu-1}r^{2\nu+1}}{1-(2\nu+3)(2\nu-1)(\nu+1)\nu\mathfrak{R}_{-\nu}\mathfrak{R}_{\nu+1}}\\ \psi_{-\nu-1}=\dfrac{(2\nu-1)\nu\mathfrak{R}_{\nu+1}\Theta_\nu r^{-2\nu-1}+\Theta'_{-\nu-1}}{1-(2\nu+3)(2\nu-1)(\nu+1)\nu\mathfrak{R}_{-\nu}\mathfrak{R}_{\nu+1}}\end{cases}$$

folgt, wo der Kürze wegen

$$(26)\quad\begin{cases}\Theta_\nu=\dfrac{d(\mathfrak{A}_{\nu+1}r^{\nu+1})}{dx}+\dfrac{d(\mathfrak{B}_{\nu+1}r^{\nu+1})}{dy}+\dfrac{d(\mathfrak{C}_{\nu+1}r^{\nu+1})}{dz}\\ \Theta'_{-\nu-1}=\dfrac{d(\mathfrak{A}'_{-\nu}r^{-\nu})}{dx}+\dfrac{d(\mathfrak{B}'_{-\nu}r^{-\nu})}{dy}+\dfrac{d(\mathfrak{C}'_{-\nu}r^{-\nu})}{dz}\end{cases}$$

gesetzt ist. Da jetzt die Functionen ψ_ν und $\psi_{-\nu-1}$ für jeden Werth von ν gegeben sind, so enthalten (14) und (23) die vollständige Lösung des Problems.

(g) Die Zusammensetzung dieser Lösung verdient eine sorgfältige Betrachtung. Scheidet man der Einfachheit wegen aus den Oberflächendaten den Theil aus, welcher aus den Gliedern A_ν, u. s. w., A'_ν, u. s. w. der Ordnung ν herrührt, so sieht man, dass, wenn keine solche Glieder von anderen Ordnungen vorhanden wären, alle Functionen ψ, ausser $\psi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu+1}$, $\psi_{-\nu}$, $\psi_{-\nu-2}$ verschwinden würden. Diese würden $u_{\nu-2}$, u_ν, $u_{\nu+2}$, $u_{-\nu+1}$, $u_{-\nu-1}$, und $u_{-\nu-3}$ und symmetrische Ausdrücke für die Functionen v und w liefern; die Zusammensetzung derselben lässt sich am besten studiren, wenn man erst ihre expliciten Werthe in $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{C}_\nu$, $\mathfrak{A}'_\nu$, $\mathfrak{B}'_\nu$, $\mathfrak{C}'_\nu$ und den daraus abgeleiteten räumlichen harmonischen Kugelfunctionen $\Theta_{\nu-1}$ und $\Theta'_{-\nu-2}$ vollständig niederschreibt.

737. Die auf die Oberfläche vertheilten Zugkräfte sind gegeben. — Wenn statt der Oberflächenverschiebungen die auf die Oberfläche vertheilte Kraft gegeben ist, so ist das Problem sowohl für die Vollkugel, als für eine Kugelschale nicht so einfach, weil man vorher (*h*) die Componenten der auf eine mit der gegebenen Kugel oder Kugelschale concentrische Kugelfläche wirkenden Zugkraft in passenden harmonischen Formen auszudrücken hat; auch

ist die Lösung nicht mehr so einfach, weil wir in dieser vorbereitenden Operation ausser der oben angewandten Function $\psi_{\nu-1}$ eine neue räumliche harmonische Kugelfunction $\varphi_{\nu+1}$ [(32), unten] einführen müssen.

(h) Wenn wir mit F, G, H die Componenten der Zugkraft bezeichnen, welche auf eine Kugelfläche von einem beliebigen Radius r wirkt, die den Anfangspunkt der Coordinaten zum Mittelpunkt hat [oben in § 734 (3) verstanden wir darunter nur die Componenten der Zugkraft für die Umgrenzungsfläche des Körpers], so gelten noch dieselben Formeln wie in § 734; jetzt haben wir in denselben aber $f = \frac{x}{r}$, $g = \frac{y}{r}$, $h = \frac{z}{r}$ zu setzen. Wenn wir ihre Glieder passend gruppiren, so können wir sie, unter Anwendung der Bezeichnung (28), auf die folgenden abgekürzten Formen bringen: —

$$(27)\quad \begin{cases} Fr = (m-n)\delta . x + n\left\{\left(r\frac{\partial}{dr}-1\right)\alpha + \frac{d\zeta}{dx}\right\} \\ Gr = (m-n)\delta . y + n\left\{\left(r\frac{\partial}{dr}-1\right)\beta + \frac{d\zeta}{dy}\right\}, \\ Hr = (m-n)\delta . z + n\left\{\left(r\frac{\partial}{dr}-1\right)\gamma + \frac{d\zeta}{dz}\right\}, \end{cases}$$

wo

$$(28)\quad \begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z \\ r\frac{\partial}{dr} = x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} + z\frac{d}{dz} \end{cases}$$

ist, so dass $\frac{\zeta}{r}$ die radiale Componente der Verschiebung in irgend einem Punkte ist, und die Vorsetzung von $\frac{\partial}{dr}$ vor eine Function von x, y, z die für die Längeneinheit in der radialen Richtung genommene Grösse der Variation dieser Function bezeichnet.

(k) Um diese Ausdrücke auf harmonische Flächenfunctionen zu reduciren, wollen wir die homogenen Glieder νten Grades der vollständigen Lösung (14) betrachten. Wir bezeichnen dieselben mit α_ν, β_ν, γ_ν *) und es seien $\delta_{\nu-1}$, $\zeta_{\nu+1}$ die entsprechenden Glieder der anderen Functionen. Dann haben wir

$$(29)\quad \begin{cases} Fr = \Sigma\left\{(m-n)\delta_{\nu-1}\, x + n(\nu-1)\alpha_\nu + n\frac{d\zeta_{\nu+1}}{dx}\right\} \\ Gr = \Sigma\left\{(m-n)\delta_{\nu-1}\, y + n(\nu-1)\beta_\nu + n\frac{d\zeta_{\nu+1}}{dy}\right\} \\ Hr = \Sigma\left\{(m-n)\delta_{\nu-1}\, z + n(\nu-1)\gamma_\nu + n\frac{d\zeta_{\nu+1}}{dz}\right\}. \end{cases}$$

*) Die hier eingeführten Indices beziehen sich nur auf den positiven oder negativen algebraischen Grad der Functionen, deren Symbolen sie angehängt sind, mögen diese Functionen harmonisch sein oder nicht.

(l) Wenn die allgemeine Lösung (14) benutzt wird, so wird in jeder dieser Gleichungen das zweite der drei Glieder νter Ordnung auf der Umgrenzung explicit die Summe zweier harmonischen Flächenfunctionen, die beziehungsweise von den Ordnungen ν und $\nu - 2$ sind. Um die übrigen Theile der Ausdrücke auf ähnliche Formen zu bringen, ist es zweckmässig, zunächst $\zeta_{\nu+1}$ durch die allgemeine Lösung (14) auszudrücken, indem man die Glieder vom algebraischen Grade ν auswählt. Wir erhalten auf diese Weise

$$(30) \qquad \alpha_\nu = u_\nu - \frac{m r^2}{2[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} \frac{d\psi_{\nu-1}}{dx}$$

und symmetrische Ausdrücke für β_ν und γ_ν, aus denen

$$\alpha_\nu x + \beta_\nu y + \gamma_\nu z = \zeta_{\nu+1} = u_\nu x + v_\nu y + w_\nu z - \frac{(\nu-1) m r^2 \psi_{\nu-1}}{2[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]}$$

folgt. Mithin ist nach den Formeln, welche zur Reduction auf harmonische Functionen geeignet sind [siehe unten (36)],

$$(31) \qquad \zeta_{\nu+1} = -\frac{1}{2\nu+1} \left\{ \frac{(2\nu-1)[(\nu-1)m - 2n]}{2[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} r^2 \psi_{\nu-1} + \varphi_{\nu+1} \right\},$$

wo

$$(32) \qquad \varphi_{\nu+1} = r^{2\nu+3} \left\{ \frac{d(u_\nu r^{-2\nu-1})}{dx} + \frac{d(v_\nu r^{-2\nu-1})}{dy} + \frac{d(w_\nu r^{-2\nu-1})}{dz} \right\}$$

und [wie oben in (13) angenommen wurde]

$$(33) \qquad \psi_{\nu-1} = \frac{du_\nu}{dx} + \frac{dv_\nu}{dy} + \frac{dw_\nu}{dz}$$

ist. Ferner ergibt sich aus § 736 (10) oder direct aus (30) durch Differentiation

$$(34) \qquad \delta_{\nu-1} = \frac{n(2\nu-1)}{(2\nu-1)n + (\nu-1)m} \cdot \psi_{\nu-1}.$$

Werden diese Ausdrücke für $\delta_{\nu-1}$, α_ν und $\zeta_{\nu+1}$ in (29) substituirt, so folgt

$$(35) \quad \begin{cases} Fr = \Sigma \Big\{ n(\nu-1) u_\nu + \dfrac{n(2\nu-1)[(\nu+2)m - (2\nu-1)n]}{(2\nu+1)[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} x \psi_{\nu-1} \\ \qquad - \dfrac{n[2\nu(\nu-1)m - (2\nu-1)n]}{(2\nu+1)[(2\nu-1)n + (\nu-1)m]} r^2 \dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dx} - \dfrac{n}{2\nu+1} \dfrac{d\varphi_{\nu+1}}{dx} \Big\}. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck wird auf die verlangte harmonische Form gebracht durch die offenbar richtige Formel

$$(36) \qquad x\psi_{\nu-1} = \frac{1}{(2\nu-1)} \left\{ r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dx} - r^{2\nu+1} \frac{d(\psi_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{dx} \right\}.$$

Auf diese Weise und durch ähnliche Behandlung der Ausdrücke für Gr und Hr erhalten wir schliesslich

$$r = n\Sigma\left\{(\nu-1)u_\nu - 2(\nu-2)M_\nu r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dx} - E_\nu r^{2\nu+1}\frac{d(\psi_{\nu-1}r^{-2\nu+1})}{dx} - \frac{1}{2\nu+1}\frac{d\varphi_{\nu+1}}{dx}\right\}$$

$$r = n\Sigma\left\{(\nu-1)v_\nu - 2(\nu-2)M_\nu r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dy} - E_\nu r^{2\nu+1}\frac{d(\psi_{\nu-1}r^{-2\nu+1})}{dy} - \frac{1}{2\nu+1}\frac{d\varphi_{\nu+1}}{dy}\right\}$$

$$r = n\Sigma(\nu-1)w_\nu - 2(\nu-2)M_\nu r^2 \frac{d\psi_{\nu-1}}{dz} - E_\nu r^{2\nu+1}\frac{d(\psi_{\nu-1}r^{-2\nu+1})}{dz} - \frac{1}{2\nu+1}\frac{d\varphi_{\nu+1}}{dz}\Big\},$$

wo

$$(38)\quad \begin{cases} M_\nu = \tfrac{1}{2}\dfrac{m}{(2\nu-1)n+(\nu-1)m} \text{ [wie oben (12)]} \\ \text{und weiter} \\ E_\nu = \dfrac{(\nu+2)m-(2\nu-1)n}{(2\nu+1)[(2\nu-1)n+(\nu-1)m]} \end{cases}$$

ist.

(m) Um die Oberflächenbedingungen für die Schale, welche durch die beiden concentrischen Kugelflächen $r = a$, $r = a'$ begrenzt wird, in harmonischen Gleichungen auszudrücken, nehmen wir an, die Werthe von F, G, H auf diesen Oberflächen seien folgendermaassen gegeben: —

$$(39)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} F &= \Sigma A_\nu \\ G &= \Sigma B_\nu \\ H &= \Sigma C_\nu \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } r = a \text{ ist} \\ \text{und} \\ \left.\begin{aligned} F &= \Sigma A'_\nu \\ G &= \Sigma B'_\nu \\ H &= \Sigma C'_\nu \end{aligned}\right\}, \text{ wenn } r = a' \text{ ist,} \end{cases}$$

wo A_ν, B_ν, C_ν, A'_ν, B'_ν, C'_ν harmonische Flächenfunctionen νter Ordnung bezeichnen.

Um auf diese Entwicklung nach harmonischen Functionen die Bedingungen § 734 (2), denen die auf die Oberflächen wirkenden Zugkräfte unterworfen sind, anzuwenden, nehmen wir an, $a^2 d\varpi$ und $a'^2 d\varpi$ seien Elemente der äusseren und der inneren Kugelfläche, über denen im Centrum (§ 468) ein gemeinschaftlicher unendlich kleiner körperlicher Winkel $d\varpi$ steht, und $\iint d\varpi$ bezeichne eine sich über die ganze Kugelfläche vom Radius Eins erstreckende Integration. Die Gleichungen (2) gehen dann über in

$$(40)\quad \begin{cases} \iint d\varpi\, \Sigma(a^2 A_\nu - a'^2 A'_\nu) = 0, \text{ u. s. w.} \\ \iint d\varpi\, [y\,\Sigma(a^2 C_\nu - a'^2 C'_\nu) - z\,\Sigma(a^2 B_\nu - a'^2 B'_\nu)] = 0, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Nun zeigt Zusatz B (16), dass von den ersten drei dieser Gleichungen alle Glieder mit Ausnahme der ersten (die, in welchen $\nu = 0$ ist), und von den zweiten drei Gleichungen alle Glieder mit Ausnahme der zweiten (diejenigen, für welche $\nu = 1$ ist) verschwinden, da x, y, z harmonische Functionen erster Ordnung sind. Die ersten drei Gleichungen (40) verwandeln sich danach in

$$\int\int d\varpi\,(a^2 A_0 - a'^2 A_0') = 0, \text{ u. s. w.},$$

und dies erfordert einfach, da A_0, A'_0, u. s. w. Constanten sind, dass

(41) $$a^2 A_0 = a'^2 A'_0,\ a^2 B_0 = a'^2 B'_0,\ a^2 C_0 = a'^2 C'_0 \text{ sei.}$$

Die drei zweiten Gleichungen (40) sind äquivalent den Gleichungen

(42) $$\begin{cases} r\,(a^2 A_1 - a'^2 A'_1) = \dfrac{d H_2}{d x} \\ r\,(a^2 B_1 - a'^2 B'_1) = \dfrac{d H_2}{d y} \\ r\,(a^2 C_1 - a'^2 C'_1) = \dfrac{d H_2}{d z}, \end{cases}$$

wo H_2 eine homogene Function zweiten Grades von x, y, z ist. Denn [Zusatz B (a)] $r A_1$, $r A'_1$, u. s. w. sind lineare Functionen von x, y, z. Wenn daher (A, x), $(A, y) \ldots (B, x) \ldots$ neun Constanten bezeichnen, so ist

$$r\,(a^2 A_1 - a'^2 A'_1) = (A, x)\,x + (A, y)\,y + (A, z)\,z$$
$$r\,(a^2 B_1 - a'^2 B'_1) = (B, x)\,x + (B, y)\,y + (B, z)\,z$$
$$r\,(a^2 C_1 - a'^2 C'_1) = (C, x)\,x + (C, y)\,y + (C, z)\,z.$$

Werden diese Ausdrücke in die drei zweiten Gleichungen (40) eingesetzt, deren sämmtliche Glieder, wie oben bemerkt wurde, mit Ausnahme derer, für welche $\nu = 1$ ist, verschwinden, so erhält man, wenn man beachtet, dass $y z$, $z x$, $x y$ harmonische Functionen sind, dass folglich [Zusatz B (16)]

$$\int\int y z\, d\varpi = 0,\ \int\int z x\, d\varpi = 0,\ \int\int x y\, d\varpi = 0 \text{ ist,}$$
$$(C, y) \int\int y^2 d\varpi - (B, z) \int\int z^2 d\varpi = 0, \text{ u. s. w.}$$

Da ferner $$\int\int x^2 d\varpi = \int\int y^2 d\varpi = \int\int z^2 d\varpi$$
ist, so folgt hieraus

$$(C, y) = (B, z),\ (A, z) = (C, x),\ (B, x) = (A, y),$$

und damit ist (42) bewiesen.

(u) Die Glieder vom algebraischen Grade ν in den vorhergehenden Ausdrücken (37) für $F r$, $G r$, $H r$ werden auf jeder der beiden concentrischen Kugelflächen die Summen von harmonischen Flächenfunctionen der Ordnungen ν und $\nu - 2$, wenn ν positiv ist, und der Ordnungen $-\nu - 1$ und $-\nu - 3$, wenn ν negativ ist. Wenn wir daher alle Glieder, welche zu harmonischen Flächenfunctionen ν ter Ordnung führen, auswählen und den entsprechenden Gliedern von (39) gleich setzen, so erhalten wir

(43) $$\begin{cases} \dfrac{n}{r}\Big\{(\nu-1)u_\nu - (\nu+2)u_{-\nu-1} - 2\,\nu M_{\nu+2}\, r^2 \dfrac{d\psi_{\nu+1}}{d x} + 2(\nu+1) M_{-\nu+1}\, r^2 \dfrac{d\psi_{-\nu}}{d x} \\ -E_\nu r^{2\nu+1} \dfrac{d(\psi_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{d x} - E_{-\nu-1} r^{-2\nu-1} \dfrac{d(\psi_{-\nu-2} r^{2\nu+3})}{d x} - \dfrac{1}{2\nu+1}\Big(\dfrac{d\varphi_{\nu+1}}{d x} - \ldots \\ = \begin{cases} A_\nu, \text{ wenn } r = a \text{ ist} \\ A'_\nu, \text{ wenn } r = a' \text{ ist,} \end{cases} \end{cases}$$

und symmetrische Gleichungen in Beziehung auf y und z.

(o) Mit diesen Gleichungen hat man genau ebenso zu verfahren, wie · oben mit (18) verfuhren. Nachdem u_ν und $u_{-\nu-1}$ bestimmt sind, re man an u_ν, v_ν, w_ν die Operationen von (33) und an $u_{-\nu-1}$, $v_{-\nu-1}$, $_{-\nu-1}$ diejenigen von (32) aus; dadurch gelangt man zu zwei Gleichun-, welche von den unbekannten Grössen nur $\psi_{\nu-1}$, $\psi_{-\nu}$ und $\varphi_{-\nu}$ ent-ten. Nimmt man weiter die entsprechenden Ausdrücke für $u_{\nu-2}$, $_{\nu+1}$ und wendet (32) auf $u_{\nu-2}, v_{\nu-2}, w_{\nu-2}$ und (33) auf $u_{-\nu+1}, v_{-\nu+1}$, $_{-\nu+1}$ an, so ergeben sich zwei Gleichungen zwischen $\varphi_{\nu-1}$, $\psi_{\nu-1}$ und $_{\nu}$. Wir haben dann im Ganzen vier einfache algebraische Gleichun-zwischen $\psi_{\nu-1}$, $\psi_{-\nu}$, $\varphi_{\nu-1}$, $\varphi_{-\nu}$, welche diese vier unbekannten nctionen bestimmen, und da die Functionen u, v, w bereits explicit rch diese vier Grössen ausgedrückt sind, so ist jede in der Lösung (14) Problems auftretende unbekannte Function durch die Daten dessel-a ausgedrückt.

(p) Zum Falle der Vollkugel gelangt man natürlich von dem gemeineren Problem einer Kugelschale, wenn man $a' = 0$ setzt. Wenn r aber diesen besonderen Fall direct behandeln, so brauchen wir keine ımlichen harmonischen Functionen negativen Grades einzuführen (jede rmonische Function negativen Grades wird im Centrum unendlich oss und ist daher unzulässig in dem Ausdruck der Wirkungen, welche auf die Oberfläche einer Vollkugel vertheilten Kräfte im Innern der-ben ausüben), und (43), sowie alle Formeln, die sich daraus, wie wir sehen haben, herleiten lassen, werden bedeutend abgekürzt, wenn wir s auf diesen Fall beschränken. So erhalten wir statt (43) jetzt einfach

$$
\text{l)}\quad \begin{cases} \dfrac{n}{r}\left\{(\nu-1)\,u_\nu - 2\nu\, M_{\nu+2}\, r^2\, \dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx}\right. \\ \left. - E_\nu\, r^{2\nu+1}\, \dfrac{d\,(\psi_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{dx} - \dfrac{1}{2\nu+1}\, \dfrac{d\,\varphi_{\nu+1}}{dx}\right\} \\ = A_\nu, \text{ wenn } r = a \text{ ist.} \end{cases}
$$

enn wir also [wie früher in (f)] die Eigenschaft einer homogenen ınction H_j von beliebiger Ordnung j berücksichtigen, dass $r^{-j} H_j$ von r ıabhängig ist und nur von den Verhältnissen $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ abhängt, so halten wir für alle Werthe von x, y, z

$$
\text{5)}\quad \begin{cases} (\nu-1)\,u_\nu - 2\,\nu\, M_{\nu+2}\, a^2\, \dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{dx} - E_\nu\, r^{2\nu+1}\, \dfrac{d\,(\psi_{\nu-1}\, r^{-2\nu+1})}{dx} \\ \qquad - \dfrac{1}{2\nu+1}\, \dfrac{d\,\varphi_{\nu+1}}{dx} = \dfrac{A_\nu\, r^\nu}{n\, a^{\nu-1}}. \end{cases}
$$

ieraus und aus den symmetrischen Gleichungen für v und w ergibt ch nach (33)

$$
\text{6)}\quad [\nu-1+(2\nu+1)\,\nu E_\nu]\,\psi_{\nu-1} = \frac{1}{n\,a^{\nu-1}}\left\{\frac{d(A_\nu r^\nu)}{dx} + \frac{d(B_\nu r^\nu)}{dy} + \frac{d(C_\nu r^\nu)}{dz}\right\},
$$

nd nach (32)

$$(47)\quad \begin{cases} 2\nu\,\varphi_{\nu+1} + 2\nu\,(\nu+1)\,(2\nu+1)\,M_{\nu+2}\,a^2\,\psi_{\nu+1} \\ = \dfrac{r^{2\nu+3}}{n\,a^{\nu-1}}\left\{\dfrac{d\,(A_\nu\,r^{-\nu-1})}{d\,x} + \dfrac{d\,(B_\nu\,r^{-\nu-1})}{d\,y} + \dfrac{d\,(C_\nu\,r^{-\nu-1})}{d\,z}\right\}. \end{cases}$$

Wird vermittels dieser Formel $\varphi_{\nu+1}$ aus (45) eliminirt und der Kürze wegen das unten in (50) angegebene Symbol $\Phi_{\nu+1}$ benutzt, so folgt

$$(48)\quad \begin{cases} (\nu-1)\,u_\nu = (\nu-1)\,M_{\nu+2}\,a^2\,\dfrac{d\,\psi_{\nu+1}}{d\,x} \\ + E_\nu\,r^{2\nu+1}\,\dfrac{d\,(\psi_{\nu-1}\,r^{-2\nu+1})}{d\,x} + \dfrac{1}{n\,a^{\nu-1}}\left[A_\nu\,r^\nu + \dfrac{1}{2\nu\,(2\nu+1)}\,\dfrac{d\Phi_{\nu+1}}{d\,x}\right], \end{cases}$$

und (43) liefert

$$(49)\quad \begin{cases} \psi_{\nu-1} = \dfrac{\Psi'_{\nu-1}}{[(\nu-1)+(2\nu+1)\,\nu\,E_\nu]\,n\,a^{\nu-1}} \\ \qquad = \dfrac{[(\nu-1)\,m+(2\nu-1)\,n]\,\Psi'_{\nu-1}}{[(2\nu^2+1)\,m-(2\nu-1)\,n]\,n\,a^{\nu-1}}, \end{cases}$$

wo

$$(50)\quad \begin{cases} \Psi'_{\nu-1} = \dfrac{d\,(A_\nu\,r^\nu)}{d\,x} + \dfrac{d\,(B_\nu\,r^\nu)}{d\,y} + \dfrac{d\,(C_\nu\,r^\nu)}{d\,z} \\ \Phi_{\nu+1} = r^{2\nu+3}\left\{\dfrac{d\,(A_\nu\,r^{-\nu-1})}{d\,x} + \dfrac{d\,(B_\nu\,r^{-\nu-1})}{d\,y} + \dfrac{d\,(C_\nu\,r^{-\nu-1})}{d\,z}\right\} \end{cases}$$

ist. In Verbindung mit diesen Ausdrücken für ψ_ν und u_ν ist (14) die vollständige Lösung des Problems.

(q) Die Zusammensetzung und Natur dieser Lösung tritt deutlich zu Tage, wenn man diejenigen ihrer Glieder vollständig hinschreibt, welche nur von den unter den Oberflächendaten befindlichen harmonischen Functionen der Ordnung ν abhängen. Wenn die Componenten der auf die Oberfläche wirkenden Zugkräfte einfach A_ν, B_ν, C_ν sind, so verschwinden sämmtliche Functionen Ψ', mit Ausnahme von $\Psi'_{\nu-1}$, und sämmtliche Functionen Φ, mit Ausnahme von $\Phi_{\nu+1}$. Folglich zeigt (48), dass alle Functionen u ausser $u_{\nu-2}$ und u_ν verschwinden, und für diese letzteren ergibt sich aus (48)

$$(51)\quad \begin{cases} u_{\nu-2} = M_\nu\,a^2\,\dfrac{d\,\psi_{\nu-1}}{d\,x} \\ u_\nu = \dfrac{1}{\nu-1}\left\{E_\nu\,r^{2\nu+1}\,\dfrac{d(\psi_{\nu-1}\,r^{-\nu+1})}{d\,x} + \dfrac{1}{n\,a^{\nu-1}}\left[A_\nu r^\nu + \dfrac{1}{2\nu\,(2\nu+1)}\,\dfrac{d\,\Phi_{\nu+1}}{d\,x}\right]\right. \end{cases}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in (14) einsetzen und für E_ν und M_ν die in (38) angegebenen Werthe substituiren, so wird die Lösung des Problems explicit vermittels der Data und der räumlichen harmonischen Kugelfunctionen $\Psi'_{\nu-1}$, $\Phi_{\nu+1}$ ausgedrückt, welche letzteren sich nach den Formeln (50) aus den Daten herleiten lassen. Die Lösung in ihrer schliesslichen Form ist

$$= \frac{1}{n a^{\nu-1}} \left\{ \tfrac{1}{2} \frac{m(a^2 - r^2)}{(2\nu^2+1)m - (2\nu-1)n} \frac{d\Psi'_{\nu-1}}{dx} \right.$$

$$\left. \frac{1}{\nu-1} \left[\frac{(\nu+2)m - (2\nu-1)n}{(2\nu^2+1)m - (2\nu-1)n} \frac{r^{2\nu+1} d(\Psi'_{\nu-1} r^{-2\nu+1})}{(2\nu+1)\,dx} + \frac{1}{2\nu(2\nu+1)} \frac{d\Phi_{\nu+1}}{dx} + A_\nu r^\nu \right] \right\},$$

und dazu kommen symmetrische Ausdrücke für β und γ.

(r) **Fall einer homogenen Deformation.** — Der Fall $\nu = 1$ ist insofern von Interesse, als für ihn auf den ersten Blick der zweite Theil des Ausdrucks (52) für α, des Divisors $\nu - 1$ wegen, unendlich gross zu werden scheint. Aber die innerhalb der Parenthese [] stehenden Glieder verschwinden für $\nu = 1$ gleichfalls, wegen der oben bewiesenen Relationen (42), die für eine Vollkugel in

$$(53) \qquad r A_1 = \frac{dH_2}{dx}, \; r B_1 = \frac{dH_2}{dy}, \; r C_1 = \frac{dH_2}{dz}$$

übergehen, wo H_2 eine beliebige homogene Function zweiten Grades von x, y, z bezeichnet. Die Bewahrheitung dieser Behauptung bietet keine Schwierigkeit dar; wir überlassen sie dem Leser als Uebungsaufgabe. Dass ein Theil jedes der Ausdrücke für α, β, γ die Form $0/0$ hat, rührt offenbar daher, weil diese Grössen unbestimmt sind, und dass eine solche Unbestimmtheit stattfinden muss, erkennen wir, wenn wir beachten, dass eine von keiner Deformation begleitete unendlich kleine Rotation um einen beliebigen Durchmesser ohne Verletzung der Bedingungen des Problems jeder Lösung hinzugefügt werden kann. Mit anderen Worten (§§ 89, 95): Man kann den Ausdrücken für α, β, γ in jeder Lösung beziehungsweise die Grössen

$$\omega_2 z - \omega_3 y, \quad \omega_3 x - \omega_1 z, \quad \omega_1 y - \omega_2 x$$

hinzufügen, ohne dass das Resultat aufhört, eine Lösung zu sein.

Obwohl aber α, β, γ unbestimmt sind, so liefert (50) doch bestimmte Werthe für ψ_0 und φ_2. Es ist eine gute und einfache Uebung für den Leser, zu zeigen, dass die Bestimmung von ψ_0 und φ_2 den [in diesem Falle natürlich homogenen (§ 155)] Deformationszustand bestimmt, welchen die auf die Oberfläche vertheilten gegebenen Zugkräfte wirklich erzeugen.

738. **Ebene Deformation.** — Man sagt, ein fester Körper erleide eine ebene Deformation (§ 730) oder werde in zwei Dimensionen deformirt, wenn seine Deformation der Bedingung genügt, dass alle Verschiebungen längs einer Schaar paralleler Ebenen erfolgen und für alle Punkte jeder zu diesen Ebenen senkrechten Linie gleich und parallel sind. Eine beliebige dieser Ebenen wollen wir die Ebene der Deformation nennen. Danach bleiben bei einer ebenen Deformation alle zur Deformationsebene senkrechten Cylinderflächen cylindrisch und senkrecht zu derselben Ebene, und erleiden längs der erzeugenden Linien nirgends eine Ausdehnung.

Wenn wir $X\,O\,Y$ zur Deformationsebene nehmen, so ist der analytische Ausdruck der Bedingung der ebenen Deformation der, dass γ verschwindet, und dass α und β nur von x und y, (nicht auch von z) abhängig seien. Wir ersehen daraus Folgendes: —

In den analytischen Ausdruck der ebenen Deformation gehen nur zwei unabhängig Veränderliche ein, und daher bietet dieser Fall eine Classe von besonders einfachen Problemen dar. Wenn z. B. der „gegebene feste Körper" des § 696 ein unendlich langer voller oder hohler Cylinder von kreisförmiger Basis ist und die im Innern desselben wirkende Kraft (wenn eine solche vorhanden ist), sowie die auf die Oberfläche ausgeübte Wirkung aus Kräften und Zugkräften bestehen, die überall zur Axe senkrecht und in allen Punkten jeder zur Axe parallelen Linie gleich und parallel sind, so haben wir, mag nun die Verschiebung oder die Zugkraft auf der Oberfläche gegeben sein, Probleme, welche denen der §§ 735, 736 ganz analog, aber viel einfacher als diese letzteren sind und für den Maschinenbau, sofern es sich um die Verwendung langer gerader Röhren handelt, die einer Deformation ausgesetzt sind, grosse Bedeutung haben.

739. Probleme für Cylinder, die einer ebenen Deformation unterworfen sind, gelöst in ebenen harmonischen Functionen. — Es ist interessant zu bemerken, dass wir in diesen Problemen über die Deformation von Cylindern statt der harmonischen Flächenfunctionen der Ordnungen 1, 2, 3, u. s. w., welche [Zusatz B (b)] Functionen von Kugelflächencoordinaten (wie z. B. der Breite und der Länge auf einem Globus) sind, einfache harmonische Functionen (§§ 54, 75) des Winkels zwischen zwei durch die Axe gehenden Ebenen und der successiven Vielfachen dieses Winkels haben; diese letzteren Functionen sind von denselben Graden, wie jene harmonischen Flächenfunctionen. Ferner haben wir statt der räumlichen harmonischen Functionen [Zusatz B (a) und (b)] Functionen, die wir ebene harmonische Functionen nennen können. Es sind dies die algebraischen Functionen der beiden Veränderlichen x, y, die man erhält, wenn man $\cos\nu\vartheta$ und $\sin\nu\vartheta$ nach Potenzen der Sinus und der Cosinus von ϑ entwickelt, darauf

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \text{ und } \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

annimmt und das Resultat mit $(x^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}}$ multiplicirt.

Eine ebene harmonische Function ist natürlich der besondere Fall einer räumlichen harmonischen Function [Zusatz B (a) und (b)], in welcher z nicht erscheint, d. h. eine beliebige homogene Function V von x und y, welche der Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0, \text{ oder, wie wir kurz schreiben können, } \nabla^2 V=0$$

genügt. Da wir nun in § 707 (23) gesehen haben, dass der allgemeinste Ausdruck für eine ebene harmonische Function vom Grade ι (der positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein kann)

$$(1)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2} A\,\{(x+y\sqrt{-1})^\iota+(x-y\sqrt{-1})^\iota\} \\ -\tfrac{1}{2} B\sqrt{-1}\,\{(x+y\sqrt{-1})^\iota-(x-y\sqrt{-1})^\iota\}, \\ \text{oder in Polarcoordinaten} \\ A\cos\iota\vartheta+B\sin\iota\vartheta \end{cases}$$

ist, so gehen die Gleichungen des innern Gleichgewichts [§ 698 (6)], falls keine inneren Kräfte wirken (d. h. $X=0$ und $Y=0$ ist), für den Fall der ebenen Deformation in

$$(2)\quad \begin{cases} n\left(\dfrac{d^2\alpha}{dx^2}+\dfrac{d^2\alpha}{dy^2}\right)+m\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\alpha}{dx}+\dfrac{d\beta}{dy}\right)=0 \\ n\left(\dfrac{d^2\beta}{dx^2}+\dfrac{d^2\beta}{dy^2}\right)+m\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\alpha}{dx}+\dfrac{d\beta}{dy}\right)=0 \end{cases}$$

über. Die Lösung dieser Gleichungen in ebenen harmonischen Functionen erhält man, wenn man das Verfahren des § 735 (a)...(e) auf nur zwei, statt drei Veränderliche anwendet. Es ergibt sich

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha=\Sigma\left\{u_\nu-\dfrac{m}{2(\nu-1)(2n+m)}\,r^2\,\dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dx}\right\} \\ \beta=\Sigma\left\{v_\nu-\dfrac{m}{2(\nu-1)(2n+m)}\,r^2\,\dfrac{d\psi_{\nu-1}}{dy}\right\}, \\ \text{wo } \psi_{\nu-1}=\dfrac{du_\nu}{dx}+\dfrac{dv_\nu}{dy} \text{ ist,} \end{cases}$$

und u_ν, v_ν zwei beliebige ebene harmonische Functionen vom Grade ν bezeichnen, so dass $\psi_{\nu-1}$ eine ebene harmonische Function vom Grade $\nu-1$ ist. Natürlich kann ν positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein.

Es ist für viele Anwendungen vortheilhaft, diese Lösung auf Polar-Coordinaten zu reduciren. Das geschieht, indem man

$$(4)\quad \begin{cases} x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta \\ \text{setzt und} \\ u_\nu=r^\nu(A_\nu\cos\nu\vartheta+A'_\nu\sin\nu\vartheta) \\ v_\nu=r^\nu(B_\nu\cos\nu\vartheta+B'_\nu\sin\nu\vartheta) \end{cases}$$

annimmt, was

$$(5)\quad \psi_{\nu-1}=\nu\, r^{\nu-1}\,\{(A_\nu+B'_\nu)\cos(\nu-1)\vartheta+(A'_\nu-B_\nu)\sin(\nu-1)\vartheta\}$$

und

$$(6)\quad\begin{cases}\alpha = \Sigma r^\nu \left\{ A_\nu \cos\nu\vartheta + A'_\nu \sin\nu\vartheta - \frac{\nu m}{2(2n+m)}[(A_\nu + B'_\nu)\cos(\nu-2)\vartheta - (A'_\nu - B_\nu)\sin(\nu- \right. \\ \beta = \Sigma r^\nu \left\{ B_\nu \cos\nu\vartheta + B'_\nu \sin\nu\vartheta - \frac{\nu m}{2(2n+m)}[-(A_\nu + B'_\nu)\sin(\nu-2)\vartheta + (A'_\nu - B_\nu)\cos(\right.\end{cases}$$

liefert.

Es wird eine gute Uebung für den Leser sein, in den einen Cylinder betreffenden Problemen, welche den auf die Kugel bezüglichen Problemen des § 735 (f) und des § 737 (h)...(r) analog sind, die expliciten Ausdrücke für die Verschiebung eines beliebigen Punktes des Körpers vollständig herzuleiten. Das Verfahren des § 737 (l) kann in der symmetrischen algebraischen Form durchgeführt werden, als eine Erläuterung der von uns bei der Behandlung der harmonischen Kugelfunctionen befolgten Methode. Dagegen wird das dem § 737 (37) entsprechende Resultat leichter und in einer einfacheren Form erhalten, wenn man § 737 (29) unmittelbar in Polarcoordinaten umsetzt, wie es in § 739 (4), (5), (6) geschehen ist. Wir beabsichtigen, diese Lösungen in dem Capitel über „die Eigenschaften der Materie" anzuwenden und zu erläutern.

740. Kleine Körper sind im Verhältniss zu ihrem Gewicht stärker als grosse. — Beispiele. — In den Abschnitten unseres Werks, welche der Hydrostatik gewidmet sind, wird die Aufgabe gelöst werden, die Deformation zu bestimmen, welche eine gegebene störende Kraft in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit von sphäroidischer Gestalt erzeugt; dann werden wir auch sehen, wie das im Vorhergehenden [§ 736 (51)] für eine elastische Vollkugel gewonnene Resultat auf die Theorie der Ebbe und Fluth sowie auf die Starrheit der Erde angewendet werden kann. Diese Anwendung erinnert uns aber an eine allgemeine Bemerkung von grosser praktischer Wichtigkeit, mit der wir für jetzt die elastischen festen Körper verlassen werden. Betrachten wir nämlich verschiedene elastische feste Körper von ähnlicher Substanz und ähnlichen Formen, auf die in irgend einer Weise Kräfte von aussen einwirken, so sehen wir, dass, wenn diese Kräfte in den Körpern ähnliche Deformationen erzeugen, die wie gewöhnlich für die Flächeneinheit gerechneten Zugkräfte in, oder senkrecht zu ähnlich gelegenen Flächenelementen gleich sein müssen, mögen diese letzteren den Umgrenzungsflächen der Körper oder beliebigen anderen Flächen angehören, die man sich durch die Substanz der Körper gelegt denkt. Wenn man daher die Kraft, welche senkrecht zu oder in einer beliebigen solchen Fläche wirkt, in Componenten zerlegt, die beliebigen Richtungen parallel sind, so verhalten sich die Gesammtbeträge jeder solchen Componente für ähnliche Flächen der

verschiedenen Körper wie die Quadrate der linearen Dimensionen derselben. Wenn also diese Kräfte unter geometrisch ähnlichen Verhältnissen der Schwere oder der kinetischen Reaction (§ 264) gegen gleiche Beschleunigung (§ 28) das Gleichgewicht halten müssen, so erleidet der grössere Körper eine grössere Deformation als der kleinere, da die Beträge der Schwere oder der kinetischen Reaction ähnlicher Theile der Körper sich wie die Cuben der linearen Dimensionen derselben verhalten. Schliesslich werden sich die Deformationen in ähnlich gelegenen Punkten der Körper einfach wie die linearen Dimensionen und die Verschiebungen wie die Quadrate dieser Dimensionen verhalten, wenn nur die Deformation in keinem Theil eines der Körper so gross ist, dass das Princip der Superposition nicht mehr mit hinlänglicher Genauigkeit seine Geltung behält, und wenn kein Theil in Beziehung auf einen anderen Theil durch mehr als einen sehr kleinen Winkel gedreht wird. Dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir einen gleichmässigen dünnen runden Stab betrachten, der in seiner Mitte horizontal gehalten wird. Seine Substanz sei homogen und von der Dichtigkeit ϱ; seine Länge l sei p mal so gross als sein Querdurchmesser. Wenn der Young'sche Modulus mit M bezeichnet wird, so ist (da das Trägheitsmoment einer Kreisfläche vom Radius r in Beziehung auf einen Durchmesser $^1/_4\,\pi r^4$ ist) der Widerstand des Stabes gegen eine Biegung (§ 715) gleich $\frac{M}{4}\pi\left(\frac{l}{2p}\right)^4$. In der Bezeichnung des § 610 ist dies gleich $\frac{B}{g}$, da dort B in kinetischem oder absolutem Maass (§ 223) gemessen wird, während wir hier M nach dem Gebrauch der Ingenieure im Gravitationsmaass (§ 220) rechnen. Ferner ist

$$w = \varrho\pi\left(\frac{l}{2p}\right)^2, \text{ folglich [nach § 617]}$$

$$\frac{gw}{B} = \frac{16p^2\varrho}{Ml^2}.$$

Wird dies in § 617 (10) eingesetzt, so erhalten wir für die Krümmung in der Mitte des Stabes; für die Elongation und Contraction in den Punkten, wo dieselben am grössten sind, d. h. in den höchsten und den niedrigsten Punkten des durch den Mittelpunkt gehenden Normalschnitts; endlich für die Senkung der Enden beziehungsweise die folgenden Ausdrücke: —

$$\frac{2p^2\varrho}{M};\ \frac{pl\varrho}{M};\ \text{und}\ \frac{p^2l^2\varrho}{8M}.$$

So sind für einen Stab, dessen Länge das 200fache seines Querdurchmessers beträgt, wenn derselbe von Eisen oder Stahl ist, für welche Substanzen man $\varrho = 7 \cdot 75$ und $M = 194 \times 10^7$ Gramm per Quadratcentimeter hat, die grösste Dehnung und Contraction (die am obersten und untersten Theil des durch den Unterstützungspunkt gehenden Schnittes eintreten) jede gleich $0 \cdot 8 \times 10^{-6} \times l$, und die Senkung der Enden $2 \times 10^{-5} \times l^2$. Danach würde für einen in seiner Mitte horizontal gehaltenen 10 cm langen Stahl- oder Eisendraht, dessen Querdurchmesser $^1/_2$ mm ist, das Maximum der Elongation und der Contraction nur 0·000008, die Senkung der Enden nur 0·002 cm betragen. Ein runder Stahlstab von $^1/_2$ cm Durchmesser und 1 m Länge würde das Maximum der Elongation und der Contraction 0·00008 und die Senkung der Enden 0·2 cm erfahren. Folglich muss ein runder Stahlstab von 10 cm Durchmesser und 20 m Länge von bemerkenswerther Beschaffenheit (siehe Bd. II, Eigenschaften der Materie) sein, wenn er in der Mitte soll gehalten werden können, ohne eine recht merkliche bleibende Senkung zu erleiden, und wahrscheinlich giebt es keinen Stahl von der Beschaffenheit, dass ein 40 m langer Schaft desselben von nur 2 dm Durchmesser in der Mitte gehalten werden kann, ohne eine starke Biegung über die Grenzen der Elasticität hinaus zu erleiden oder zu zerbrechen.

741. Uebergang zur Hydrodynamik. — Beim Uebergang von der Dynamik der vollkommen elastischen festen Körper zur abstracten Hydrodynamik, oder zur Dynamik der vollkommenen Flüssigkeiten ist es zweckmässig und lehrreich, einige Ansichten in Betreff der in realen festen und flüssigen Körpern beobachteten Eigenschaften, welche nach dem für unser Werk aufgestellten (§ 449) allgemeinen Plane in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie eingehender geprüft werden sollen, kurz zu anticipiren.

Unvollkommene Elasticität fester Körper. — Eine Menge der verschiedensten Beobachtungen nöthigt uns, zu schliessen, dass keine Volumen- oder Formänderung ohne einen (wenigstens scheinbaren) Verlust an Energie (§ 275) in irgend welchem Stoffe vor sich gehen kann, so dass jedes Mal, wo eine Rückkehr zur anfänglichen Configuration stattfindet, immer eine gewisse (wenn auch kleine) Arbeit erfordert wird, um die verlorene Energie zu ersetzen und den Körper in den gleichen physischen und für die Wahrnehmung gleichen kineti-

schen Zustand zurückzubringen, in welchem er vorher gegeben war. In § 672, wo wir einige thermodynamische Principien anticipirten, haben wir gesehen, wie ein solcher Verlust unvermeidlich ist, sogar wenn man es mit der absolut vollkommenen Volumenelasticität zu thun hat, welche jede Flüssigkeit und möglicher Weise auch einige feste Körper, wie z. B. homogene Krystalle, zeigen. Aber in Körpern wie Metalle, Glas, Porzellan, natürliche Steine, Holz, Kautschuk, homogene Gallerte, Seidenfäden, Elfenbein, u. s. w. lässt sich, wie wir im zweiten Bande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie sehen werden, ein bestimmter Reibungswiderstand*) gegen jede Formänderung durch viele Experimente nachweisen, der, wie sich herausstellt, von der Geschwindigkeit abhängt, mit welcher die Formänderung erfolgt. Einen sehr bemerkenswerthen und einleuchtenden Beweis für das Vorhandensein eines Frictionswiderstandes gegen Formänderungen in den gewöhnlichen festen Körpern liefert die allmälige, mehr oder weniger schnelle Abnahme der Vibrationen der elastischen festen Körper, die in Kautschuk und sogar in homogenen Gallerten mit erstaunlicher Schnelligkeit erfolgt, während sie in Glas und Metallfedern langsamer, aber nachweislich immer noch viel zu schnell ist, als dass man sie auf Rechnung des Widerstandes der Luft setzen könnte. Diese in elastischen festen Körpern auftretende molekulare Friction wird passend die Zähigkeit der festen Körper genannt; denn da sie ein innerer Widerstand gegen eine Formänderung ist, welcher von der Geschwindigkeit dieser Aenderung abhängt, so muss sie mit der molekularen Friction der Flüssigkeiten zusammengestellt werden, und diese letztere wird allgemein die Zähigkeit der Flüssigkeiten genannt. Wir müssen hier aber bemerken, dass das Wort Zähigkeit, wie es bisher gebraucht wurde, wenn es sich um feste oder um heterogene halbfest-halbflüssige Massen handelt, nicht entschieden auf die molekulare Friction sich bezog, namentlich nicht auf die molekulare Friction eines in hohem Grade elastischen festen Körpers innerhalb der Grenzen fast vollkommener Elasticität; dasselbe wurde vielmehr angewandt, um die Eigenschaft eines Körpers zu bezeichnen, unter der Einwirkung eines fortgesetzten Zwanges langsam, aber ununterbrochen eine sehr grosse, oder gar unbegrenzte Formänderung erleiden zu können. In diesem Sinne hat z. B. Forbes das Wort gebraucht, als er jene

*) Siehe Proceedings of the Royal Society, Mai 1865, „On the Viscosity and Elasticity of Metals“ (W. Thomson).

„**Zähigkeitstheorie der Gletscherbewegung**“ aufstellte, die er durch seine grossartigen Beobachtungen über Gletscher bewies. Da aber er und viele Schriftsteller nach ihm die Ausdrücke Plasticität und plastisch gebraucht haben, sowohl in Beziehung auf homogene feste Körper (wie Wachs, Pech, obgleich diese auch brüchig sind; weiche Metalle, u. s. w.), als auch in Beziehung auf heterogene halbfest-halbflüssige Massen (wie Schlamm, feuchte Erde, Mörtel, Gletschereis, u. s. w.), um die allen diesen Körpern gemeinschaftliche Eigenschaft*) zu bezeichnen, unter einem fortgesetzten Zwange entweder eine unaufhörliche und unbegrenzte Formänderung zu erleiden, oder aber eine solche, die zwar allmälig sehr gross wird, aber bei unendlich wachsender Zeit mit abnehmender Geschwindigkeit sich einer endlichen Grenze nähert; und da der Gebrauch des Ausdrucks Plasticität ebenso wenig wie der des Wortes Zähigkeit eine physikalische Theorie oder Erklärung jener Eigenschaft involvirt, so ist das Wort Zähigkeit ohne Nachtheil in der oben gegebenen Definition zulässig.

742. **Die ideale vollkommene Flüssigkeit der abstracten Hydrodynamik besitzt eine vollkommene unbegrenzte, durch keine innere Friction gestörte Plasticität.** — Eine vollkommene Flüssigkeit oder (wie wir sie kurz nennen werden) eine Flüssigkeit ist, wie ein starrer, oder ein glatter Körper, ein unrealisirbarer Begriff. Wir definiren sie als einen Körper, welcher nicht im Stande ist, einer Formänderung zu widerstehen, welcher daher unfähig ist, eine schiebende oder tangentiale Reaction (§ 669) auszuüben. Folglich ist ihr Druck auf jede Oberfläche, mag dieselbe nun einem festen Körper oder einem angrenzenden Flüssigkeitstheil angehören, in jedem Punkte senkrecht zu der Oberfläche. Im Zustande des Gleichgewichts genügen alle gewöhnlichen flüssigen und gasförmigen Körper dieser Definition. Es ist jedoch eine Art Frictionswiderstand von endlicher Grösse vorhanden, welcher sich einer Formänderung mit einer Kraft von endlicher Grösse widersetzt, und daher übt eine Flüssigkeit, während sie ihre Form

*) Eine grosse Ideenverwirrung hätte seitens der Schriftsteller vermieden werden können, welche die Theorie von Forbes bekämpfen wollten, während sie thatsächlich (und, wie wir glauben, ohne Grund) nur seinen Gebrauch des Wortes Zähigkeit angriffen, wenn sie bedacht hätten, dass für jene verschiedenen Fälle eine einzige physikalische Erklärung nicht ausreicht, und dass die Theorie von Forbes bloss der durch Beobachtung gewonnene Beweis der Thatsache ist, dass die Gletscher dieselbe Eigenschaft wie Schlamm (heterogen), Mörtel (heterogen), Pech (homogen) und Wasser (homogen) haben, nämlich unter der Einwirkung eines fortgesetzten Zwanges ihre Form unbegrenzt und ununterbrochen zu ändern.

ändert, auf jede Oberfläche eine tangentiale Kraft aus, nur nicht auf die Normalebenen des Zwanges (§ 664), welcher erforderlich ist, damit diese Formänderung ihren Fortgang nehme. Folglich lassen sich zwar die hydrostatischen Resultate, zu denen wir alsbald gelangen werden, in der Praxis bewahrheiten; wenn wir aber in einem späteren Capitel die Hydrokinetik behandeln, so werden wir die Betrachtung der Reibung im Innern der Flüssigkeiten einführen müssen, ausser in Fällen, wo die Umstände so beschaffen sind, dass die Wirkungen dieser Reibung unmerklich werden.

743. **Druck in einer Flüssigkeit.** — Mit dem Ausdruck: Der Druck an irgend einem Punkte in irgend einer Richtung bezeichnen wir, wenn es sich um Flüssigkeiten handelt, den für die Flächeneinheit genommenen mittleren Druck auf eine diesen Punkt enthaltende und zu der in Rede stehenden Richtung senkrechte Ebene, wenn deren Grösse als unbegrenzt abnehmend angesehen wird.

744. **Der Druck in einer Flüssigkeit ist in allen Punkten und in allen Richtungen derselbe.** — An jedem Punkte einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit ist der Druck in allen Richtungen derselbe, und wenn keine Kräfte von aussen einwirken, so ist auch der Druck an allen Punkten derselbe. Zum Beweise dieser und der meisten folgenden Sätze denken wir uns nach § 564, ein bestimmter Theil der Flüssigkeit werde fest, ohne seine Masse, seine Form, oder seine Dimensionen zu ändern.

Nehmen wir an, die Flüssigkeit sei in einem geschlossenen Gefässe enthalten, und der Druck im Innern hänge nur von dem durch das Gefäss auf die Flüssigkeit ausgeübten Druck ab, nicht von einer äusseren Kraft, wie die Schwere.

745. Die Resultante der auf die Elemente eines beliebigen Theils einer Kugelfläche wirkenden Druckkräfte muss, wie jede ihrer Componenten, durch den Mittelpunkt der Kugel gehen. Wenn wir also voraussetzen (§ 564), ein Theil der Flüssigkeit, welcher die Form einer plan-convexen Linse hat, werde fest, so muss die Resultante des auf die ebene Fläche wirkenden Drucks durch das Centrum der Kugel und, da sie zur Ebene senkrecht ist, durch das Centrum der Kreisfläche gehen. Hieraus erhellt, dass der Druck in allen Punkten jeder Ebene in der Flüssigkeit derselbe ist. Folglich (§ 561) geht die Resultante der auf irgend eine ebene Fläche wirkenden Druckkräfte durch den Trägheitsmittelpunkt der Fläche.

Weiter denken wir uns, ein Theil der Flüssigkeit von der Form eines dreiseitigen Prisma, dessen Endflächen senkrecht zu

den Seitenflächen sind, werde fest. Die auf die Endflächen wirkenden resultirenden Druckkräfte wirken in der Linie, welche die Trägheitsmittelpunkte der Endflächen verbindet, und sind einander gleich (§ 551), da die Richtungen der auf die Seitenflächen wirkenden resultirenden Druckkräfte zu dieser Linie senkrecht sind. Folglich ist der Druck in allen parallelen Ebenen derselbe.

Die Trägheitsmittelpunkte der drei Seitenflächen und die in denselben angreifenden resultirenden Druckkräfte liegen aber in einem den Endflächen parallelen dreieckigen Schnitt. Die Druckkräfte wirken in den Mittelpunkten der Seiten dieses Dreiecks und senkrecht zu denselben, so dass ihre Richtungen einander in einem Punkte schneiden. Da sie nun einander das Gleichgewicht halten, so müssen sie (§ 557) beziehungsweise den Seiten des Dreiecks, d. h. den Breiten, oder auch den Grössen der Seitenflächen des Prisma proportional sein. Danach sind die auf die Seitenflächen wirkenden resultirenden Druckkräfte den Grössen dieser Flächen proportional, und folglich ist der Druck in zwei beliebigen einander schneidenden Ebenen gleich gross.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so sehen wir, dass der Druck in einer Flüssigkeit in allen Punkten und in allen Richtungen derselbe ist.

746. Anwendung auf die Statik der festen Körper. — Eine unmittelbare Anwendung dieses Resultats liefert uns einen einfachen, aber indirecten Beweis des zweiten Theorems des § 557. Wir haben nämlich nur vorauszusetzen, das Polyeder sei ein fest gewordener Theil einer Flüssigkeitsmasse, die sich unter der Einwirkung blosser Druckkräfte im Gleichgewicht befindet. Die Resultante der auf jede Seitenfläche wirkenden Druckkräfte wird dann der Grösse dieser Fläche proportional sein und nach § 561 im Trägheitsmittelpunkt derselben, welcher in diesem Falle der Mittelpunkt des Drucks ist, angreifen.

747. Anwendung des Princips der Energie. — Einen anderen Beweis für die Gleichheit des Drucks im Innern einer Flüssigkeit, auf welche ausser dem Druck der Gefässwände keine Kraft von aussen einwirkt, liefert leicht das aus der Theorie der Energie hergeleitete Criterium für die Natur des Gleichgewichts, § 292. Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir die Flüssigkeit als unzusammendrückbar ansehen. Wir nehmen an, in die Seitenflächen des geschlossenen Gefässes, welches die Flüssigkeit

enthält, seien eine Anzahl Cylinder eingefügt, und jeder derselben sei mit einem passenden Kolben versehen. Ist dann A die Grundfläche eines dieser Kolben, p der mittlere Druck, der auf ihn ausgeübt wird, und x der Weg, den er in seinem Cylinder nach innen oder nach aussen zu zurücklegt, so sagt das Energiecriterium, dass, wenn man die Gesammtwirkung ins Auge fasst, keine Arbeit geleistet werden soll, d. h. dass

$$A_1 p_1 x_1 + A_2 p_2 x_2 + \ldots = \Sigma (A p x) = 0$$

ist, indem die nach aussen zu gedrückten Kolben ebenso viel Arbeit verbrauchen, als von den einwärts gedrückten geleistet wird. Da ferner die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist, so muss sie durch Zurückschiebung einiger der Kolben ebenso viel Raum gewonnen haben, als ihr durch das Eindringen der übrigen genommen wurde. Dies liefert

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots = \Sigma (A x) = 0.$$

Die letztere Gleichung ist die einzige Bedingung, welcher die Grössen x_1, x_2, u. s. w. in der ersten Gleichung unterworfen sind; die erste Gleichung kann daher nur bestehen, wenn

$$p_1 = p_2 = p_3 = \text{u. s. w.},$$

d. h. wenn der auf jedem Kolben lastende Druck derselbe ist. Auf dieser Eigenschaft beruht die Wirkung der Brahmah'schen Presse.

Wenn die Flüssigkeit zusammendrückbar ist und durch den mittleren Druck p vom Volumen V auf $V - \delta V$ gebracht wird, so ist die Grösse der verbrauchten Arbeit $p \delta V$.

Wenn wir in diesem Falle annehmen, der Druck sei überall derselbe, so erhalten wir ein Resultat, welches mit dem Energiecriterium nicht in Widerspruch steht.

Die auf die Flüssigkeit ausgeübte Arbeit ist nämlich $\Sigma (A p x)$ oder, in Folge dieser Annahme, $p \Sigma (A x)$.

Dies ist aber gleich $\quad p \delta V,$

denn es ist offenbar $\quad \Sigma (A x) = \delta V.$

748. **Der Flüssigkeitsdruck in seiner Abhängigkeit von äusseren Kräften.** — Wenn von einer äusseren Masse her auf die Substanz der Flüssigkeit Kräfte, wie die Schwere einwirken, die entweder der Dichtigkeit, welche die Flüssigkeit selbst in ihren verschiedenen Theilen hat, oder der Dichtigkeit der Elektricität oder des Magnetismus oder einer beliebigen anderen denkbaren accidentellen Eigenschaft derselben proportional sind, so wird

der Druck zwar in jedem Punkte noch in allen Richtungen derselbe sein, aber von Punkt zu Punkt continuirlich variiren. Denn der vorhergehende Beweis (§ 745) lässt sich auch auf diese Fälle anwenden, wenn man einfach die Dimensionen des Prisma klein genug annimmt, da die Druckkräfte den Quadraten und die von aussen einwirkenden Kräfte (wie die Schwere) den Cuben der linearen Dimensionen desselben proportional sind.

749. **Die Oberflächen gleichen Drucks sind senkrecht zu den Kraftlinien.** — Wenn auf die ganze Flüssigkeit Kräfte einwirken, so müssen die Flächen gleichen Drucks, falls solche vorhanden sind, in jedem Punkte zur Richtung der resultirenden Kraft senkrecht sein. Denn jeder prismatische Flüssigkeitstheil, der so gelegen ist, dass seine Endflächen einen gleichen Druck erleiden, kann (§ 551) von den äusseren Kräften keine Einwirkung in der Richtung seiner Länge erfahren; wenn daher das Prisma so klein ist, dass sich in ihm von Punkt zu Punkt die Richtung der Resultante der von aussen einwirkenden Kräfte nicht merklich ändert, so muss diese Richtung zur Länge des Prisma senkrecht sein. Hieraus folgt, dass, welches auch der physische Ursprung und das Gesetz des auf die Flüssigkeit einwirkenden Kraftsystems sei, und ganz abgesehen davon, ob dies System conservativ sei oder nicht, die Flüssigkeit sich nicht im Gleichgewicht befinden kann, wofern nicht die Kraftlinien die geometrische Eigenschaft besitzen, zu einer Schaar von Flächen rechtwinklig zu sein.

750. **Im Falle eines conservativen Kraftsystems sind die Oberflächen gleichen Drucks auch Flächen gleicher Dichtigkeit und gleichen Potentials.** — Weiter wollen wir zwei einander unendlich nahe liegende Flächen gleichen Drucks betrachten. Die zwischen beiden enthaltene Flüssigkeit werde in Säulen von gleichem Querschnitt getheilt, deren Längen zu den Flächen senkrecht sind. Da die Differenz der auf die beiden Endflächen wirkenden Druckkräfte für jede Säule dieselbe ist, so müssen die Resultanten der von aussen auf die sie bildenden Flüssigkeitstheile einwirkenden Kräfte gleich sein. Vergleichen wir dies Resultat mit § 488, so erkennen wir, dass, wenn die von aussen einwirkenden Kräfte ein conservatives System bilden, die Dichtigkeit der schweren Masse, oder der Elektricität oder der Eigenschaft der Substanz, von der sie sonst abhängen, in der betrachteten Schicht überall dieselbe sein muss. Dies ist der berühmte hydrostatische

Satz, dass in jeder in Ruhe befindlichen Flüssigkeit die Flächen gleichen Drucks auch Flächen gleicher Dichtigkeit und gleichen Potentials sind.

751. Fall, in welchem die Schwere die einzige von aussen wirkende Kraft ist. — Wenn daher die Schwere die einzige betrachtete Kraft ist, die von aussen einwirkt, so sind die Oberflächen gleichen Drucks und gleicher Dichtigkeit (so lange sie mässige Ausdehnungen haben) horizontale Ebenen. Hierauf beruht die Wirkung der Wasserwage, des Hebers, des Barometers, u. s. w., ebenso die Uebereinanderlagerung von verschieden dichten Flüssigkeiten, die sich nicht mit einander mischen oder chemisch verbinden, in horizontalen Schichten, u. s. w., u. s. w. Die freie Oberfläche einer Flüssigkeit ist nur dem Druck der Atmosphäre ausgesetzt, muss daher, wenn die Flüssigkeit sich im Gleichgewicht befindet, eine Fläche gleichen Drucks, folglich eine Ebene sein. In ausgedehnten Wasserflächen, wie den amerikanischen Seen, bringen Unterschiede des atmosphärischen Drucks sogar bei ziemlich ruhigem Wetter oft beträchtliche Abweichungen von einer genau ebenen Fläche hervor.

752. Grösse der Zunahme des Drucks. — Die für die Längeneinheit in der Richtung der resultirenden Kraft genommene Grösse der Zunahme des Drucks ist gleich der für die Volumeneinheit der Flüssigkeit gerechneten Intensität der Kraft. Es sei F die für die Volumeneinheit in einer der Säulen des § 750 genommene resultirende Kraft; ferner seien p und p' die an den Enden dieser Säule wirkenden Druckkräfte, l die Länge und S der Querschnitt der Säule. Wir erhalten dann für das Gleichgewicht derselben

$$(p' - p)\, S = S l F.$$

Folglich ist F die für die Längeneinheit genommene Grösse der Zunahme des Drucks.

Wenn die von aussen einwirkenden Kräfte einem conservativen System angehören, für welches V und V' die Werthe des Potentials an den Enden der Säule sind, so ist (§ 486)

$$V' - V = - l F \varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnet. Dies liefert

$$p' - p = - \varrho\, (V' - V),$$

oder

$$dp = - \varrho\, d V.$$

Wie in dem Falle, in welchem die Schwerkraft die einzige einwirkende Kraft ist, ist folglich auch hier die für die Einheit der Tiefe in der Flüssigkeit genommene Grösse der Zunahme des Drucks im Gravitationsmaass (welches gewöhnlich in der Hydrostatik benutzt wird) ϱ, im kinetischen oder absoluten (§ 224) Maasse $g\varrho$.

Wenn die Flüssigkeit ein Gas wie Luft ist und in einer constanten Temperatur erhalten wird, so haben wir $\varrho = cp$, wo c eine Constante bezeichnet, nämlich den reciproken Werth von H, der unten (§ 753) definirten „Höhe der homogenen Atmosphäre". Folglich ist in einer ruhigen Atmosphäre von gleichmässiger Temperatur

$$\frac{dp}{p} = -c\,dV,$$

und hieraus ergibt sich durch Integration

$$p = p_0\,e^{-cV},$$

wo p_0 die Grösse des Drucks in irgend einer besonderen Höhe (z. B. am Meeresspiegel) bezeichnet, in welcher wir das Potential als Null rechnen.

Wenn die betrachteten Höhendifferenzen unendlich klein im Vergleich zum Erdradius sind, wie wir sie mit für praktische Zwecke hinlänglicher Genauigkeit ansehen können, wenn wir die Höhen von Bergen oder von Luftballons mittels des Barometers bestimmen, so ist die Schwerkraft constant, und daher sind die Differenzen des Potentials (wenn die Kraft in Gewichtseinheiten gemessen wird) einfach gleich den Höhendifferenzen. Wenn also x die Erhöhung der Horizontalebene des Drucks p über diejenige des Drucks p_0 bezeichnet, so erhalten wir in der vorhergehenden Formel

$$V = x,$$

folglich

$$p = p_0\,e^{-cx},$$

in Worten: —

753. Druck in einer ruhigen Atmosphäre von gleichmässiger Temperatur. Höhe der homogenen Atmosphäre. — Wenn die Luft eine constante Temperatur hat, so nimmt der Druck in geometrischer Progression ab, während die Höhe in arithmetischer Progression wächst. Dieser Satz rührt von Halley her. Die Wahrheit desselben erkennen wir auch ohne Anwendung der Mathematik, wenn wir beachten, dass die Druckdifferenzen (§ 752) gleich sind den Höhendifferenzen, multiplicirt mit der Dichtigkeit der Flüssigkeit, oder, falls die Dichtigkeit sich zwischen den beiden Stationen merklich ändert, mit der entsprechenden mittleren Dichtigkeit. Nach dem Gesetz von Boyle und Mariotte variirt aber die Dichtigkeit bei constanter Temperatur einfach proportional dem Drucke. Folglich sind die Druckdifferenzen zwischen Paaren von Stationen, welche dieselben Höhenunterschiede haben, den entsprechenden Mittelwerthen

des ganzen Drucks proportional, was das bekannte Zinseszinsgesetz ist. Das Verhältniss der für die Längeneinheit genommenen, nach oben zu erfolgenden Abnahme des Drucks zum gesammten Druck ist in jedem Punkte natürlich gleich dem reciproken Werth der Höhe, welche die Atmosphäre, wenn ihre Dichtigheit constant ist, über jenen Punkt haben muss, damit ihr Gewicht jenen Druck liefere. Die so definirte Höhe wird gewöhnlich mit dem recht passenden Namen: „die Höhe der homogenen Atmosphäre" bezeichnet. Dieselbe ist gleich dem Product des Volumens, welches die Masseneinheit des Gases unter irgend einem Druck einnimmt, in den mittels des Gewichtes der Masseneinheit ausgedrückten Werth, welchen jener Druck für die Flächeneinheit hat. Wird die Höhe der homogenen Atmosphäre mit H bezeichnet, so ist der Exponentialausdruck des Gesetzes

$$p = p_0 e^{-\frac{x}{H}},$$

was mit der letzten Formel des § 752 übereinstimmt.

Für trockene atmosphärische Luft von der Temperatur des Gefrierpunktes ist der Werth von H nach Regnault in der Breite von Paris 799 020 cm oder 26 215 (engl.) Fuss. Da derselbe in verschiedenen Breiten (§ 222) der Schwerkraft umgekehrt proportional ist, so beträgt er in der Breite von Edinburgh und Glasgow 798 533 cm oder 26 199 engl. Fuss.

Analytische Herleitung der vorhergehenden Sätze. — Es seien X, Y, Z die, drei zu einander senkrechten Axen parallelen, Componenten der für die Masseneinheit genommenen Kraft, welche auf den im Punkte (x, y, z) befindlichen Flüssigkeitstheil wirkt. Da die Differenz der Druckkräfte, welche die beiden Seitenflächen $\delta y \delta z$ eines rechtwinkligen Parallelepipeds der Flüssigkeit erleiden, $\delta y \delta z \frac{dp}{dx} dx$ ist, so erfordert das Gleichgewicht dieses Theils der Flüssigkeit, wenn wir denselben für einen Augenblick als starr ansehen (§ 564), dass

$$\delta y \delta z \frac{dp}{dx} \delta x - X \varrho \delta x \delta y \delta z = 0$$

sei. Hieraus und aus den auf y und z bezüglichen symmetrischen Gleichungen folgt

$$\frac{dp}{dx} = X\varrho, \quad \frac{dp}{dy} = Y\varrho, \quad \frac{dp}{dz} = Z\varrho, \tag{1}$$

und dies sind die für das Gleichgewicht einer beliebigen Flüssigkeit nothwendigen und hinreichenden Bedingungen.

Aus (1) ergibt sich

$$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = \varrho(X dx + Y dy + Z dz). \tag{2}$$

Dies zeigt, dass der Ausdruck

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

das vollständige Differential einer Function dreier unabhängig Veränderlichen sein muss, oder durch einen Factor zu einem solchen muss gemacht werden können, d. h. dass es eine Schaar von Flächen gibt, welche die Kraftlinien unter rechten Winkeln schneiden, ein Satz, den wir schon oben (§ 749) bewiesen haben.

Wenn die Kräfte einem conservativen System angehören, so ist kein Factor erforderlich, um das Differential zu einem vollständigen zu machen, und wir erhalten

$$Xdx + Ydy + Zdz = - dV,$$

wenn V das Potential (§ 485) der Kräfte in (x, y, z) bezeichnet. Dann geht (2) über in

$$dp = - \varrho dV. \tag{3}$$

Dies zeigt, dass p auf den Flächen constanten Potentials constant (oder eine Function von V) ist, und liefert

$$\varrho = - \frac{dp}{dV}, \tag{4}$$

woraus ersichtlich ist, dass auch ϱ eine Function von V ist, welche Sätze wir auf einem mehr elementaren Wege schon in § 752 bewiesen haben. Da (4) ein analytischer Ausdruck ist, welcher für den Fall eines conservativen Kraftsystems den drei Gleichungen (1) äquivalent ist, so gelangen wir zu folgendem Schlusse: —

754. Bedingungen des Gleichgewichts einer Flüssigkeit, welche ein geschlossenes Gefäss ganz ausfüllt. — Für das Gleichgewicht einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit, welche ein starres geschlossenes Gefäss vollständig ausfüllt, und welche nur der Einwirkung eines conservativen Kraftsystems ausgesetzt ist, ist es erforderlich und hinreichend, dass der Druck auf jeder Fläche constanten Potentials, d. h. auf jeder die Kraftlinien unter rechten Winkeln schneidenden Fläche gleichförmig sei. Wenn jedoch die Umgrenzung oder irgend ein Theil der Umgrenzung der betrachteten Flüssigkeit nicht starr ist — derselbe sei nun eine biegsame feste Substanz (wie eine Membran, oder ein dünnes Blatt eines festen elastischen Körpers), oder eine bloss geometrische Umgrenzung, auf deren anderer Seite eine andere Flüssigkeit ist, oder endlich Nichts [welchen Fall wir, ohne an das Vacuum als eine Realität zu glauben, in der abstracten Dynamik (§ 438) zulassen können] — so ist eine weitere Bedingung erforderlich, wenn der Druck von aussen in jedem Punkte der Umgrenzung der Gleichung (4) genügen soll. Wenn eine Membran einen Theil der Grenze bildet, so muss diese Bedingung entweder durch einen von aussen

her künstlich angebrachten Druck oder durch die inneren Elasticitätskräfte der Substanz der Membran erfüllt werden. Wenn eine andere Flüssigkeit von einer anderen Dichtigkeit sie auf der anderen Seite der Umgrenzung ringsherum oder nur in einem gewissen Theil berührt, ohne durch eine Membran von ihr getrennt zu sein, so muss die Bedingung des Gleichgewichts einer heterogenen Flüssigkeit von der gesammten aus den beiden Flüssigkeiten bestehenden Masse erfüllt sein, woraus hervorgeht, dass der Druck an der Grenze constant und gleich dem Druck der Flüssigkeit auf der anderen Seite sein muss. So ist für das Gleichgewicht von Wasser, Oel, Quecksilber oder irgend einer anderen Flüssigkeit, die sich in einem offenen Gefässe befindet und deren freie Oberfläche der Luft ausgesetzt ist, bloss erforderlich, dass diese Oberfläche eine Ebene sei.

755. **Eine Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefäss unter der Einwirkung eines nicht conservativen Kraftsystems.** — Indem wir jetzt zur Betrachtung einer Flüssigkeitsmasse von endlicher Grösse, welche ein starres geschlossenes Gefäss vollständig erfüllt, zurückkehren, ersehen wir aus dem Vorhergehenden, dass, wenn die Flüssigkeit homogen und unzusammendrückbar ist, ihr Gleichgewicht durch kein conservatives Kraftsystem gestört werden kann. Diesen Satz zu beweisen, bedarf es keiner analytischen Untersuchung; denn wenn derselbe nicht richtig wäre, so würden wir ein „Perpetuum mobile“ erhalten, was der Voraussetzung, dass das System der Kräfte ein conservatives sei, widerspricht. Andererseits kann ein nichtconservatives Kraftsystem unter keinen Umständen eine Flüssigkeit in den Zustand des Gleichgewichts versetzen, welche entweder überall von gleichmässiger Dichtigkeit ist, oder welche aus einer homogenen Substanz besteht, die, was die Dichtigkeit betrifft, nur durch Verschiedenheit des Drucks heterogen gemacht worden ist. Wenn aber die Kräfte zwar nicht conservativ, doch so beschaffen sind, dass durch jeden Punkt des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes eine Oberfläche gezogen werden kann, welche alle Kraftlinien, die sie trifft, unter rechten Winkeln schneidet, so wird eine heterogene Flüssigkeit unter ihrer Einwirkung im Gleichgewicht bleiben, vorausgesetzt (§ 750), dass ihre Dichtigkeit auf jeder dieser orthogonalen Flächen von Punkt zu Punkt umgekehrt variirt, wie das Product der resultirenden Kraft in die Dicke der unendlich dünnen Schicht, welche zwischen jener Fläche und einer anderen der orthogonalen Flächen liegt, die ihr auf einer Seite unendlich nahe ist (vergl. § 488).

Eine Flüssigkeit unter der Einwirkung eines beliebigen Kraftsystems. — Dasselbe Resultat ergibt sich als etwas Selbstverständliches aus (1), da jene Gleichung bloss der analytische Ausdruck der Bedingung ist, dass die Kraft in jedem Punkte (x, y, z) die Richtung der Normalen an die durch (x, y, z) gehende Oberfläche hat, welche zu der Schaar der Flächen gehört, die durch verschiedene Werthe von C in $p = C$ erhalten werden, und dass ferner die Grösse der resultirenden Kraft

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+\left(\frac{dp}{dz}\right)^2}}{\varrho}$$

ist, in welchem Ausdruck der Zähler gleich $\frac{\vartheta C}{\tau}$ ist, wenn τ die Dicke der Schicht im Punkte (x, y, z) bezeichnet, welche zwischen den beiden einander zu beiden Seiten von (x, y, z) unendlich nahe liegenden Flächen

$$p = C \text{ und } p = C + \vartheta C$$

enthalten ist.

Der analytische Ausdruck der Bedingung, welcher X, Y, Z genügen müssen, damit die Gleichungen (1) möglich seien, wird folgendermaassen gefunden: — Aus

$$\frac{d}{dz}\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{dp}{dz}, \text{ u. s. w.}$$

folgt zunächst

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dz}(\varrho Y) = \dfrac{d}{dy}(\varrho Z) \\ \dfrac{d}{dx}(\varrho Z) = \dfrac{d}{dz}(\varrho X) \\ \dfrac{d}{dy}(\varrho X) = \dfrac{d}{dx}(\varrho Y). \end{cases}$$

Wenn wir die angedeuteten Differentiationen ausführen und die erste der resultirenden Gleichungen mit X, die zweite mit Y, die dritte mit Z multipliciren, so erhalten wir

$$(6)\qquad X\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+Y\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+Z\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)=0,$$

was bloss die bekannte Bedingung dafür ist, dass der Ausdruck

$$X dx + Y dy + Z dz$$

durch einen Factor zu dem vollständigen Differential einer Function dreier unabhängig Veränderlichen gemacht werden könne.

Oder wenn wir die erste der Gleichungen (5) mit $\frac{d\varrho}{dx}$, die zweite mit $\frac{d\varrho}{dy}$, die dritte mit $\frac{d\varrho}{dz}$ multipliciren und die Resultate addiren, so erhalten wir

$$(7)\qquad \frac{d\varrho}{dx}\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+\frac{d\varrho}{dy}\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+\frac{d\varrho}{dz}\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)=0.$$

Dies zeigt, dass die Linie, deren Richtungscosinus proportional

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},\ \frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx},\ \frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}$$

sind, auf der durch (x, y, z) gehenden Oberfläche gleicher Dichtigkeit senkrecht steht, und aus (6) geht hervor, dass dieselbe Linie senkrecht ist zur resultirenden Kraft. Die genannte Linie ist daher Tangente sowohl für die Oberfläche gleicher Dichtigkeit, als für die gleichen Drucks, folglich auch für die Schnittcurve beider Flächen. Die Differentialgleichungen dieser Curve sind somit

$$\frac{dx}{\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}}=\frac{dy}{\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}}=\frac{dz}{\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}}. \tag{8}$$

756. Gleichgewichtsbedingung. — Wir denken uns jetzt, die ganze Flüssigkeit werde starr, mit Ausnahme eines unendlich dünnen geschlossenen röhrenförmigen Theils, welcher in einer Oberfläche gleicher Dichtigkeit liegt. Wenn die Flüssigkeit in dieser Röhre eine beliebige Strecke längs der Röhre fortbewegt und dann in Ruhe gelassen wird, so wird sie in der neuen Lage im Gleichgewicht bleiben, da alle ihre Lagen in der Röhre der Homogenität wegen gleichwerthig sind. Folglich wird die (positive oder negative) Arbeit, welche die Kraft (X, Y, Z) auf irgend einen Theil der Flüssigkeit bei einer Verschiebung längs der Röhre ausübt, durch die (negative oder positive) Arbeit aufgewogen, welche auf die übrige in der Röhre befindliche Flüssigkeit ausgeübt wird. Wenn sich daher ein einzelner Massenpunkt, auf welchen nur X, Y, Z einwirken, durch den Umfang bewegt, d. h. eine beliebige geschlossene Curve auf einer Oberfläche gleicher Dichtigkeit durchläuft, so hat er nach Zurücklegung eines vollständigen Umgangs in einigen Theilen seines Laufes genau so viel Arbeit gegen die Kraft geleistet, als die Kräfte in den übrigen Theilen seines Laufes auf ihn ausgeübt haben.

Wir können dieses Resultat analytisch beweisen durch eine interessante Anwendung von § 190 (j). Nehmen wir nämlich für α, β, γ unsere jetzigen Kräftecomponenten X, Y, Z und für die dort benutzte Oberfläche eine Fläche gleicher Dichtigkeit in unserer heterogenen Flüssigkeit, so muss der Ausdruck

$$\iint dS\left\{l\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+m\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+n\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\right\}$$

wegen (7) verschwinden, und daraus lässt sich der Schluss ziehen, dass für jede geschlossene Curve auf einer Oberfläche gleicher Dichtigkeit

$$\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=0$$

ist.

757. Imaginäres Beispiel des Gleichgewichts einer Flüssigkeit unter der Einwirkung nicht conservativer Kräfte. — Das folgende imaginäre Beispiel und seine Realisation in einem späteren Paragraphen (§ 759) zeigen eine merkwürdig interessante praktische Anwendung der Theorie des Gleichgewichts der Flüssigkeiten unter aussergewöhnlichen Umständen, während man diese Theorie allgemein als eine bloss abstracte analytische Theorie ansieht, die praktisch werthlos und ganz unnatürlich sei, „weil die Kräfte in der Natur von conservativer Art seien."

758. Es mögen die Kraftlinien Kreise sein, deren Mittelpunkte sämmtlich auf einer Linie liegen, und deren Ebenen senkrecht zu dieser Linie sind. Dieselben werden von den durch diese Axe gehenden Ebenen unter rechten Winkeln geschnitten, und daher kann eine Flüssigkeit unter einem solchen System von Kräften im Gleichgewicht sein. Das System wird nicht conservativ sein, wenn die Intensität der Kraft nicht dem Abstande von jener Axe umgekehrt proportional ist, sondern nach irgend einem andern Gesetz variirt, und damit die Flüssigkeit sich im Gleichgewicht befinde, muss sie heterogen und so vertheilt sein, dass ihre Dichtigkeit auf jeder durch die Axe gehenden Ebene von Punkt zu Punkt umgekehrt wie das Product der Kraft in den Abstand von der Axe variire. Aber von einer solchen Ebene zu einer andern kann die Dichtigkeit gleichförmig sein, oder sich willkürlich ändern. Um bestimmtere Bedingungen zu stellen, wollen wir voraussetzen, die Kraft stehe in directer einfacher Proportion zum Abstande von der Axe. Dann wird die Flüssigkeit im Gleichgewicht sein, wenn ihre Dichtigkeit auf jeder durch die Axe gehenden Ebene von Punkt zu Punkt umgekehrt wie das Quadrat jenes Abstandes variirt. Wenn wir noch weiter specialisiren, indem wir die Kraft um jede kreisförmige Kraftlinie herum gleichförmig machen, so wird die Vertheilung der Kraft genau die der kinetischen Reactionen der Theile eines starren Körpers gegen eine beschleunigte Rotation. Der Flüssigkeitsdruck wird dann (§ 749) auf jeder durch die Axe gehenden Ebene überall der nämliche sein, und auf einer solchen Ebene, welche wir uns um die Axe in der Richtung der Kraft herumgeführt denken können, wird der Flüssigkeitsdruck eine dem Winkel einfach proportionale Zunahme erfahren, deren Betrag, genommen für die Einheit des Winkels (§ 41), gleich dem Product aus der Dichtigkeit, welche die Flüssigkeit in der Einheit des Abstandes hat, in die Grösse der Kraft in der Einheit des Abstandes ist. Folglich ist zu bemerken, dass, wenn eine geschlos-

sene Linie um die Axe gezogen werden kann, ohne dass man die Flüssigkeit zu verlassen braucht, kein Gleichgewicht bestehen kann ohne eine feste Scheidewand, welche jede solche geschlossene Linie schneidet und die dem Winkel 2π entsprechende Differenz der zu ihren beiden Seiten wirkenden Druckkräfte erträgt. Wenn also die Axe durch irgend einen Theil der Flüssigkeit geht, so muss eine Scheidewand da sein, welche sich von diesem Theil der Axe continuirlich bis zur äusseren Grenzfläche der Flüssigkeit erstreckt. Oder wenn die Grenzfläche der ganzen Flüssigkeit ringförmig (wie ein hohler Ankerring, oder von einer beliebigen unregelmässigen Form) ist, mit anderen Worten, wenn die Flüssigkeit einen röhrenförmigen geschlossenen Raum erfüllt, und die Axe (A) durch die Oeffnung des Ringes geht (ohne in die Flüssigkeit einzutreten), so muss eine feste Scheidewand (CD) da sein, welche irgendwo den Canal oder die Röhre ganz verschliesst und die Flüssigkeit verhindert, ganz herum zu fliessen; sonst könnte unter der Einwirkung der vorausgesetzten Kräfte kein Gleichgewicht stattfinden. Wenn wir weiter in dem bisher betrachteten System voraussetzen, die Flüssigkeit sei ringsum längs jeder der kreisförmigen Kraftlinien von gleichförmiger Dichtigkeit (so dass die Dichtigkeit auf jedem Cylinder von kreisförmiger Basis, welcher die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kraftlinien zur Axe hat, gleich ist und von einer solchen Cylinderfläche zu einer andern umgekehrt wie die Quadrate der Radien derselben variirt), so können wir, ohne das Gleichgewicht zu stören, ein beliebiges conservatives System von Kräften hinzufügen, deren Richtungen zur Axe senkrecht sind, d. h. (§ 488) ein beliebiges System von Kräften, welche die genannten Richtungen haben, und deren Intensität wie irgend eine Function des Abstandes variirt. Wenn diese Function der einfache Abstand selbst ist, so stimmt das neu hinzugefügte Kraftsystem genau mit den Reactionen gegen eine Krümmung, d. h. mit den Centrifugalkräften der Theile eines rotirenden starren Körpers überein.

Fig. 64.



759. Realisation des vorhergehenden Beispiels. — Wir gelangen auf diese Weise zu dem bemerkenswerthen Schluss, dass, wenn ein starres geschlossenes Gefäss vollständig mit einer unzusammendrückbaren heterogenen Flüssigkeit erfüllt ist, deren Dich-

tigkeit umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von einer gewissen Linie variirt, und wenn das Gefäss sich um diese Linie als eine feste Axe bewegen kann und auf irgend eine Weise von Kräften angegriffen wird, die auf seine Aussenseite einwirken, die Flüssigkeit in Beziehung auf das Gefäss im Gleichgewicht bleiben, d. h. sich mit demselben herumbewegen wird, als wäre das Ganze ein starrer Körper, und mit dem Gefäss zur Ruhe kommen wird, wenn das letztere wieder zur Ruhe gebracht wird; immer vorausgesetzt, dass die oben angegebene Bedingung hinsichtlich der Scheidewände erfüllt ist, wenn die Axe durch die Flüssigkeit geht, oder von geschlossenen Flüssigkeitslinien umgeben ist. Denn wenn sich die Flüssigkeit beim Uebergang von Ruhe zu Bewegung wie ein starrer fester Körper bewegt, so sind Reactionen gegen eine Beschleunigung vorhanden, deren Richtungen Tangenten an die Bewegungskreise sind, und die für die Einheit der Masse der Flüssigkeit im Abstande r von der Axe die Grösse ωr haben, wenn ω die für die Zeiteinheit genommene Grösse der Winkelbeschleunigung (§ 42) ist; ausserdem (siehe Bd. II) ist in der zur Axe senkrechten Richtung eine nach aussen zu wirkende Reaction gegen die Krümmung der Bahn, d. h. eine „Centrifugalkraft“ vorhanden, welche für die Masseneinheit der Flüssigkeit $\omega^2 r$ beträgt. Nun haben wir im vorhergehenden Paragraphen bewiesen, dass die Flüssigkeit, wenn wir voraussetzen, sie befinde sich in Ruhe und werde in irgend einer Weise von zwei Kraftsystemen (dem nicht-conservativen mit kreisförmigen Kraftlinien und dem conservativen radialen Systeme) angegriffen, welche mit jenen Kräften der kinetischen Reaction übereinstimmen, im Gleichgewicht ist. Dies beweist uns jetzt D'Alembert's (§ 264) Gleichgewichtsbedingung für die Bewegung der ganzen Flüssigkeit als eines starren Körpers, welcher eine beschleunigte Rotation erfährt, d. h. zeigt uns, dass diese Art der Bewegung für die wirklich vorhandenen Umstände die Gesetze der Bewegung erfüllt und somit die von der Flüssigkeit wirklich angenommene Bewegung ist.

760. Relation zwischen der Dichtigkeit und dem Potential der von aussen einwirkenden Kräfte. — Wenn die Flüssigkeit von homogener Substanz und überall von derselben Temperatur, aber wie alle realen Flüssigkeiten zusammendrückbar ist, so kann sie nur wegen der Verschiedenheit des Drucks an verschiedenen Stellen von ungleichförmiger Dichtigkeit sein. Die Oberflächen gleicher Dichtigkeit müssen auch Oberflächen gleichen

Drucks sein, und es kann, wie wir oben (§ 753) gesehen haben, kein Gleichgewicht stattfinden, wofern das System der Kräfte nicht conservativ ist. Die Dichtigkeit ist eine Function des Drucks, und diese Function muss als bekannt vorausgesetzt werden (§ 448), da sie von den physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit abhängt (vergl. § 752).

Es sei

(9) $$\varrho = f(p).$$

Wenn wir die Formel § 753 (3) integriren, so erhalten wir

(10) $$\int \frac{dp}{f(p)} = C - V,$$

oder, wenn F eine Function bezeichnet, für welche

(11) $$F\left\{\int \frac{dp}{f(p)}\right\} = p$$

ist,

$$p = F(C - V),$$

oder nach (9)

(12) $$\varrho = f\{F(C - V)\}.$$

761. Resultante der auf ein ebenes Flächenstück wirkenden Druckkräfte. — In § 746 haben wir die Resultante der auf eine ebene Fläche wirkenden Druckkräfte unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Vertheilung dieser Kräfte betrachtet. Wir wollen jetzt kurz die Resultante der auf ein ebenes Flächenstück wirkenden Druckkräfte unter der Voraussetzung betrachten, dass sich der Druck von Punkt zu Punkt ändert. Dabei werden wir unsere Aufmerksamkeit auf einen Fall von grosser Wichtigkeit beschränken, nämlich auf den Fall, in welchem die Schwere die einzige einwirkende Kraft und die Flüssigkeit nur äusserst wenig zusammendrückbar (wie z. B. Wasser) ist. In diesem Falle ist die Bestimmung der Lage des Mittelpunkts des Drucks sehr einfach, und der Gesammtdruck ist derselbe, wie wenn das ebene Flächenstück um seinen Trägheitsmittelpunkt in eine horizontale Lage gedreht wäre.

Der Druck in einem Punkte von der Tiefe z in der Flüssigkeit kann durch

$$p = \varrho z + p_0$$

ausgedrückt werden, wo ϱ die (constante) Dichtigkeit der Flüssigkeit und p_0 der auf der freien Oberfläche lastende (atmosphärische) Druck ist, ausgedrückt in Gewichtseinheiten per Flächeneinheit.

Es werde nun als x-Axe der Durchschnitt der Ebene der eingetauchten Platte mit der freien Oberfläche der Flüssigkeit angenommen. Die

y-Axe liege in der Ebene der Platte senkrecht zur x-Axe, und es sei α der Neigungswinkel der Platte gegen die Verticale. Ferner habe der betrachtete Theil der Platte die Fläche A und sein Trägheitsmittelpunkt die Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Dann ist der gesammte Druck

$$\iint p\,dx\,dy = \iint (p_0 + \varrho y \cos\alpha)\,dx\,dy$$
$$= A p_0 + A \varrho \bar{y} \cos\alpha.$$

Das Moment des Drucks in Beziehung auf die x-Axe ist

$$\iint p y\,dx\,dy = A p_0 \bar{y} + A k^2 \varrho \cos\alpha,$$

wo k der Gyrationsradius des ebenen Flächenstücks in Beziehung auf die x-Axe ist.

Für das Trägheitsmoment in Beziehung auf die y-Axe erhalten wir

$$\iint p x\,dx\,dy = A p_0 \bar{x} + \varrho \cos\alpha \iint x y\,dx\,dy.$$

Die ersten Theile der rechten Glieder dieser drei Gleichungen liefern uns bloss die Resultate von § 746; wir können diese Theile daher fortlassen. Dies läuft darauf hinaus, dass wir über die freie Oberfläche eine Flüssigkeitsschicht von solcher Höhe setzen, dass der dadurch erzeugte Druck dem atmosphärischen äquivalent ist. Wird jetzt der Anfangspunkt der Coordinaten in die obere Fläche dieser Schicht verlegt, so ergibt sich:

$$\text{Druck} = A \varrho \bar{y} \cos\alpha,$$
$$\text{Moment in Beziehung auf } Ox = A k^2 \varrho \cos\alpha,$$
$$\text{Abstand des Mittelpunktes des Drucks von der } x\text{-Axe} = \frac{k^2}{\bar{y}}.$$

Wenn aber k_1 der Gyrationsradius des ebenen Flächenstücks in Beziehung auf eine in seiner Ebene liegende und durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende horizontale Axe ist, so haben wir nach § 283

$$k^2 = k_1^2 + \bar{y}^2.$$

Folglich ist der der y-Axe parallel gemessene Abstand des Mittelpunkts des Drucks von dem Trägheitsmittelpunkt

$$\frac{k_1^2}{\bar{y}},$$

und dieser Abstand wird, wie wir erwarten konnten, um so kleiner, je mehr das ebene Flächenstück untergetaucht wird. Wenn man das ebene Flächenstück um die durch seinen Trägheitsmittelpunkt gehende, der x-Axe parallele Linie dreht, so variirt jener Abstand wie der Cosinus der Neigung des Flächstücks gegen die Verticale; dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Grösse des untergetauchten Theils der Fläche durch die Rotation keine Aenderung erleidet.

762. Gewichtsverlust eines Körpers in einer Flüssigkeit. — Ein ganz oder zum Theil in irgend eine unter der Einwirkung der Schwerkraft stehende Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert in Folge des Drucks der Flüssigkeit so viel von seinem Ge-

wicht, als die verdrängte Flüssigkeit wiegt. Denn wenn der Körper entfernt und an seine Stelle eine mit der umgebenden Flüssigkeit homogene flüssige Masse gesetzt würde, so würde Gleichgewicht bestehen, selbst wenn man voraussetzte, diese Flüssigkeit würde starr. Die Resultante des Drucks der umgebenden Flüssigkeit auf diesen Theil ist daher eine einzige dem Gewicht derselben gleiche Kraft, welche in der durch den Schwerpunkt derselben gehenden Verticallinie wirkt. Der Druck der Flüssigkeit auf den anfänglich eingetauchten Körper war aber überall derselbe, wie der Druck auf den starr gewordenen Flüssigkeitstheil, durch welchen wir jenen für einen Augenblick ersetzt haben; er muss daher auch dieselbe Resultante haben. Dieser Satz ist von grosser Bedeutung in der Hydrometrie, der Bestimmung des specifischen Gewichts, u. s. w.

Wir wollen den Satz analytisch herleiten. Interessant ist der folgende Beweis, namentlich wegen der Analogien mit einigen vorhergehenden Sätzen, und einigen Sätzen, die wir in den Capiteln über Elektricität und Magnetismus antreffen werden.

Wenn V das Potential der einwirkenden Kräfte ist, so ist $-\frac{dV}{dx}$ die der x-Axe parallele Componente der Kraft, welche auf die im Punkte (x, y, z) befindliche Masseneinheit wirkt, und es ist $\varrho\, dx\, dy\, dz$ die Masse eines Elements der Flüssigkeit. Folglich wird die Resultante aller der x-Axe parallelen Componenten der Kräfte, welche auf einen an die Stelle des eingetauchten Körpers gesetzten Flüssigkeitstheil wirken, durch das dreifache Integral

$$-\iiint \varrho \frac{dV}{dx}\, dx\, dy\, dz$$

dargestellt, welches für den ganzen von der Fläche umgrenzten Raum zu nehmen ist. Nach § 752 ist aber

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho \frac{dV}{dx},$$

und daher verwandelt sich das dreifache Integral in

$$\iiint \frac{dp}{dx}\, dx\, dy\, dz = \iint p\, dy\, dz,$$

welches letztere Integral über die ganze Fläche genommen werden muss.

Es sei nun dS ein in x, y, z liegendes Element irgend einer Oberfläche; ferner seien λ, μ, ν die Richtungscosinus der an dies Element gelegten Normale und p der Druck in der Flüssigkeit, welche mit demselben in Berührung ist. Dann ist die der x-Axe parallele Componente des Gesammtdrucks

$$\begin{aligned} P_x &= \iint \lambda p\, dS \\ &= \iint p\, dy\, dz, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck stimmt mit dem obigen völlig überein.

Das um die z-Axe drehende Kräftepaar, welches aus den auf irgend eine flüssige Masse einwirkenden Kräften herrührt, ist (§ 559)

$$\Sigma\, dm (Xy - Yx),$$

wo dm die Masse eines Flüssigkeitselements bezeichnet.

Dieser Ausdruck kann in der Form

$$-\iiint \varrho\, dx\, dy\, dz \left(y \frac{dV}{dx} - x \frac{dV}{dy}\right)$$

geschrieben werden, wo das Integral für den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum zu nehmen ist.

Der letzte Ausdruck ist offenbar gleich

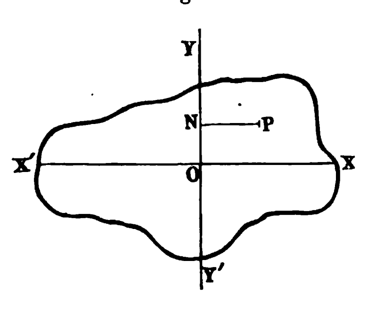
$$\iiint \left(y \frac{dp}{dx} - x \frac{dp}{dy}\right) dx\, dy\, dz$$
$$= \iint p\, y\, dy\, dz - \iint p\, x\, dz\, dx$$
$$= \iint p\, (\lambda y - \mu x)\, dS,$$

und dies ist das nur aus dem Oberflächendruck herrührende Kräftepaar.

763. Hilfssatz. — Der nachstehende, an und für sich schon interessante Hilfssatz ist insofern von grossem Nutzen, als er uns befähigt, die folgenden Untersuchungen über die Stabilität des Gleichgewichts schwimmender Körper zu vereinfachen.

Ein homogener fester Körper, dessen Volumeneinheit das Gewicht Eins haben möge, werde von einer horizontalen Ebene in $XYX'Y'$ geschnitten, und es sei O der Trägheitsmittelpunkt, XX' und YY' die Hauptaxen dieses Schnittes.

Fig. 65.



Weiter werde der feste Körper von einer zweiten Ebene geschnitten, die gleichfalls durch YY' geht und mit der ersteren den unendlich kleinen Winkel ϑ bildet. Dann gelten folgende Sätze: —

1. Die Volumina der durch diese Schnitte aus dem festen Körper geschnittenen beiden Keile sind einander gleich.

2. Ihre Trägheitsmittelpunkte liegen in einer zu YY' senkrechten Ebene.

3. In Beziehung auf YY' ist das Moment des Gewichts jedes dieser Keile gleich dem mit ϑ multiplicirten in Beziehung auf YY' genommenen Trägheitsmoment des entsprechenden Theils der Fläche.

Wir nehmen OX, OY zu Coordinatenaxen, und es sei ϑ der Winkel an der Spitze des Keils. Dann ist die Dicke des Keils in irgend einem Punkte P (x, y) gleich ϑx und das Volumen eines geraden prismatischen Theils, welcher die unendlich kleine in P liegende Fläche $dx\,dy$ zur Basis hat, gleich

$$\vartheta x\,dx\,dy.$$

Wir bedienen uns jetzt der Zeichen [ ] und ( ), um die Integrationen, welche sich beziehungsweise über die rechts und links von der y-Axe liegenden Flächentheile erstrecken, von einander zu unterscheiden, während den auf die ganze Fläche bezüglichen Integralen keine solchen Unterscheidungszeichen beigefügt werden. Es seien α und α' diese Flächen, v und v' die Volumina der Keile, $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{x}', \bar{y}')$ die Coordinaten ihrer Trägheitsmittelpunkte. Dann ist

$$v = \vartheta\,[\iint x\,dx\,dy] = \alpha\bar{x}$$

$$-\,v' = \vartheta\,(\iint x\,dx\,dy) = \alpha'\bar{x}',$$

folglich

$$v - v' = \vartheta \iint x\,dx\,dy = 0,$$

da O der Trägheitsmittelpunkt ist. Hieraus ergibt sich

$$v = v',$$

womit der Satz (1) bewiesen ist.

Nehmen wir weiter die Momente in Beziehung auf die Axe XX', so folgt

$$v\bar{y} = \vartheta\,[\iint xy\,dx\,dy]$$

und

$$-\,v'\bar{y}' = \vartheta\,(\iint xy\,dx\,dy),$$

mithin

$$v\bar{y} - v'\bar{y}' = \vartheta \iint xy\,dx\,dy.$$

Für eine Hauptaxe ist aber (§ 281) $\Sigma xy\,dm$ gleich Null. Wir erhalten also $v\bar{y} - v'\bar{y}' = 0$ und daraus, da $v = v'$ ist,

$$\bar{y} = \bar{y}',$$

was den Satz (2) beweist.

Der Satz (3) drückt bloss die Gleichung

$$[\iint x\,.\,x\vartheta\,dx\,dy] = \vartheta\,[\iint x^2\,.\,dx\,dy],$$

deren Richtigkeit auf der Hand liegt, in Worten aus.

764. Stabilität des Gleichgewichts eines schwimmenden Körpers. — Wenn ein positiver Betrag von Arbeit erfordert wird, um irgend eine mögliche unendlich kleine Verschiebung eines Körpers aus einer Gleichgewichtslage zu erzeugen, so ist das Gleichgewicht in dieser Lage stabil (§ 291). Um dieses Unterscheidungsmittel auf den Fall eines schwimmenden Körpers anzuwenden, bemerken wir, dass jede mögliche unendlich kleine Verschiebung passend als aus zwei horizontalen Verschiebungen, deren Richtungen senkrecht zu einander sind, einer verticalen Verschiebung und drei

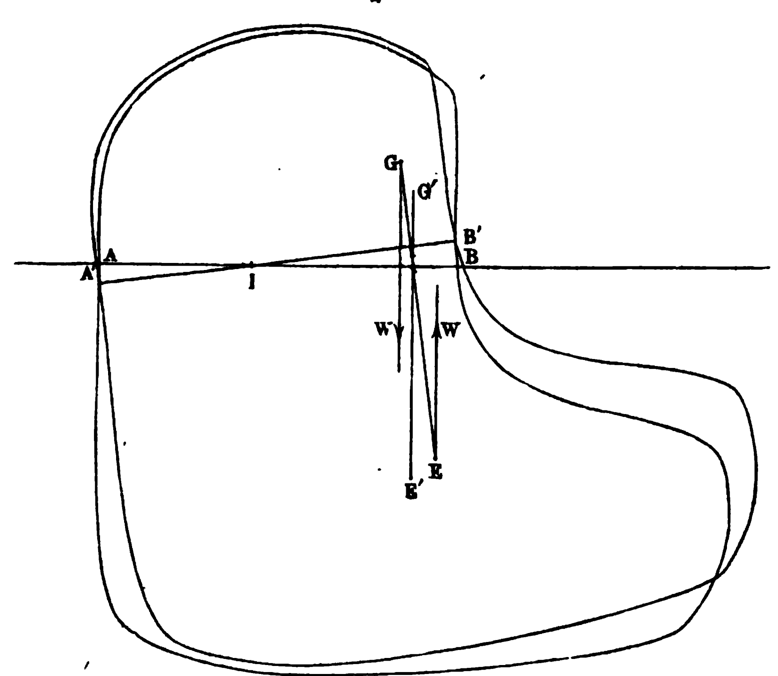
Rotationen um drei durch einen beliebig gewählten Punkt gehende, zu einander senkrechte Axen bestehend angesehen werden kann (§§ 26, 95). Wenn eine dieser Axen vertical ist, so erfordern drei dieser Verschiebungscomponenten — nämlich die beiden horizontalen Verschiebungen und die Rotation um die verticale Axe — keine (positive oder negative) Arbeit, und daher ist das Gleichgewicht, soweit diese Componenten in Betracht kommen, ein neutrales. Was aber die drei anderen Verschiebungsarten betrifft, so kann das Gleichgewicht stabil oder instabil oder neutral sein, jenachdem gewisse Bedingungen erfüllt sind, die wir im Folgenden herleiten wollen.

765. Verticale Verschiebungen. — Wenn zunächst eine einfache verticale Verschiebung etwa nach unten erfolgt, so wird Arbeit geleistet gegen eine zunehmende Resultante des nach oben wirkenden Flüssigkeitsdrucks. Diese Arbeit ist natürlich gleich der mittleren Zunahme dieser Kraft, multiplicirt mit dem ganzen Wege. Wenn wir diesen Weg mit z, die Grösse der Schwimmfläche, d. h. des durch den schwimmenden Körper fortgenommenen Theils der ebenen Oberfläche der Flüssigkeit, mit A und das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit mit w bezeichnen, so ist die Zunahme des eingetauchten Volumens offenbar Az. Folglich ist die Zunahme der Resultante des Flüssigkeitsdrucks $w Az$ und wirkt in einer durch den Schwerpunkt von A vertical nach oben zu gehenden Linie. Die mittlere Kraft, gegen welche Arbeit geleistet wird, ist daher $\frac{1}{2} w A z$, da dies ein Fall ist, in welchem Arbeit gegen eine Kraft geleistet wird, die von Null an einfach proportional dem Wege zunimmt. Die geleistete Arbeit ist also $\frac{1}{2} w A z^2$. Wir sehen daraus, dass, soweit verticale Verschiebungen allein in Betracht kommen, das Gleichgewicht nothwendig stabil ist, so lange nicht der Körper ganz untergetaucht ist. In diesem letzteren Falle ist die Grösse der Schwimmfläche Null und das Gleichgewicht neutral.

766. Verschiebung durch Rotation um eine Axe in der Schwimmebene. Grösse der bei dieser Verschiebung geleisteten Arbeit. — Nach dem Hilfssatze des § 763 empfiehlt es sich, als die beiden horizontalen Rotationsaxen die Hauptaxen der Schwimmebene anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung wollen wir jetzt eine Rotation durch einen unendlich kleinen Winkel ϑ um eine dieser Axen betrachten. Es seien G und E die nach Ausführung der Rotation von den Schwerpunkten des festen Körpers und desjenigen Theils seines Volumens, der, als der Körper im Gleichgewicht sich befand, untergetaucht war, eingenommenen

Lagen. Dieselben Punkte sollen im Gleichgewichtszustande des Körpers sich in G', E' befunden haben. Diese vier Punkte sind

Fig. 66.



sämmtlich auf die Ebene der Zeichnung projicirt, von der wir voraussetzen, dass sie durch den Trägheitsmittelpunkt J der Schwimmebene geht. Die Resultante der Wirkung der Schwerkraft auf den verschobenen Körper ist sein Gewicht W, welches durch G nach unten wirkt. Die Resultante des Flüssigkeitsdrucks auf den verschobenen Körper ist eine durch E nach oben hin wirkende Kraft W, vermehrt um einen (aufwärts gerichteten) Betrag, der daher rührt, dass jetzt der keilförmige Theil AJA' auch untergetaucht ist, und vermindert um einen (abwärts gerichteten) Betrag, der daher rührt, dass der keilförmige Theil BJB' jetzt aus der Flüssigkeit herausgetreten ist. Die Gesammtwirkung der Schwere und des Flüssigkeitsdrucks auf den verschobenen Körper besteht also aus dem Kräftepaar, dessen Kräfte vertical nach oben und nach unten hin durch G und E wirken, und aus der für die keilförmigen Theile erforderten Correction. Letztere besteht aus einer Kraft, welche vertical nach oben durch den Schwerpunkt von $A'JA$ und

einer zweiten Kraft, welche durch den Schwerpunkt von BJB' vertical nach unten wirkt. Diese Kräfte sind gleich [§ 763 (1)] und machen daher ein Kräftepaar aus, welches [§ 763 (2)] die Axe der Verschiebung zur Axe hat, und dessen Moment [§ 763 (3)] gleich $\vartheta w k^2 A$ ist, wenn A die Fläche der Schwimmebene und k der Gyrationsradius derselben (§ 281) in Beziehung auf die in Rede stehende Hauptaxe ist. Da aber die Linien GE, welche in der Gleichgewichtslage vertical ($G'E'$) war, in dem verschobenen Körper mit der Verticalen den unendlich kleinen Winkel ϑ bildet, so hat das Paar, dessen Kräfte W in den durch G und E gehenden Verticallinien wirken, das Moment $Wh\vartheta$, wenn h die Linie GE bezeichnet; dieses Kräftepaar liegt in einer zur Axe senkrechten Ebene und ist so gerichtet, dass es die Verschiebung zu vergrössern strebt, wenn sich G über E befindet. Folglich ist die Resultante der Wirkung der Schwere und des Flüssigkeitsdrucks auf den verschobenen Körper ein Kräftepaar, welches das Moment

$$(wAk^2 - Wh)\vartheta \text{ oder } w(Ak^2 - Vh)\vartheta$$

hat, wenn V das eingetauchte Volumen ist. Daraus geht hervor, dass, soweit diese Verschiebung allein in Betracht kommt, das Gleichgewicht stabil ist, wenn man $Ak^2 > Vh$ hat.

Da ferner das Kräftepaar, gegen welches bei der Erzeugung der Verschiebung Arbeit geleistet wird, von Null an einfach proportional dem Verschiebungswinkel zunimmt, so ist sein Mittelwerth die Hälfte des oben angegebenen Betrages; der Gesammtbetrag der geleisteten Arbeit ist folglich gleich

$$\tfrac{1}{2} w\,(Ak^2 - Vh)\vartheta^2.$$

767. Allgemeine Verschiebung. — Wenn wir jetzt eine Verschiebung betrachten, welche aus einer (abwärts gerichteten) verticalen Verschiebung z und Rotationen durch die unendlich kleinen Winkel ϑ, ϑ' um die beiden horizontalen Hauptaxen der Schwimmebene besteht, so sehen wir (§§ 765, 766), dass die zu ihrer Hervorbringung erforderte Arbeit gleich

$$\tfrac{1}{2} w[Az^2 + (Ak^2 - Vh)\vartheta^2 + (Ak'^2 - Vh)\vartheta'^2]$$

ist; daraus schliessen wir, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die vollkommene Stabilität des Gleichgewichts in Betreff aller möglichen Verschiebungen dieser Art folgende sind: —

$$h < \frac{Ak^2}{V} \text{ und } h < \frac{Ak'^2}{V}.$$

768. Das Metacentrum. Bedingungen seines Vorhandenseins. — Wenn die Verschiebung um irgend eine durch den Trägheitsmittelpunkt der Schwimmebene gehende Axe erfolgt, so ist die Resultante der Flüssigkeitsdruckkräfte gleich dem Gewicht des Körpers; diese Resultante liegt aber nur dann in der Ebene der Verschiebung, wenn die Axe eine Hauptaxe der Schwimmebene ist. In einem solchen Falle heisst der Durchschnittspunkt der Resultante mit der durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden, vor der Verschiebung verticalen Linie das Metacentrum. Aus den obigen Entwicklungen erhellt, dass die Bedingung des stabilen Gleichgewichts für jede dieser Verschiebungsebenen die ist, dass das Metacentrum über dem Schwerpunkte liege.

769. Die analytische Behandlung sphäroidaler Formen, mit der wir diesen Band schliessen werden, ist nur dann für hydrodynamische Probleme geeignet oder praktisch brauchbar, wenn die Abweichungen von der sphärischen Symmetrie unendlich klein oder doch so klein sind, dass wir die Quadrate der Excentricitäten (§ 801) vernachlässigen dürfen, oder, was dasselbe ist, dass wir das Princip der Superposition der störenden Kräfte und der durch dieselben erzeugten Abweichungen ohne jede Beschränkung zulassen können. Wir werden aber zuerst einen Fall betrachten, welcher eine sehr einfache synthetische Lösung gestattet, ohne uns die Beschränkung der Annäherung an die Kugelgestalt aufzuerlegen, und für welchen Newton und Maclaurin den folgenden bemerkenswerthen Satz entdeckt haben: —

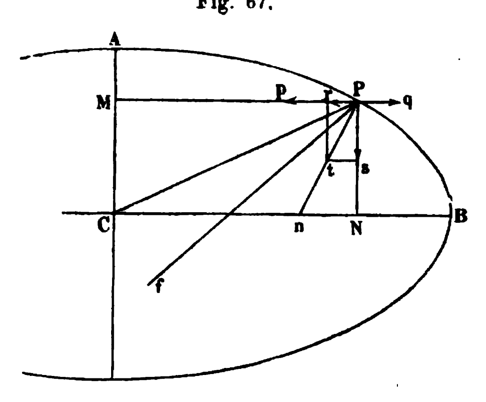
770. Ein homogenes Ellipsoid ist eine Gleichgewichtsfigur einer rotirenden Flüssigkeit. — Die Figur eines abgeplatteten Rotationsellipsoids von beliebig gegebener Excentricität genügt den Bedingungen des Gleichgewichts einer homogenen unzusammendrückbaren Flüssigkeitsmasse, welche mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um eine Axe rotirt, und deren Theile keiner Kraft ausser der Schwere unterworfen sind.

Für eine gegebene Excentricität ist die Winkelgeschwindigkeit unabhängig von der Masse der Flüssigkeit und der Quadratwurzel der Dichtigkeit derselben proportional.

771. Der Beweis dieses Satzes lässt sich leicht aus den schon erhaltenen Resultaten über die Attraction eines Ellipsoids und die Eigenschaften der freien Oberfläche einer Flüssigkeit entnehmen.

Es sei in Fig. 67 APB ein Meridianschnitt eines homogenen abgeplatteten Sphäroids, AC die Polaraxe, CB ein Aequatorialradius und P ein beliebiger Punkt der Oberfläche. Dann wissen

Fig. 67.



wir aus § 522, dass die Attraction des Sphäroids in zwei Theile zerlegt werden kann, von denen der eine, Pp, zur Polaraxe senkrecht ist und wie die Ordinate PM variirt, während der andere, Ps, der Polaraxe parallel ist und wie PN variirt. Diese Componenten sind nicht gleich, wenn MP und PN gleich sind; denn sonst würde die Resultante der Attraction in allen Punkten in der Oberfläche durch C gehen, während wir wissen, dass sie eine Richtung wie etwa Pf hat, welche den Radius BC zwischen B und C in einem Punkte schneidet, der näher an C liegt, als der Fusspunkt n der in P gelegten Normale. Es sei jetzt

$$Pp = \alpha . PM$$

und

$$Ps = \beta . PN,$$

wo α und β bekannte Constanten sind, die bloss von der Dichtigkeit (ϱ) und der Excentricität (e) des Sphäroids abhängen.

Ferner wissen wir aus der Geometrie, dass

$$Nn = (1 - e^2)\, CN$$

ist.

Um jetzt die Grösse einer zur Axe des Sphäroids senkrechten Kraft Pq zu finden, welche, verbunden mit der Attraction, die resultirende Kraft in die Richtung der Normalen Pn bringt, machen wir $pr = Pq$; dann ist

$$\frac{Pr}{Ps} = \frac{Nn}{PN} = (1 - e^2)\frac{CN}{PN} = (1 - e^2)\frac{\beta . Pp}{\alpha . Ps},$$

folglich

$$Pr = (1 - e^2)\,\frac{\beta}{\alpha}\,Pp$$

$$Pp - Pq = (1 - e^2)\,\frac{\beta}{\alpha}\,Pp,$$

oder

$$Pq = \left(1 - (1 - e^2)\,\frac{\beta}{\alpha}\right) Pp$$
$$= \left(\alpha - (1 - e^2)\,\beta\right) PM.$$

Wenn wir jetzt das Sphäroid mit der Winkelgeschwindigkeit ω um AC rotiren liessen, so würde die Centrifugalkraft (§§ 32, 35a, 259) die Richtung Pq haben und von der Grösse

$$\omega^2 . PM$$

sein. Wenn wir also

$$\omega^2 = \alpha - (1 - e^2)\,\beta$$

machen, so hat die auf P wirkende Gesammtkraft, d. i. die Resultante der Attraction und der Centrifugalkraft, die Richtung der Normalen an die Oberfläche, was die Bedingung für die freie Oberfläche einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeitsmasse ist.

Nun ist nach § 522

$$\alpha = 2\pi\varrho\left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3}\,\arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2}\right),$$

$$\beta = 4\pi\varrho\left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3}\,\arcsin e\right),$$

folglich

$$\omega^2 = 2\pi\varrho\left\{\frac{(3 - 2e^2)\sqrt{1 - e^2}}{e^3}\,\arcsin e - 3\,\frac{1 - e^2}{e^2}\right\}. \tag{1}$$

Diese Formel bestimmt die Winkelgeschwindigkeit und beweist, dass dieselbe proportional $\sqrt{\varrho}$ ist.

772. Wenn wir nach Laplace statt e eine durch die Gleichung

$$\begin{cases} 1 - e^2 = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2} \\[2ex] \text{oder}\quad \varepsilon = \dfrac{e}{\sqrt{1 - e^2}} = \tan\,(\arcsin e) \end{cases} \tag{2}$$

definirte Grösse ε einführen, so wird der Ausdruck (1) für ω^2 bedeutend vereinfacht, und man erhält

$$(3)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{3+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\,\operatorname{arctan}\varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}.$$

Wenn e und daher auch ε klein ist, so lässt sich dieser Ausdruck leicht berechnen mittels der Formel

$$(4)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{4}{15}\varepsilon^2 - \frac{8}{35}\varepsilon^4 + \ldots,$$

deren erstes Glied genügt, wenn es sich um ein Sphäroid von so geringer Abplattung wie die Erde handelt.

Mittels dieser vereinfachten Formeln ist die nachstehende Tabelle berechnet worden. Die beiden letzten Columnen werden einige Paragraphen später erklärt werden.

i.	ii.	iii.	iv.	v.
$e.$	$\frac{1}{\varepsilon}.$	$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}.$	$\frac{2\pi}{\omega}$, wenn $\varrho = 3{\cdot}68 \times 10^{-7}$	$(1+\varepsilon^2)^{2/3}\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}.$
0·1	9·950	0·0027	79,966	0·0027
2	4·899	0107	39,397	0110
3	3·180	0243	26,495	0258
4	2·291	0436	19,780	0490
5	1·732	0690	15,730	0836
6	1·333	1007	13,022	1356
7	1·020	1387	11,096	2172
8	0·750	1816	9,697	3588
9	4843	2203	8,804	6665
91	4556	2225	8,759	7198
92	4260	2241	8,729	7813
93	3952	2247	8,718	8533
94	3629	2239	8,732	9393
95	3287	2213	8,783	1·045
96	2917	2160	8,891	1·179
97	2506	2063	9,098	1·359
98	2030	1890	9,504	1·627
99	1425	1551	10,490	2·113
1·00	0·0000	0·0000	∞	∞

Wir sehen daraus, dass der Werth von $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ allmälig von Null zu einem Maximalwerthe zunimmt, wenn die Excentricität e von Null

bis ungefähr 0·93 wächst; darauf nimmt der Werth von $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$ wieder bis Null ab (und zwar schneller, als er vorher gewachsen war), wenn die Excentricität von 0·93 bis 1 zunimmt. Die diesem Maximum entsprechenden Werthe der übrigen Grössen sind in der Tabelle gegeben.

773. Wenn die Winkelgeschwindigkeit den aus der Formel

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = 0{\cdot}2247, \tag{5}$$

in welcher für ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit zu substituiren ist, berechneten Werth übertrifft, so ist das Gleichgewicht in der Form eines Rotationsellipsoids unmöglich. Wenn die Winkelgeschwindigkeit kleiner als der so berechnete Grenzwerth ist, so gibt es immer zwei Rotationsellipsoide, welche den Bedingungen des Gleichgewichts genügen. In dem einen dieser Ellipsoide ist die Excentricität grösser, in dem andern kleiner als 0·93.

774. Mittlere Dichtigkeit der Erde, ausgedrückt in Attractionseinheiten. — Für besondere Anwendungen kann es von Nutzen sein, kurz anzugeben, wie ϱ in diesen Formeln gemessen wird. In den Definitionen der §§ 459, 460, auf welche die Formeln über die Attraction basirt sind, wird die Masseneinheit als die Masse definirt, welche auf eine in der Entfernung Eins befindliche gleich grosse Masse die Einheit der Kraft ausübt, und die Einheit der Dichtigkeit im Raum ist die Dichtigkeit eines Körpers, welcher in der Einheit des Volumens die Masse Eins hat. Wenn wir also den (engl.) Fuss als Längeneinheit annehmen, so erhalten wir für die Attraction, welche die Erde auf einen an ihrer Oberfläche befindlichen Massenpunkt Eins ausübt,

$$\frac{{}^4/_3\,\pi\sigma R^3}{R^2} = {}^4/_3\,\pi\sigma R = 32{\cdot}2;$$

darin bezeichnet R den in (engl.) Fuss ausgedrückten Erdradius [die Erde wird als Kugel angesehen] und σ die durch die eben definirte Einheit ausgedrückte mittlere Dichtigkeit der Erde.

Wird 20,900,000 (engl.) Fuss als der Werth von R angenommen, so ergibt sich

$$\sigma = 0{\cdot}000000368 = 3{\cdot}68 \times 10^{-7}. \tag{6}$$

Da die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 5·5 mal so gross als

die des Wassers ist (§ 479), so ist die Dichtigkeit des Wassers, ausgedrückt durch unsere jetzige Einheit,

$$\frac{3{\cdot}68}{5{\cdot}5}\,10^{-7} = 6{\cdot}7 \times 10^{-8}.$$

775. Rotationsdauer eines Sphäroids von gegebener Excentricität. — Die vierte Columne der obigen Tabelle gibt die jedem Werthe der Excentricität entsprechende Rotationsdauer in Secunden an; es ist dabei ϱ gleich der mittleren Dichtigkeit der Erde angenommen. Für eine Wassermasse müssen diese Zahlen mit $\sqrt{5{\cdot}5}$ multiplicirt werden, da die Rotationsdauer, wenn dieselbe Figur entstehen soll, der Quadratwurzel der Dichtigkeit umgekehrt proportional sein muss.

Für eine homogene flüssige Masse von der mittleren Dichtigkeit der Erde, welche in $23^h\ 56^m\ 4^s$ eine Rotation vollendet, erhalten wir $e = 0{\cdot}093$, was ungefähr einer Ellipticität $\frac{1}{230}$ entspricht.

776. Die Masse und das Moment der Bewegungsgrösse einer Flüssigkeit sind gegeben. — Eine gleichfalls von Laplace behandelte interessante Form dieses Problems ist die, in welcher das Moment der Bewegungsgrösse und die Masse der Flüssigkeit, nicht aber die Winkelgeschwindigkeit gegeben sind und die Excentricität des entsprechenden Rotationsellipsoids ermittelt werden soll, welches, wie sich ergibt, eindeutig bestimmt ist.

Es leuchtet ein, dass eine in irgend einem Bewegungszustande sich selbst überlassene Masse einer gewöhnlichen Flüssigkeit (nicht nur eine vollkommene Flüssigkeit, § 742) das Moment ihrer Bewegungsgrösse (§ 235) unverändert bewahren muss. Aber die Zähigkeit oder die innere Reibung (§ 742) wird, wenn die Masse continuirlich bleibt, zuletzt jede relative Bewegung der Theilchen gegen einander zerstören, so dass die Flüssigkeit zuletzt wie ein starrer fester Körper rotirt. Wenn die Endform ein Rotationsellipsoid ist, so können wir leicht zeigen, dass die Excentricität desselben einen einzigen bestimmten Werth hat. Da aber bisher noch nicht entdeckt worden ist, ob es nicht noch eine andere mit einem stabilen Gleichgewicht verträgliche Form gibt, so wissen wir nicht, dass die Masse nothwendig die Form dieses besonderen Ellipsoids annimmt. Ebensowenig wissen wir sogar, ob das Rotationsellipsoid nicht vielleicht eine instabile Form wird, wenn das Moment der

Bewegungsgrösse eine von der Masse der Flüssigkeit abhängige Grenze überschreitet. Wir werden im zweiten Bande zu diesem Gegenstande zurückkehren, da er ein vortreffliches Beispiel der schwierigen und grosse Vorsicht erfordernden Frage nach der **kinetischen Stabilität** (§ 346) liefert.

Wenn wir mit a den äquatorialen Halbmesser, mit e die Excentricität des Ellipsoids und mit ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnen, mit welcher dasselbe rotirt, so sind die **gegebenen** Grössen die Masse

$$M = \frac{4}{3}\pi\varrho a^3\sqrt{1-e^2}$$

und das Moment der Bewegungsgrösse

$$A = \frac{8}{15}\pi\varrho\omega a^5\sqrt{1-e^2}.$$

In Verbindung mit (2) bestimmen diese Gleichungen die drei Grössen a, e und ω.

Wird aus den beiden letzten Gleichungen a eliminirt und wie oben e durch ε ausgedrückt, so erhalten wir

$$\frac{A^2}{M^{10/3}} = \frac{3}{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}\frac{\omega^2(1+\varepsilon^2)^{2/3}}{(\pi\varrho)^{4/3}}.$$

Dies liefert

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho} = \frac{k}{(1+\varepsilon^2)^{2/3}},$$

wo k ein bestimmtes Vielfache von $\varrho^{1/3}$ ist. Durch Einsetzung dieses Werthes in § 772 (3) erhält man

$$k = (1+\varepsilon^2)^{2/3}\left(\frac{3+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\,arctan\,\varepsilon - \frac{3}{\varepsilon^2}\right).$$

Nun zeigt die letzte Columne der Tabelle des § 772, dass der Werth dieser Function von ε (welche zugleich mit ε verschwindet) beständig mit ε zunimmt und unendlich gross wird, wenn ε unendlich gross wird. Es gibt folglich immer einen und nur einen Werth von ε und daher auch von e, welcher den Bedingungen des Problems genügt.

777. Alle obigen Resultate hätten wir ohne grosse Mühe durch eine Discussion der Gleichungen analytisch herleiten können; wir haben aber dieses Mal vorgezogen, an einem realen Falle zu zeigen, dass die numerische Berechnung zuweilen von grossem Nutzen sein kann.

778. Gleichgewichts-Ellipsoid mit drei ungleichen Axen. — Noch Niemand scheint versucht zu haben, das allgemeine Problem zu lösen: Alle Gleichgewichtsformen zu ermitteln, welche eine homogene unzusammendrückbare Flüssigkeitsmasse, die mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit rotirt, annehmen kann. Wofern nicht die Geschwindigkeit so klein ist, dass die Gestalt, welche die Flüssigkeit annimmt, sich nur wenig von einer Kugel unterscheidet (welcher Fall später sorgfältig behandelt werden soll), bietet das Problem ganz ungemeine Schwierigkeiten dar. Es ist deshalb von einiger Wichtigkeit, durch ein synthetisches Verfahren zu zeigen, dass ausser dem Rotationsellipsoid noch eine andere Form, nämlich ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen, von denen die kleinste die Axe der Rotation ist, mit dem Gleichgewicht verträglich ist. Dieser merkwürdige Satz ist 1834 von Jacobi entdeckt worden und scheint von demselben, so einfach er ist, als eine Herausforderung an die französischen Mathematiker*) ausgesprochen zu sein. Der Beweis, den wir folgen lassen, stimmt im Wesentlichen mit dem von Archibald Smith**) gegebenen überein.

Nach § 522 sind die Componenten der Attraction eines homogenen Ellipsoides mit den Halbaxen a, b, c auf einen Punkt ξ, η, ζ seiner Oberfläche

$$\frac{3}{2} M\xi \int_0^\infty \frac{d\psi}{(a^2+\psi)\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}}, \text{ u. s. w.:}$$

wir wollen dieselben für jetzt $A\xi$, $B\eta$, $C\zeta$ nennen.

Wenn das Ellipsoid mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe der ζ rotirt, so sind die Componenten der Centrifugalkraft

$$\omega^2\xi,\ \omega^2\eta,\ 0.$$

Folglich sind die Componenten der aus der Schwere und der Centrifugalkraft für den in ξ, η, ζ befindlichen Massenpunkt resultirenden Gesammtkraft

$$(A-\omega^2)\xi,\ (B-\omega^2)\eta,\ C\zeta.$$

Es sind aber die Richtungscosinus der im Punkte ξ, η, ζ an die Oberfläche des Ellipsoides gelegten Normale den Grössen

$$\frac{\xi}{a^2},\ \frac{\eta}{b^2},\ \frac{\zeta}{c^2}$$

proportional, und im Falle des Gleichgewichts muss die resultirende Kraft zur freien Oberfläche senkrecht sein. Mithin ist

---

*) Siehe eine Note von Liouville, *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XXIII, Anmerkung zu p. 290.

**) *Cambridge Math. Journal*, Feb. 1838.

(1) $$a^2(A - \omega^2) = b^2(B - \omega^2) = c^2 C.$$

Diese Gleichungen liefern

(2) $$\omega^2 = \frac{a^2 A - c^2 C}{a^2} = \frac{b^2 B - c^2 C}{b^2}.$$

Wir haben nun erstens zu zeigen, dass sich für beliebig gegebene Werthe von a und b ein Werth von c angeben lässt, welcher diese Werthe von ω^2 gleich macht. Dann muss gezeigt werden, dass der so gefundene Werth von ω^2 positiv ist, also einen reellen Werth von ω liefert. Setzen wir, wie in § 522,

(3) $$\Phi = \int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)(c^2 + \psi)}},$$

so erhalten wir

(4) $$A = -\frac{3}{2} M \frac{d\Phi}{d(a^2)}, \quad B = -\frac{3}{2} M \frac{d\Phi}{d(b^2)}, \quad C = -\frac{3}{2} M \frac{d\Phi}{d(c^2)}.$$

Werden diese Werthe in (2) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{d(a^2)} - \frac{d\Phi}{d(b^2)} = c^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \frac{d\Phi}{d(c^2)},$$

oder

(5) $$0 = (a^2 - b^2) \int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)(c^2 + \psi)}} \left\{ -\frac{1}{(a^2 + \psi)(b^2 + \psi)} + \frac{c^2}{a^2 b^2} \frac{1}{c^2 + \psi} \right\}.$$

$a^2 = b^2$ liefert das schon behandelte Rotationsellipsoid. Die Gleichung kann aber auch befriedigt werden, ohne dass man $a^2 = b^2$ annimmt; denn der eingeklammerte Factor unter dem Integralzeichen kann in der Form

$$\frac{(c^2 a^2 + c^2 b^2 - a^2 b^2)\psi + c^2 \psi^2}{a^2 b^2 (a^2 + \psi)(b^2 + \psi)(c^2 + \psi)}$$

geschrieben werden, und in diesem Ausdruck kann nur der Zähler sein Vorzeichen ändern. Wenn nun c grösser als die grösste der beiden Zahlen a und b ist, so ist das Integral positiv; wenn c sehr klein ist, so ist dasselbe offenbar negativ. Man kann also dadurch, dass man c einen passenden Werth gibt, für ganz beliebige endliche Werthe von a und b bewirken, dass das Integral gleich Null werde. Bei diesem Werthe von c enthält das Integral einen gleichen Betrag an positiven und negativen Elementen. Dasselbe kann aber keine negativen Elemente enthalten, ausser wenn $c^2 a^2 + c^2 b^2 - a^2 b^2$ negativ, d. h. c kleiner als die kleinste der Grössen a, b ist.

Endlich erhält man aus (2) und (4)

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{M}{a^2}\left\{c^2 \frac{d\Phi}{d(c^2)} - a^2 \frac{d\Phi}{d(a^2)}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{M}{a^2}\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)(c^2+\psi)}}\,\frac{(a^2-c^2)\psi}{(a^2+\psi)(c^2+\psi)};$$

da, wie wir gezeigt haben, c kleiner als a ist, so ist dieser Ausdruck positiv; derselbe liefert, wenn c aus (5) bestimmt worden ist, die gesuchte Winkelgeschwindigkeit.

779. Excurs über harmonische Kugelfunctionen. Das harmonische Sphäroid. — Einige erläuternde Worte und graphische Illustrationen der Natur der harmonischen Flächenfunctionen werden zum Verständniss nicht nur des Potentials und der hydrostatischen Anwendungen der Laplace'schen Entwicklung, die uns alsbald beschäftigen wird, sondern auch der viel wichtigeren Anwendungen beitragen, die im zweiten Bande bei der Behandlung der Wellen und der Vibrationen in kugelförmigen Flüssigkeiten oder elastischen festen Massen zu machen sind. Um Umschreibungen zu vermeiden, werden wir mit dem Ausdruck „harmonisches Sphäroid" eine Fläche bezeichnen, deren Radius sich in jedem Punkte von dem einer Kugel durch eine unendlich kleine Länge unterscheidet, welche wie der Werth einer harmonischen Flächenfunction der Lage dieses Punktes auf der Kugelfläche variirt. Die Definitionen der räumlichen harmonischen Kugelfunctionen und der harmonischen Flächenfunctionen [Zusatz B (a), (b), (c)] zeigen, dass das harmonische Sphäroid zweiter Ordnung eine Oberfläche zweiten Grades ist, welche nur der Bedingung unterworfen ist, annähernd kugelförmig zu sein, d. h. dasselbe kann ein beliebiges elliptisches Sphäroid (oder Ellipsoid mit annähernd gleichen Axen) sein. Allgemein ist ein harmonisches Sphäroid von einer beliebigen Ordnung $n > 2$ eine Oberfläche vom algebraischen Grade n, welche annähernd kugelförmig, aber auch noch anderen Beschränkungen unterworfen ist.

Es sei S_n eine harmonische Flächenfunction $n$ter Ordnung, in welcher der Coefficient des Hauptgliedes so gewählt ist, dass das grösste Maximum der Function den Werth Eins habe. Ist dann a der Radius der mittleren Kugel und c die grösste Abweichung von demselben, so ist die Polargleichung eines harmonischen Sphäroids $n$ter Ordnung

(1) $$r = a + cS_n,$$

wenn S_n als eine Function der polaren Winkel-Coordinaten ϑ, φ angesehen wird. Wenn wir berücksichtigen, dass $\frac{c}{a}$ unendlich klein ist, so können wir diese Gleichung auf eine Gleichung $n$ten Grades in rechtwinkligen

Coordinaten reduciren, und zwar auf folgende Weise: — Wird jedes Glied von (1) aufs Quadrat erhoben und $\frac{c}{a}$ durch die um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung davon verschiedene Grösse $\frac{c r^n}{a^{n+1}}$ ersetzt, so erhalten wir

$$r^2 = a^2 + \frac{2c}{a^{n-1}} \cdot r^n S_n. \tag{2}$$

Diese Gleichung, auf rechtwinklige Coordinaten reducirt, ist vom algebraischen Grade n.

780. Harmonischer Knotenkegel und Knotenlinie. — Die Verbindungslinie der Punkte des harmonischen Sphäroids, welche auf der mittleren Kugelfläche liegen, heisst die Knotenlinie des harmonischen Sphäroids. Es ist dies die Linie, in welcher die Kugelfläche von dem harmonischen Knotenkegel — einem bestimmten Kegel, dessen Scheitel im Mittelpunkt der Kugel liegt, und dessen algebraischer Grad gleich der Ordnung der harmonischen Function ist — geschnitten wird. Eine wichtige Eigenschaft der harmonischen Knotenlinie, zu welcher ein von Rankine*) gefundener interessanter hydrodynamischer Satz geführt hat, besteht darin, dass, wenn diese Linie in einem oder in mehreren Punkten sich selbst schneidet, ihre verschiedenen Zweige um jeden Schnittpunkt herum gleiche Winkel mit einander bilden.

Wenn wir die Function $r^n S_n$ des § 779 mit V_n bezeichnen, so erhalten wir als Gleichung der harmonischen Knotenlinie

$$V_n = 0. \tag{3}$$

Da [Zusatz B (a)] V_n eine homogene Function $n$ten Grades ist, so können wir

$$V_n = H_0 z^n + H_1 z^{n-1} + H_2 z^{n-2} + H_3 z^{n-3} + \text{u. s. w.} \tag{4}$$

schreiben, wo H_0 eine Constante ist, während H_1, H_2, H_3, u. s. w. ganze homogene Functionen von x, y bezeichnen, deren Grade beziehungsweise 1, 2, 3, u. s. w. sind. Dann liefert die Bedingung $\nabla^2 V_n = 0$ [Zusatz B (a)]

$$\begin{cases} \nabla^2 H_2 + n(n-1) H_0 = 0, \nabla^2 H_3 + (n-1)(n-2) H_1 = 0, \\ \qquad \nabla^2 H_s + (n-s+2)(n-s+1) H_{s-2} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

wodurch alle Bedingungen ausgedrückt sind, denen H_0, H_1, H_2, u. s. w. genügen müssen.

Nun wollen wir voraussetzen, der Knotenkegel schnitte sich selbst, und der Kürze und Einfachheit wegen möge OZ längs einer Schnittlinie

*) „Summary of the Properties of certain Stream-Lines." Phil. Mag., Oct. 1864.

angenommen werden; dann macht die Annahme $z = a$ die Gleichung (3) zur Gleichung einer Curve, welche in der in einem Doppelpunkte oder vielfachen Punkte der Knotenlinie an die Kugelfläche gelegten Tangentialebene liegt und zwei oder alle Zweige der Knotenlinie in diesem Punkte berührt. Die Bedingung, dass die Curve in der Tangentialebene einen mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfallenden Doppelpunkt oder vielfachen Punkt habe, ist, wenn (4) für V_n gesetzt wird,

$$H_0 = 0 \text{ und, für alle Werthe von } x, y, H_1 = 0.$$

Folglich liefert (5)

$$\nabla^2 H_2 = 0,$$

so dass wir, wenn

$$H_2 = Ax^2 + By^2 + 2Cxy$$

ist,

$$A + B = 0$$

erhalten. Dies zeigt, dass die beiden Zweige einander unter rechten Winkeln schneiden.

Wenn der Anfangspunkt ein 3facher, oder ein $n$facher Punkt ist, so muss

$$H_0 = 0,\ H_1 = 0,\ \ldots,\ H_{n-1} = 0$$

sein, und (5) liefert

$$\nabla^2 H_n = 0.$$

Folglich ist [§ 707 (23)]

$$H_n = A\left\{(x + y\sqrt{-1})^n + (x - y\sqrt{-1})^n\right\}$$
$$+ B\sqrt{-1}\left\{(x + y\sqrt{-1})^n - (x - y\sqrt{-1})^n\right\},$$

oder, wenn $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$ gesetzt wird,

$$H_n = 2\varrho^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi),$$

woraus ersichtlich ist, dass die n Zweige einander im Coordinatenanfangspunkt unter gleichen Winkeln schneiden.

781. Fälle, in welchen räumliche harmonische Functionen in Factoren zerlegbar sind. Zonale und sectoriale harmonische Functionen. — In sehr vielen Fällen kann der harmonische Knotenkegel aus anderen Kegeln niedrigerer Grade bestehen [V_n ist dann in Factoren zerlegbar]. So hat (es ist dies die einzige bisher ausgearbeitete Classe von Fällen) jede der $2n + 1$ harmonischen Elementarfunctionen [wie wir passend die durch (36) oder (37) des Zusatzes B ausgedrückten Functionen nennen können, wenn sie jede nur einen der $2n + 1$ Coefficienten A_s, B_s enthalten] Kreise der Kugelfläche zu Knotenlinien. Diese Kreise sind für jedes solche harmonische Element entweder (1) sämmtlich in parallelen Ebenen (wie Breitekreise auf einem Globus) und theilen die Kugelfläche in Zonen, in welchem Falle die harmonische Function eine zonale genannt wird; oder (2) sie liegen sämmtlich in Ebenen, die durch einen Durchmesser gehen (wie Meridiane auf einem Globus)

und theilen die Oberfläche in gleiche Sectoren, in welchem Falle die harmonische Function eine sectoriale genannt wird; oder (3) einige derselben liegen in parallelen Ebenen, während die übrigen in Ebenen liegen, die durch den zu den ersteren Ebenen senkrechten Durchmesser gehen, so dass sie die Oberfläche in rechteckige Vierseite und (in der Nähe der Pole) dreiseitige Segmente theilen. Solche Flächenstücke werden auf einem Globus durch parallele Breitenkreise und Meridiane begrenzt, die in gleichen Abständen von einander gelegt sind.

Wenn ein gegebener Durchmesser die Axe der Symmetrie ist, so gibt es für vollkommene harmonische Functionen [Zusatz B (c), (d)] nur eine zonale und zwei sectoriale harmonische Functionen jeder Ordnung. Die zonale ist bloss eine Function der Breite $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right.$, nach der Bezeichnung des Zusatzes B$\left.\right)$, nämlich der Ausdruck $\Theta_n^{(0)}$, den man erhält, wenn man in Zusatz B (38) $s = 0$ setzt. Die sectorialen Functionen $n$ter Ordnung, die man aus derselben Formel durch die Annahme $s = n$ erhält, sind

$$\sin^n \vartheta \cos n\varphi, \quad \sin^n \vartheta \sin n\varphi. \tag{1}$$

Die allgemeine harmonische Elementarfunction $n$ter Ordnung, welche aus $\Theta_n^{(s)} \cos s\varphi$ und $\Theta_n^{(s)} \sin s\varphi$ des Zusatzes B (38) erhalten wird, wenn man s einen beliebigen zwischen 0 und n liegenden Werth beilegt, hat zu Knotenlinien $n - s$ Kreise in parallelen Ebenen und s grösste Kreise, welche einander in ihren Polen unter gleichen Winkeln schneiden. Längs des Aequators oder irgend eines Parallelkreises ist die Variation dieser Function vom Maximum zum Minimum eine einfach harmonische Function. Es lässt sich leicht beweisen (der mathematisch gebildete Leser möge dies selbst herleiten), dass für jede harmonische Elementarfunction hoher Ordnung, welche eine grosse Anzahl von Knotenlinien in parallelen Ebenen hat (d. h. für welche $n - s$ eine grosse Zahl ist), das Gesetz der Variation näherungsweise einfach harmonisch ist längs der einem der beiden Pole nicht zu nahe liegenden Strecken jedes Meridians, welche nur eine kleine Anzahl der parallelen Knotenkreise schneiden. Das Gesetz, nach welchem harmonische Elementarfunctionen hoher Ordnungen längs eines Meridians in der Nähe eines Poles variiren, wird im zweiten Bande bei der Betrachtung der Wasserwellen in einem Gefäss mit kreisförmigem Boden und der Vibrationen einer kreisförmigen gespannten Membran sorgfältig untersucht und erläutert werden.

782. **Murphy's analytische Behandlung der zonalen harmonischen Function.** — Die nachstehende einfache und schöne Untersuchung Murphy's*) über die zonale harmonische Function wird dem Freunde der Analysis willkommen sein; wir geben sie aber nur (§ 453), weil sie zu einer nützlichen Formel führt, und weil sich aus dieser letzteren Entwicklungen herleiten lassen, die von allen oben im Zusatz B enthaltenen verschieden sind.

„Prop. I.

„Eine rationale und ganze Function von gegebener Dimension „in Beziehung auf eine beliebige Veränderliche zu finden, welche so „beschaffen ist, dass, wenn man sie mit einer beliebigen rationalen „und ganzen Function niedrigerer Dimension multiplicirt, das „zwischen den Grenzen 0 und 1 genommene Integral des Products „immer verschwindet."

„Es sei $f(t)$ die gesuchte Function, die in Beziehung auf die Veränder- „liche t von der νten Dimension ist; dann erfordert die aufgestellte Bedin- „gung offenbar, dass jede der folgenden Gleichungen einzeln erfüllt sei:

(a) $\int f(t)\,dt = 0,\ \int f(t).t\,dt = 0,\ \int f(t).t^2 dt = 0, \ldots\ldots, \int f(t).t^{\nu-1}dt = 0.$

„darin wird jedes Integral zwischen den gegebenen Grenzen genommen."

„Es möge nun das unbestimmte Integral von $f(t)$, die untere Grenze „$t = 0$ angenommen, durch $f_1(t)$, das unbestimmte Integral von $f_1(t)$ für „dieselbe untere Grenze $t = 0$ durch $f_2(t)$ dargestellt werden, u. s. w.; „dadurch gelangen wir schliesslich zu einer Function $f_\nu(t)$, welche offenbar „von der Dimension 2ν ist. Dann liefert die Methode der partiellen Inte- „gration allgemein

$$\int f(t).t^x dt = t^x f_1(t) - x t^{x-1} f_2(t) + x(x-1)t^{x-2} f_3(t) - \text{u. s. w.}$$

„Setzen wir jetzt $t = 1$ und substituiren für x successive die Werthe „1, 2, 3, ... $(n-1)$, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (a)

(b) $$f_1(t) = 0,\ f_2(t) = 0,\ f_3(t) = 0, \ldots f_n(t) = 0.$$

„Folglich verschwindet die Function $f_n(t)$, sowie ihre $(n-1)$ ersten „Differentialquotienten sowohl für $t = 0$, als auch für $t = 1$, d. h. jede „der Grössen t^n und $(1-t)^n$ ist ein Factor von $f_n(t)$, und da diese Func- „tion von der Dimension $2n$ ist, so lässt sie keinen anderen Factor, mit „Ausnahme einer Constanten c, zu.

„Setzen wir $1 - t = t'$, so erhalten wir also

$$f_n(t) = c.(tt')^n,$$

„folglich

$$f(t) = c\,\frac{d^n(tt')^n}{dt^n}.$$

*) *Treatise on Electricity.* Cambridge, 1833.

„**Zusatz.** — Wenn wir annehmen, $f(t)$ sei nach steigenden Potenzen „von t geordnet und das erste Glied sei Eins, so erhalten wir offenbar

$$c = \frac{1}{1.2.3\ldots n};$$

„unter dieser Voraussetzung wollen wir die obige Grösse mit Q_n bezeichnen.

„Prop. II.

„Die in der vorhergehenden Aufgabe bestimmte Function Q_n „stimmt mit dem Coefficienten von e^n in der Entwicklung der Grösse

$$\{1 - 2e.(1 - 2t) + e^2\}^{-1/2}$$

„überein.

„Es sei u eine Grösse, welche der Gleichung

$$u = t + e.u\,(1 - u) \tag{c}$$

„genügt, d. h.

$$u = -\frac{1-e}{2e} + \frac{1}{2e}\left\{1 - 2e\,(1 - 2t) + e^2\right\}^{1/2},$$

„folglich

$$\frac{du}{dt} = \left\{1 - 2e\,(1 - 2t) + e^2\right\}^{-1/2}.$$

„Wenn wir aber, wie vorher, t' für $1 - t$ schreiben und den Lagrange'- „schen Satz auf die Gleichung (c) anwenden, so erhalten wir

$$u = t + e..tt' + \frac{e^2}{1.2}\frac{d(tt')^2}{dt} + \frac{e^3}{1.2.3}\frac{d^2(tt')^3}{dt^2} + \text{u. s. w.}$$

„Wird dieser Ausdruck differentiirt und $\frac{d^n(tt')^n}{dt^n}$ durch seinen in Prop. I „erhaltenen Werth $1.2.3\ldots n\,Q_n$ ersetzt, so folgt

$$\frac{du}{dt} = 1 + Q_1 e + Q_2 e^2 + Q_3 e^3 + \text{u. s. w.}$$

„Der Vergleich dieses Resultats mit dem obigen Werthe von $\frac{du}{dt}$ lehrt die „Richtigkeit des vorliegenden Satzes.

„Prop. V.

„Die Function Q_n in eine Reihe zu entwickeln.

„*Erste Entwicklung.* — Nach Prop. I haben wir

$$Q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n(tt')^n}{dt^n},$$

„folglich ist

$$Q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{dt^n}\left\{t^n - n\,t^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,t^{n+2} - \text{u. s. w.}\right\},$$

„d. h.

(e) $Q_n = 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{1} \cdot t + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} t^2 -$ u. s. w.

„*Zweite Entwicklung.* — Wenn u und v Functionen einer beliebigen „Veränderlichen t sind, so liefert der Leibnitz'sche Satz die Identität

$$\frac{d^n(uv)}{dt^n} = v\frac{d^n u}{dt^n} + n\frac{dv}{dt}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2 v}{dt^2}\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} + \text{u. s. w.}$$

„Setzen wir hierin $u = t^n$, $v = t'^n$ und dividiren durch $1.2.3\ldots n$, so „erhalten wir

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} Q_n = t'^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2 t'^{n-1}t + \left\{\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}^2 t'^{n-2}t^2 \\ \quad - \left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\}^2 t'^{n-3}t^3 + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

„*Dritte Entwicklung.* — Wir setzen $1 - 2t = \mu$, folglich $tt' =$ „$\frac{1-\mu^2}{2^2}$; dann ist

$$Q_n = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n(\mu^2-1)^n}{d\mu^n}$$

$$= \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{d^n}{d\mu^n} \cdot \left\{\mu^{2n} - n\mu^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \mu^{2n-4} - \text{u. s. w.}\right\},$$

„oder endlich

$$\text{(g)} \quad \begin{cases} Q_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \left\{\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot \mu^{n-2} \right. \\ \qquad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cdot \mu^{n-4} - \text{u. s. w.}\right\}. \end{cases}$$

Den Zusammenhang zwischen den Grössen t, t' und μ der Murphy'schen Bezeichnung und der von uns oben benutzten Grösse ϑ drücken folgende Gleichungen aus: —

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} t = \left(2 \sin\frac{1}{2}\vartheta\right)^2, \; t' = \left(2\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)^2 \\ \mu = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Auch ist es gut, sich aus Zusatz B (v'), (38), (40) und (42) ins Gedächtniss zurückzurufen, dass für $\vartheta = 0$ der Werth von Q_n [oder $\mathfrak{d}_n^{(0)}$ des Zusatzes B (60)] die Einheit ist, und dass Q_n mit der Grösse $\Theta_n^{(s)}$, womit wir hier die harmonischen Functionen-Elemente bezeichnen, in folgendem Zusammenhange steht: —

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{d}_n^{(0)} = Q_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\,\Theta_n^{(0)},$$

was auch dadurch bewiesen werden kann, dass man (g) mit Zusatz B (38) vergleicht. Wir fügen noch die folgende Formel hinzu, welche aus (38) unmittelbar hervorgeht und zeigt, wie $\Theta_n^{(s)}$ sich aus $\Theta_n^{(0)}$ herleiten lässt, was schon deshalb von Nutzen ist, weil es beweist, dass die $n - s$ Wurzeln von $\Theta_n^{(s)} = 0$ sämmtlich reell und ungleich sind, insofern nach Zusatz B (μ'

die n Wurzeln der Gleichung $\Theta_n^{(0)} = 0$ sämmtlich reell und ungleich sind: —

$$4) \qquad \frac{\Theta_n^{(s)}}{\sin\vartheta} = \frac{1}{n-s+1}\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\Theta_n^{(s-1)}}{\sin^{s-1}\vartheta}\right].$$

Hieraus und aus (3) erhalten wir

$$5) \qquad \Theta_n^{(s)} = \frac{1.2.3\ldots(n-s)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sin^s\vartheta\frac{d^s Q_n}{d\mu^s}.$$

Endlich mögen mit Bezug auf Zusatz B (w)

$$Q_n' \text{ und } Q_n\,[\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')]$$

das bezeichnen, was aus Q_n wird, wenn man $\cos\vartheta$ beziehungsweise durch $\cos\vartheta'$ und $\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$ ersetzt, und es werde $\cos\vartheta$ mit μ, sowie $\cos\vartheta'$ mit μ' bezeichnet. Dann können wir nach dem Vorhergehenden die Formel (60) des Zusatzes B auf die folgende mit der von Murphy (*Electricity*, p. 24) gegebenen übereinstimmende passendere Form bringen: —

$$6) \qquad \begin{cases} Q_n[\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')] \\ = Q_n Q_n' + 2\left\{\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{n(n+1)}\sin\vartheta\sin\vartheta'\frac{dQ_n}{d\mu}\frac{dQ_n'}{d\mu}\right. \\ \left. + \frac{\cos 2(\varphi-\varphi')}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sin^2\vartheta\sin^2\vartheta'\frac{d^2Q_n}{d\mu^2}\frac{d^2Q_n'}{d\mu^2} + \text{u.s.w.}\right\}. \end{cases}$$

783. Physikalische Probleme, welche rechteckige oder kreisförmige ebene Platten betreffen. — In einem Grenzfalle der Theorie der harmonischen Kugelfunctionen werden die harmonischen Elementarfunctionen, sowohl bei Anwendung von Polarcoordinaten, wie von geradlinigen rechtwinkligen Coordinaten, die geeigneten harmonischen Functionen für die Behandlung von Problemen, in welchen wir statt einer Kugelfläche oder zweier concentrischen Kugelflächen eine Ebene oder zwei parallele Ebenen haben.

Es sei zunächst S_n eine beliebige harmonische Flächenfunction $n$ter Ordnung und V_n und V_{-n-1} die auf der Kugelfläche vom Radius a ihr gleichen räumlichen Functionen [Zusatz B (b)], so dass

$$V_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n S_n \text{ und } V_{-n-1} = \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} S_n$$

ist. Nun ist (vergl. § 655)

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = e^{n\log\frac{r}{a}};$$

wenn also a unendlich gross und $r-a$ eine endliche Grösse ist, die wir mit x bezeichnen wollen, welche Annahme

$$\log\frac{r}{a} = \frac{x}{a}$$

liefert, und wenn n unendlich gross und $\frac{a}{n} = p$ ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = e^{\frac{n}{a}x}, \text{ und auf ähnliche Weise } \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = e^{-\frac{n+1}{a}x} = e^{-\frac{x}{p}};$$

die räumlichen harmonischen Functionen werden dann

$$e^{\frac{x}{p}} S_n \text{ und } e^{-\frac{x}{p}} S_n.$$

Wenn wir jetzt voraussetzen, S_n sei eine elementare harmonische Function, und, wie Green in seinem berühmten Essay on Electricity that, eine um einen Pol liegende nahezu ebene Fläche oder auch ein von jedem Pol weit entfernt liegendes nahezu ebenes Flächenstück betrachten, so ist es interessant und lehrreich, zu untersuchen, wie die Formeln [Zusatz B (38) ... (40), (60), (64); und § 782 (e), (f), (g)] in die für ebene Polar- oder rechtwinklige Coordinaten geltenden Formeln übergehen. Wir können dies dem mathematisch gebildeten Leser überlassen. Im zweiten Bande wird die Lösung in ebenen Polarcoordinaten vollständig untersucht werden. Hier bemerken wir bloss, dass S_n, ausgedrückt in rechtwinkligen Flächencoordinaten (y, x), auf der in eine Ebene degenerirten Kugelfläche jede beliebige Function sein kann, welche der Gleichung

$$\frac{d^2 S_n}{d y^2} + \frac{d^2 S_n}{d z^2} + \frac{S_n}{p^2} = 0$$

genügt, und dass die Lösung in rechtwinkligen Coordinaten, in welche die elementare harmonische Function für nahezu ebene Theile der Kugelfläche, die von den Polen weit entfernt sind, übergeht,

$$S_n = \cos\frac{y}{q} \cos\frac{z}{q'}$$

ist, wo q und q' zwei Constanten bezeichnen, die der Bedingung

$$q^2 + q'^2 = p^2$$

genügen.

784. Beispiele elementarer harmonischer Functionen. — Die folgenden Tabellen und graphischen Darstellungen aller elementaren harmonischen Functionen der 6. und 7. Ordnung wird für das tiefere Verständniss des Gegenstandes von Nutzen sein.

$$Q_6 = \frac{1}{16}(231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5) = \frac{231}{16}\Theta_6^{(0)}$$

$$\frac{1}{21}\cdot\frac{dQ_6}{d\mu} = \frac{1}{8}(33\mu^4 - 30\mu^2 + 5)\mu = \frac{33}{8}\Theta_6^{(1)}(1-\mu^2)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{210}\cdot\frac{d^2Q_6}{d\mu^2} = \frac{1}{16}(33\mu^4 - 18\mu^2 + 1) = \frac{33}{16}\Theta_6^{(2)}(1-\mu^2)^{-1}$$

$$\frac{1}{1260}\cdot\frac{d^3Q_6}{d\mu^3} = \frac{1}{8}(11\mu^2 - 3)\mu = \frac{11}{8}\Theta_6^{(3)}(1-\mu^2)^{-3/2}$$

$$\frac{1}{4725}\cdot\frac{d^4Q_6}{d\mu^4} = \frac{1}{10}(11\mu^2 - 1) = \frac{11}{10}\Theta_6^{(4)}(1-\mu^2)^{-2}$$

$$\frac{1}{10395}\cdot\frac{d^5Q_6}{d\mu^5} = \mu = \Theta_6^{(5)}(1-\mu^2)^{-5/2}$$

$$\frac{1}{10395}\cdot\frac{d^6Q_6}{d\mu^6} = 1 = \Theta_6^{(6)}(1-\mu^2)^{-3}$$ nicht angegeben.

$$Q_7 = \frac{1}{16}(429\mu^6 - 693\mu^4 + 315\mu^2 - 35)\mu = \frac{429}{16}\Theta_7^{(0)}.$$

$$\frac{1}{28}\cdot\frac{dQ_7}{d\mu} = \frac{1}{64}(429\mu^6 - 495\mu^4 + 135\mu^2 - 5) = \frac{429}{64}\Theta_7^{(1)}(1-\mu^2)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{378}\cdot\frac{d^2Q_7}{d\mu^2} = \frac{1}{48}(143\mu^4 - 110\mu^2 + 15)\mu = \frac{143}{48}\Theta_7^{(2)}(1-\mu^2)^{-1}$$

$$\frac{1}{3150}\cdot\frac{d^3Q_7}{d\mu^3} = \frac{1}{80}(143\mu^4 - 66\mu^2 + 3) = \frac{143}{80}\Theta_7^{(3)}(1-\mu^2)^{-3/2}$$

$$\frac{1}{17325}\cdot\frac{d^4Q_7}{d\mu^4} = \frac{1}{10}(13\mu^2 - 3)\mu = \frac{13}{10}\Theta_7^{(4)}(1-\mu^2)^{-2}$$

$$\frac{1}{62370}\cdot\frac{d^5Q_7}{d\mu^5} = \frac{1}{12}(13\mu^2 - 1) = \frac{13}{12}\Theta_7^{(5)}(1-\mu^2)^{-5/2},$$

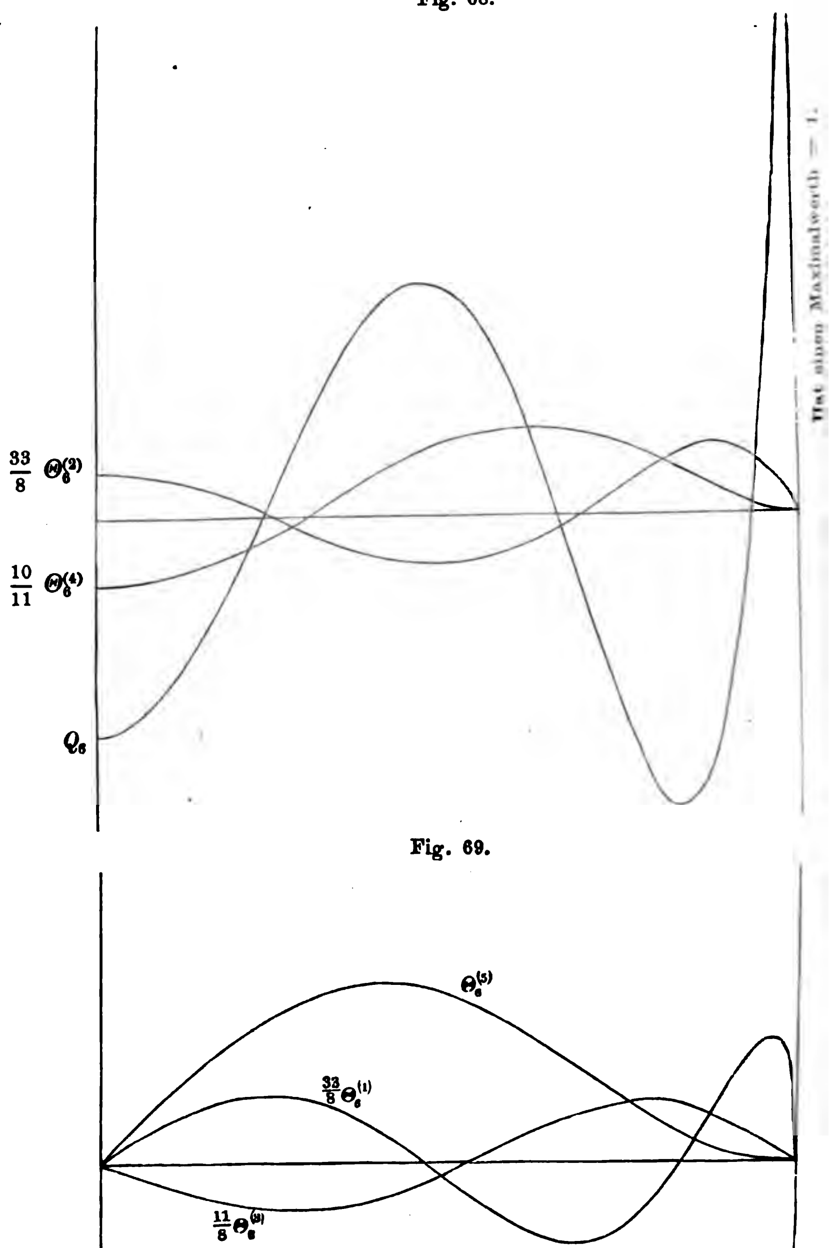
$$\frac{1}{135135}\cdot\frac{d^6Q_7}{d\mu^6} = \mu = \Theta_7^{(6)}(1-\mu^2)^{-3}$$

$$\frac{1}{135135}\cdot\frac{d^7Q_7}{d\mu^7} = 1 = \Theta_7^{(7)}(1-\mu^2)^{-7/2}$$ nicht angegeben.

μ.	Q_6.	$\frac{1}{21}\frac{d\,Q_6}{d\,\mu}$	$\frac{33}{8}\,\Theta_6^{(1)}$.	$\frac{1}{210}\frac{d^2\,Q_6}{d\,\mu^2}$.	$\frac{33}{16}\,\Theta_6^{(2)}$.
·0	— ·3125	·0000	·0000	+ ·0625	+ ·0625
·01	— ·3118	......	......	......	......
·05	— ·2961	+ ·0308	+ ·0307	+ ·0597	+ ·0595
·08	— ·2738	......	......	......	......
·10	— ·2488	+ ·0588	+ ·0585	+ ·0515	+ ·0510
·13	— ·2072	......	......	......	......
·15	— ·1746	+ ·0814	+ ·0805	+ ·0382	+ ·0373
·17	— ·1390	......	......	......	......
·2	— ·0806	+ ·0963	+ ·0944	+ ·0208	+ ·0200
·24	+ ·0029	......	......	......	......
·25	+ ·0243	+ ·1017	+ ·0984	+ ·0002	+ ·0002
·2506	......	......	......	·0000	·0000
·3	+ ·1293	+ ·0966	+ ·0921	— ·0221	— ·0201
·34	+ ·2053	......	......	......	......
·35	+ ·2225	+ ·0796	+ ·0745	— ·0441	— ·0387
·36	+ ·2388	......	......	......	......
·4	+ ·2926	+ 0·522	+ ·0479	— ·0647	— ·0544
·43	+ ·3191	......	......	......	......
·45	......	+ ·0157	+ ·0140	— ·0807	— ·0644
·46	+ ·3314	......	......	......	......
·4688	......	·0000	·0000	......	......
·469	+ ·3321	......	......	......	......
·5	+ ·3233	— ·0273	— ·0237	— ·0898	— ·0674
·54	+ ·2844	......	......	......	......
·55	......	— ·0726	— ·0606	— ·0891	— ·0622
·56	+ ·2546	......	......	......	......
·6	+ ·1721	— ·1142	— ·0914	— ·0752	— 0481
·63	+ ·0935	......	......	......	......
·65	......	— ·1450	— ·1102	— ·0446	— ·0258
·66	+ ·0038	......	......	......	......
·7	— ·1253	— ·1555	— ·1110	+ ·0064	+ ·0033
·74	— ·2517	......	......	......	......
·75	— ·2808	— ·1344	— ·0889	+ ·0823	+ ·0360
·76	— ·3087	......	......	......	......
·8	— ·3918	— ·0683	— ·0410	+ ·1873	+ ·0674
.82	— ·4119	......	......	......	......
·8302	— ·4147	·0000	·0000	......	......
·84	— ·4119	......	......	......	......
·85	— ·4030	+ ·0586	+ ·0308	+ ·3263	+ ·0905
·87	— ·3638	......	......	......	......
·90	— ·2412	+ ·2645	+ ·1153	+ ·5044	+ ·0958
·92	— ·1084	+ ·1764	+ ·1464	......	......
·93	......	+ ·4346	+ ·1597	......	......
·9325	·0000	......	......	......	......
·94	+ ·0751	+ ·5002	+ ·1706	......	......
·95	......	+ ·5704	+ ·1778	+ ·7271	+ ·0709
·96	+ ·3150	......	......	......	......
·97	......	+ ·7260	+ ·1764	......	......
·98	+ ·6203	+ ·8117	+ ·1615	+ ·8844	+ ·0350
·99	+ ·8003	+ ·9029	+ ·1274	+ ·9411	+ ·0187
1·00	+ 1·0000	+ 1·0000	·0000	+ 1·0000	+ ·0000

μ.	$\frac{1}{1260}\frac{d^3Q_6}{d\mu^3}$.	$\frac{11}{8}\Theta_6^{(3)}$.	$\frac{1}{4725}\frac{d^4Q_6}{d\mu^4}$.	$\frac{11}{10}\Theta_6^{(4)}$.	$\Theta_6^{(5)}$.
·0	·0000	·0000	− ·1000	− ·1000	·0000
·05	− ·0186	− ·0185	− ·0975	− ·0970	+ ·0497
·1	− ·0361	− ·0356	− ·0890	− ·0886	+ ·0975
·15	− ·0516	− ·0499	− ·0753	− ·0720	+ ·1417
·2	− ·0640	− ·0602	− ·0560	− ·0516	+ ·1806
·25	− ·0723	− ·0656	− ·0313	− ·0275	+ ·2127
·3	− ·0754	− ·0655	− ·0010	− ·0008	+ ·2370
·35	− ·0767	− ·0630	+ ·0348	+ ·0268	+ ·2524
·4	− ·0620	− ·0477	+ ·0760	+ ·0536	+ ·2586
·45	− ·0435	− ·0310	+ ·1227	+ ·0773	+ ·2555
·5	− ·0156	− ·0101	+ ·1750	+ ·0984	+ ·2436
·55	+ ·0225	+ ·0131	+ ·2327	+ ·1132	+ ·2234
·6	+ ·0720	+ ·0369	+ ·2960	+ ·1211	+ ·1966
·63	......	......	+ ·3366	+ ·1224	......
·65	+ ·1338	+ ·0587	+ ·3647	+ ·1204	+ ·1647
·7	+ ·2091	+ ·0750	+ ·4390	+ ·1139	+ ·1300
·75	+ ·2988	+ ·0865	+ ·5188	+ ·0991	+ ·0949
·8	+ ·4040	+ ·0873	+ ·6040	+ ·0783	+ ·0622
·83	......	......	+ ·6578	+ ·0637	......
·85	+ ·5257	+ ·0768	+ ·6947	+ ·0535	+ ·0344
·87	......	......	+ ·7326	+ ·0433	......
·89	......	......	+ ·7713	+ ·0333	......
·9	+ ·6649	+ ·0551	+ ·7910	+ ·0285	+ ·0150
·92	......	......	......	......	+ ·0085
·93	+ ·7572	+ ·0376	+ ·8514	+ ·0155	......
·95	+ ·8226	+ ·0249	+ ·8928	+ ·0084	+ ·0028
·96	+ ·8565	......	+ ·9138	......	......
·97	+ ·8911	+ ·0128	+ ·9350	+ ·0032	......
·98	+ ·9216	+ ·0073	+ ·9564	+ ·0015	......
·99	+ ·9629	......	+ ·9781	+ ·0004	......
1·00	+ 1·0000	·0000	+ 1·0000	·0000	·0000

Fig. 68.



Hat einen Maximalwerth = 1.
$\frac{33}{8}\,\Theta_6^{(2)}$
$\frac{10}{11}\,\Theta_6^{(4)}$
Q_6
$\Theta_6^{(5)}$
$\frac{33}{8}\Theta_6^{(1)}$
$\frac{11}{8}\Theta_6^{(3)}$

Fig. 69.

Fig. 70.

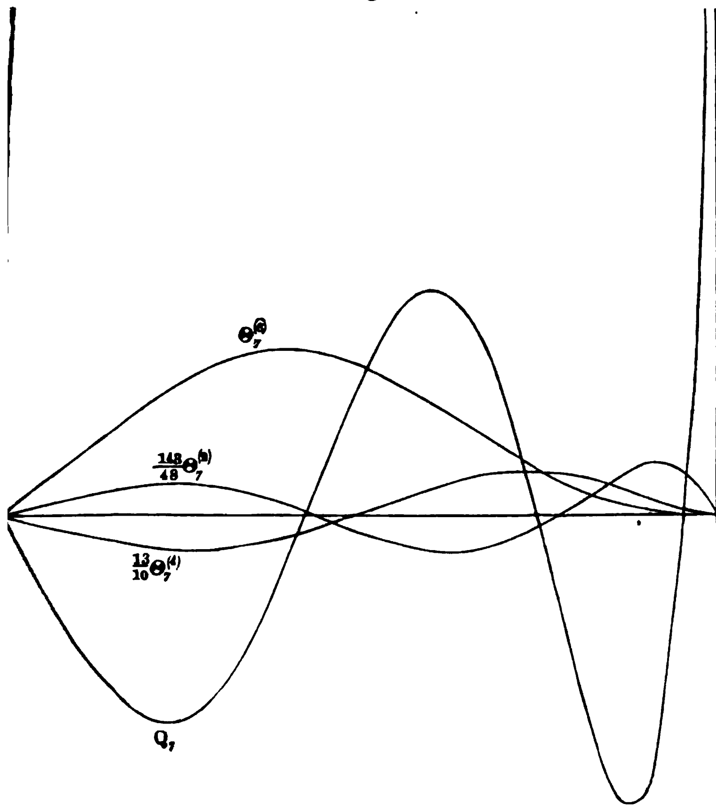
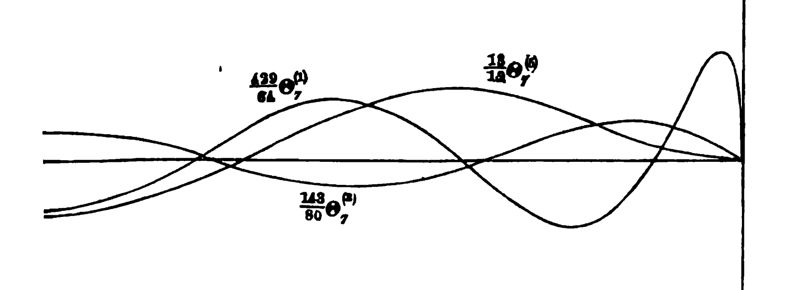


Fig. 71.



μ.	Q_7.	$\frac{1}{28}\frac{dQ_7}{d\mu}$.	$\frac{429}{64}\Theta_7^{(1)}$.	$\frac{1}{278}\frac{d^2Q_7}{d\mu^2}$.	$\frac{143}{48}\Theta_7^{(2)}$.
·0	·0000	— ·0781	— ·0781	·0000	·0000
·05	— ·1069	— ·0720	— ·0719	+ ·0153	+ ·0153
·1	— ·1995	— ·0578	— ·0522	+ ·0290	+ ·0287
·15	— ·2649	— ·0345	— ·0341	+ ·0394	+ ·0385
·18	— ·2873	......	......	......	......
·2	— ·2935	— ·0057	— ·0056	+ ·0451	+ ·0433
·2093	......	·0000	·0000	......	......
·2261	......	......	......	+ ·0459	......
·23	— ·2905	......	......	......	......
·24	......	+ ·0190	......	......	......
·25	— ·2799	+ ·0251	+ ·0243	+ ·0452	+ ·0424
·3	— ·2240	+ ·0540	+ ·0515	+ ·0391	+ ·0356
·35	— ·1318	+ ·0765	+ ·0717	+ ·0268	+ ·0235
·38	— ·0635	......	......	......	......
·4	— ·0365	+ ·0888	+ ·0814	+ ·0084	+ ·0074
·42	+ ·0356	......	......	......	......
·4209	......	+ ·0901	......	·0000	·0000
·45	+ ·1106	+ ·0875	+ ·0782	— ·0132	— ·0105
·5	+ ·2231	+ ·0706	+ ·0611	— ·0371	— ·0278
·53	......	......	......	......	— ·0366
·55	+ ·3007	+ ·0378	+ ·0315	......	— ·0415
·57	+ ·3207	......	......	......	......
·58	......	......	......	......	— ·0415
·5917	+ ·3236	·0000	·0000	......	......
·6	+ ·3226	— ·0115	— ·0092	— ·0758	— 0·485
·62	+ ·3121	......	......	......	......
·6406	......	......	......	— ·0809	......
·65	+ ·2737	— ·0619	— ·0471	— ·0806	— ·0465
·7	+ ·1502	— ·1129	— ·0806	— ·0666	— ·0340
·7415	·0000	......	......	......	......
·75	— ·0342	— ·1458	— ·0964	— ·0254	— ·0111
·7694	......	— ·1490	......	......	......
·7695	......	......	......	·0000	·0000
·8	— ·2397	— ·1390	— ·0834	+ ·0529	+ ·0190
·82	— ·3134	......	......	......	......
·85	— ·3913	— ·0634	— 0·334	+ ·1801	+ ·0500
·86	— ·4054	......	......	......	......
·8717	— ·4117	·0000	·0000	......	......
·88	— ·4082	......	......	......	......
·9	— ·3678	+ ·1183	+ ·0515	+ ·3698	+ ·0723
·92	— ·2713	......	......	......	......
·93	......	......	......	+ ·5276	+ ·0712
·9491	·0000	......	......	......	......
·95	+ ·0112	+ ·4533	+ ·1413	+ ·6373	+ ·0621
·97	+ ·3165	+ ·6421	+ ·1563	+ ·7699	+ ·0455
·98	+ ·5115	+ ·7517	+ ·1458	......	......
·99	+ ·7384	+ ·8706	+ ·1230	+ ·9190	+ ·0184
1·00	+ 1·0000	+ 1·0000	·0000	+ 1·0000	·0000

μ.	$\frac{1}{3150}\frac{d^3 Q_7}{d\mu^3}$.	$\frac{143}{80}\Theta_7^{(3)}$.	$\frac{1}{17325}\frac{d^4 Q_7}{d\mu^4}$.	$\frac{18}{10}\Theta_7^{(4)}$.	$\frac{1}{62370}\frac{d^5 Q_7}{d\mu^5}$.	$\frac{13}{12}\Theta_7^{(5)}$.	$\Theta_7^{(6)}$.
·0	+ ·0375	+ ·0375	·0000	·0000	— ·0833	— ·0833	·0000
·05	+ ·0355	·0353	— ·0148	— ·0147	— ·0806	— ·0801	+ ·0496
·1	+ ·0294	·0290	— ·0287	— ·0281	— ·0725	— ·0707	+ ·0970
·15	+ ·0198	·0192	— ·0406	— ·0387	— ·0590	— ·0557	+ ·1401
·2	+ ·0074	·0068	— ·0496	— ·0457	— ·0400	— ·0361	+ ·1769
·2261	·0000	·0000	......	......	......	......	......
·25	— ·0071	— ·0064	— ·0544	— ·0478	— ·0156	— ·0133	+ ·2059
·2773	......	......	— ·0555	......	·0000	·0000	......
·3	— ·0225	— ·0195	— ·0549	— ·0454	+ ·0142	+ ·0112	+ ·2260
·35	— ·0367	— ·0302	— ·0493	— ·0378	+ ·0494	+ ·0356	+ ·2364
·4	— ·0487	— ·0375	— ·0368	— ·0260	+ ·0900	+ ·0582	+ ·2369
·45	— ·0563	— ·0400	— ·0165	— ·0104	+ ·1361	+ ·0773	+ ·2281
·4804	— ·0577	......	·0000	·0000	......	......	......
·5	— ·0570	— ·0370	+ ·0125	+ ·0070	+ ·1875	+ ·0913	+ ·2110
·55	— ·0485	— ·0282	+ ·0513	+ ·0248	+ ·2564	+ ·1041	+ ·1859
·6	— ·0278	— 0·142	+ ·0708	+ ·0412	+ ·3067	+ .1004	+ ·1573
·6406	·0000	·0000	......	......	......	......	......
·65	+ ·0080	+ ·0035	+ ·1620	+ ·0540	+ ·3744	+ ·0948	+ ·1252
·7	+ ·0624	+ ·0227	+ ·2359	+ ·0613	+ ·4475	+ ·0831	+ ·0928
·75	+ ·1390	+ ·3401	+ ·3234	+ ·0619	+ ·5260	+ ·0665	+ ·0627
·8	+ ·2417	+ ·0521	+ ·4256	+ ·0551	+ ·6100	+ ·0474	+ ·0373
·85	+ ·3745	+ ·0546	+ ·5434	+ ·0418	+ ·6994	+ ·0283	+ ·0181
·9	+ ·5420	+ ·0448	+ ·6777	+ ·0244	+ ·7942	+ ·0132	+ ·0065
·92	+ ·6197	+ .0373	+ ·7363	+ ·0170	......	......	+ ·0033
·95	+ ·7489	+ ·0227	+ ·8732	+ ·0083	+ ·8944	+ ·0026	+ ·0087
·97	+ ·8062	+ ·0116	+ ·9230	+ ·0032	......	......	+ ·0002
·98	+ ·9564	+ ·0076	......	......	......	......	......
·99	......	......	......	......	......	......	......
1·00	1·0000	·0000	+1·0000	·0000	+1·0000	·0000	·0000

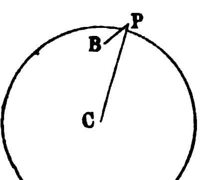
785. Excurs über die Theorie des Potentials. — Ein kurzer Excurs über die Theorie des Potentials und speciell über Flächen constanten Potentials, die nur wenig von concentrischen Kugeln verschieden sind, wird die hydrostatischen Beispiele, die wir folgen lassen, vereinfachen. Zunächst werden wir rein synthetisch einige Fälle behandeln, in denen bei gegebenen Massenvertheilungen die resultirenden Kräfte und die Niveauflächen (§ 487) bestimmt werden; darauf sollen gewisse Probleme der Green'schen und Gauss'schen Analysis folgen, in welchen entweder die Grössen der Kraft oder die Werthe des Potentials auf individuellen Flächen oder die Formen individueller Niveauflächen gegeben werden, und die Vertheilung der Kraft in einem zusammenhängenden leeren Raume bestimmt werden soll. Da wir jetzt diese Fragen hauptsächlich ihrer Anwendung auf die physische Geographie wegen herbeiziehen, so werden wir bei dieser Gelegenheit der Kürze wegen uns gleich auf die Erde beziehen, auch wenn irgend eine andere anziehende Masse mit annähernd kugelförmigen äusseren Flächen constanten Potentials unserem Zwecke ebenso gut entsprechen würde. Auch werden wir zuweilen von der „Meeresoberfläche" (§§ 750, 754) sprechen, indem wir darunter bloss eine „Niveaufläche" oder eine „Gleichgewichtsoberfläche" (§ 487) verstehen, welche den festen Körper ganz oder mit Ausnahme verhältnissmässig kleiner Theile, wie sie unser trockenes Land ist, umschliesst. Eine solche Fläche wird natürlich eine Fläche constanten Potentials für die blosse Gravitation sein, wenn weder eine Rotation, noch eine aus der Anziehung anderer Körper, wie des Mondes und der Sonne, herrührende Störung und durch diese Kräfte für die Erde erzeugte „Aenderung der Bewegung" vorhanden ist; aber auch trotz dieser Störungen kann jene Fläche immer eine Fläche constanten Potentials genannt werden, da, wie wir in § 793 sehen werden, sowohl die Centrifugalkraft, als auch die übrigen erwähnten Störungen sich durch Potentiale darstellen lassen.

786. Störung der Meeresoberfläche durch eine Masse, deren Dichtigkeit von der mittleren Dichtigkeit der Erde verschieden ist. — Um zu bestimmen, welchen Einfluss die Existenz von Felsen, deren Dichtigkeit grösser oder kleiner als die mittlere Dichtigkeit der Erde ist, in einem begrenzten unter der Oberfläche liegenden Raume auf die Meeresoberfläche hat, und um welchen Betrag dadurch die Schwerkraft in den anliegenden Theilen vermehrt oder vermindert wird, denken wir uns, eine Masse, welche nur einen sehr kleinen Bruchtheil $\frac{1}{n}$ der ganzen Erdmasse aus-

macht, sei irgendwo in einem unter der Oberfläche liegenden Punkte concentrirt, dessen Entfernung von der Oberfläche wir als klein im Vergleich zum Radius, aber gross im Vergleich zu $\frac{1}{\sqrt{n}}$ des Radius voraussetzen. Unmittelbar über dem Centrum der Störung wird sich die Meeresoberfläche in Folge der störenden Anziehung erheben, und zwar um eine Höhe, die sich zum Radius verhält, wie der Abstand des störenden Punktes von dem Hauptcentrum zur $n$fachen Tiefe desselben unter der so gestörten Meeresoberfläche. Die Zunahme der Schwerkraft in diesem Punkte der Meeresoberfläche wird derselbe Bruchtheil der ganzen Schwerkraft sein, der das $n$fache des Quadrats der Tiefe des anziehenden Punktes von dem Quadrat des Radius ist. Da wir uns auf Umstände, wie sie die Natur darbietet, beschränken wollen, so müssen wir diesen Bruch als sehr klein voraussetzen. Die Aenderung der **Richtung** der Schwerkraft wird für die Meeresoberfläche ein Maximum in den Punkten eines Kreises sein, welcher von A als Centrum mit $\frac{D}{\sqrt{2}}$ als Radius beschrieben wird, wo D die Tiefe des Mittelpunkts der Störung bezeichnet. Die Grösse dieser grössten Abweichung wird $\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{a^2}{nD^2}$ der Winkeleinheit [57·296° (§ 41)] betragen, wenn a den Erdradius bezeichnet.

Es sei C der Mittelpunkt der Hauptmasse $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, um deren Anziehung es sich handelt, und B der Mittelpunkt der störenden Masse $\left(\frac{1}{n}\right)$, und es werde vorausgesetzt, beide Massen wirkten so, als wären sie beziehungsweise in diesen beiden Punkten concentrirt. Ferner sei P irgend ein Punkt auf der Fläche constanten Potentials, für welche das Potential den Werth hat, den es auf einer Kugelfläche vom Radius a und dem Mittelpunkt C haben würde, wenn die ganze Masse in C vereinigt wäre. Dann ist (§ 491)

Fig. 72.



$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{CP}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{BP}=\frac{1}{a},$$

und dies ist die Gleichung der in Rede stehenden Fläche constanten Potentials. Sie liefert

$$CP-a=\frac{a}{nBP}(CP-BP).$$

Dies ist für jeden Punkt der exacte Ausdruck der positiven oder negativen Erhebung der gestörten Gleichgewichtsfläche über die ungestörte Fläche desselben Potentials. Für den über dem Centrum der Störung liegenden Punkt A erhält man daraus

$$CA - a = \frac{a}{n\,BA} \cdot CB,$$

was genau mit dem vorhergehenden Ausspruch übereinstimmt und beweist, dass derselbe, auf die Meeresoberfläche angewandt, approximativ richtig ist, wenn wir beachten, dass, wenn BP ein grosses Vielfache von BA ist, $CP - a$ vielmals kleiner als sein Werth in A sein wird. Wir überlassen den Beweis der übrigen Sätze dieses und der folgenden Paragraphen (§§ 787 ... 792) dem Leser als Uebungsaufgabe.

787. Wirkung einer Masse, deren Dichtigkeit die mittlere übertrifft, auf die Niveaufläche, sowie auf die Richtung und Intensität der Schwerkraft. — Wenn ϱ die allgemeine Dichtigkeit der Rinde und σ die mittlere Dichtigkeit der Erde ist, und wenn die § 786 angegebene Störung die Folge des Vorhandenseins einer Masse von einer anderen Dichtigkeit ϱ' ist, welche eine Kugel vom Radius b, deren Centrum sich in einer Tiefe D unter der Meeresoberfläche befindet, ganz ausfüllt, so wird n den Werth $\dfrac{\sigma a^3}{(\varrho' - \varrho) b^3}$ haben, und die Erhöhung der Meeresfläche, sowie die entsprechende Vergrösserung der Schwerkraft in dem gerade darüber befindlichen Punkte werden beziehungsweise folgende sein:

$$\frac{(\varrho' - \varrho) b^2}{\sigma a D} \cdot b \text{ und } \frac{(\varrho' - \varrho) b^3}{\sigma a D^2}.$$

Der wirkliche Werth von σ ist ungefähr doppelt so gross als der von ϱ. Wir wollen, um ein Beispiel zu geben, annehmen, es sei $D = b = 1000$ Fuss (engl.) oder $= \dfrac{1}{21000}$ des Erdradius und ϱ' entweder gleich 2ϱ oder gleich Null. Dann gehen die vorstehenden Resultate über in

$$\pm \frac{1}{42} \text{ Fuss und } \pm \frac{1}{42000} \text{ der Schwerkraft;}$$

dies ist also die Erhöhung oder Senkung der Meeresoberfläche, und die Vermehrung oder Verminderung der Schwerkraft, welche durch einen kugelförmigen Massentheil vom Durchmesser 2000 Fuss, dessen Centrum 1000 Fuss unter der Oberfläche liegt, und dessen Dichtigkeit entweder das Doppelte von derjenigen der Erde oder Null ist,

hervorgebracht werden. Die grösste Abweichung des Senkbleis erfolgt in den Punkten des Kreises, der mit dem Radius 707 Fuss um die Projection des Mittelpunktes der störenden Substanz auf die Oberfläche gezogen ist, und beläuft sich auf $\frac{1}{109000}$ der Winkeleinheit, oder nahezu auf 2″.

788. Es verdient bemerkt zu werden, dass als Aequivalent gegen die aus der Attraction der störenden Masse herrührende Zunahme im Betrage der Schwerkraft, die wir für die benachbarten Punkte der Meeresoberfläche berechnet haben, nur eine unmerkliche Abnahme der Attraction der Hauptmasse stattfindet, die in der durch den störenden Einfluss erzeugten Vergrösserung des Abstandes der Meeresoberfläche vom Mittelpunkt der Hauptmasse ihren Grund hat. Dieselbe Bemerkung gilt offenbar für Störungen im Betrage der Schwerkraft, die von isolirten Bergen oder von Inseln von kleinen Dimensionen herrühren, und in § 794 werden wir beweisen, dass sie auch für Formabweichungen richtig ist, welche durch harmonische Functionen hoher Ordnungen dargestellt werden. Dagegen werden wir in § 789 sehen, dass es anders ist mit harmonischen Abweichungen niedriger Ordnungen, und folglich mit weit ausgedehnten Störungen, wie sie durch grosse Strecken hohen Landes oder tiefer See hervorgebracht werden. Wir beabsichtigen, zu diesem Gegenstande im zweiten Bande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie zurückzukehren, wenn wir Gelegenheit haben werden, die durch Naturerscheinungen und Experimente gewonnenen Grundlagen unserer Kenntniss der Schwerkraft zu prüfen; wir werden dann die §§ 477 (b), (c), (d), 478, 479 und die Lösungen der übrigen verwandten Probleme dazu benutzen, die Wirkungen zu bestimmen, welche isolirte Berge, Gebirgsketten, grosse Tafelländer und entsprechende Senkungen, wie Seen oder begrenzte tiefe Stellen im Meere, grosse Thäler oder Klüfte, grosse Strecken tiefen Meeres auf die Grösse und Richtung der Schwere, wie auf die Niveauflächen haben.

789. **Harmonische Sphäroidalflächen.** — Alle Niveauflächen für ein harmonisches Sphäroid (§ 779) von homogener Masse sind harmonische Sphäroide von derselben Ordnung und Natur. Diejenige dieser Flächen, welche ebenso sehr innerhalb wie ausserhalb des festen Körpers liegt, schneidet die Umgrenzung des festen Körpers in einer Linie (oder Gruppe von Linien) — der mittleren

Niveaulinie der Oberfläche des festen Körpers. Diese Linie liegt auf der mittleren Kugelfläche und bildet daher (§ 780) die Knoten jeder der beiden Sphäroidflächen, welche einander in ihr schneiden. Wenn i die Ordnung der harmonischen Function ist, so beträgt die Abweichung des Niveausphäroids (§§ 545, 815) genau $\frac{3}{2i+1}$ von der Abweichung der sphäroidalen Oberfläche, jede Abweichung von der mittleren Kugelfläche aus gerechnet.

So fällt, wenn $i = 1$ ist, die Niveaufläche mit der Umgrenzung des festen Körpers zusammen: der Grund davon leuchtet ein, wenn man beachtet, dass eine jede sphärische harmonische Abweichung erster Ordnung von einer gegebenen Kugelfläche eine gleiche Kugelfläche um einen Mittelpunkt ausmacht, welcher eine gewisse unendlich kleine Entfernung von dem Mittelpunkt der gegebenen Oberfläche hat.

Wenn $i = 2$ ist, so weicht die Niveaufläche von der mittleren Kugel um $\frac{3}{5}$ der Abweichung der umgrenzenden Oberfläche ab. Dies ist der Fall einer ellipsoidalen Umgrenzung, welche unendlich wenig von einer Kugel verschieden ist. Wir bemerken, dass, wie sich leicht aus § 522 herleiten lässt, von den auf ein homogenes Ellipsoid bezüglichen Flächen constanten Potentials diejenigen, welche ganz innerhalb des Ellipsoides liegen, gleichfalls Ellipsoide sind; das ist aber nicht der Fall mit den Gleichgewichtsflächen, welche die Umgrenzung des Ellipsoides schneiden oder ganz ausserhalb derselben liegen; diese letzteren sind nur dann näherungsweise ellipsoidal, wenn die Abweichung von der Kugelgestalt sehr klein ist.

790. Harmonische Sphäroidflächen hoher Ordnungen. — Die Verhältnisse bei sehr hoher Ordnung werden zur Genüge erläutert, wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf sectoriale harmonische Functionen beschränken (§ 781). Die Linie, in welcher ein sectoriales harmonisches Sphäroid von irgend einer zu seiner Polaraxe senkrechten Ebene geschnitten wird, ist [§ 781 (1)] gewissermassen eine harmonische Curve (§ 62), von einer kreisförmigen statt von einer geraden Abscissenlinie aus gezogen. Ihre Wellenlänge (oder die doppelte Strecke auf der Abscissenlinie von einem Null- oder Knotenpunkte zum nächstfolgenden) ist $\frac{1}{i}$ des Umfangs des Kreises. Wenn i sehr gross ist, so macht der Factor $\sin^i \vartheta$ die sectoriale harmonische Function sehr klein, ausgenommen für Werthe

von ϑ, welche wenig von einem rechten Winkel verschieden sind; daher besteht ein sectoriales harmonisches Sphäroid sehr hoher Ordnung aus einer Schaar paralleler Bergrücken und Thäler, die senkrecht zu einem grössten Kreise der Kugel sind, in dem Schnitt mit der Ebene dieses Kreises (oder des Aequators) eine nahezu einfach harmonische Form haben und deren Hebung und Senkung zu beiden Seiten derselben symmetrisch abnimmt, so dass sie beiderseits in einem grossen angularen Abstande von demselben (oder in grosser „Breite") unmerklich sind. Die Niveaufläche, welche die Attraction eines homogenen festen Körpers dieser Gestalt liefert, ist eine Figur derselben Art, aber von einem viel geringeren Grade der Erhöhungen und Senkungen, d. h., wie wir gesehen haben, nur $\frac{3}{2i+1}$ derjenigen der Figur, oder näherungsweise das Dreifache des Bruchtheils der Ungleichheiten der Figur, welches die halbe Wellenlänge vom Umfang der Kugel ist. Man sieht leicht, dass, wenn i sehr gross ist, die Niveaufläche an jeder Stelle durch die Ungleichheiten in den entfernteren Theilen der Figur keine merkliche Einwirkung erleidet.

791. Wellenförmige Gestalt der Niveaufläche, hervorgerufen durch parallele Bergrücken und Thäler. — Wir schliessen daraus Folgendes: — Wenn die Substanz der Erde homogen wäre, so würde eine Reihe paralleler Bergketten und Thäler eine entsprechende näherungsweise wellenförmige Gestalt der Niveaufläche in dem mittleren District erzeugen; die Höhe, zu welcher sich dieselbe unter jeden Bergkamm erhebt, oder sich unter die Höhe der ungestörten Niveaufläche über der Mitte eines Thales hinabsenkt, ist das Dreifache desselben Bruchtheils der Höhe des Berges über das mittlere Niveau oder der Tiefe des Thales unter dasselbe, welches die Breite des Berges oder Thales von dem Umfang der Erde ist.

792. Wenn die Kugel nicht homogen ist, so ist die Störung in der Grösse und Richtung der Schwerkraft, welche irgend eine Ungleichheit in der Gestalt ihrer Umgrenzungsfläche hervorruft, (§ 787) $\frac{\rho}{\sigma}$ von dem Betrage, den sie haben würde, wenn die Substanz homogen wäre. Weiter bemerken wir, dass, da die Störungen als klein vorausgesetzt werden, wir Störungen, wie wir sie jetzt beschrieben haben, zu beliebigen anderen kleinen Störungen hinzu-

fügen können, wie z. B. zu den Störungen, die in der Abplattung der Erde, mit der wir uns alsbald beschäftigen werden, ihren Grund haben.

Da die Dichtigkeit der oberen Kruste überall ungefähr die Hälfte der mittleren Dichtigkeit der Erde ist, so können wir sagen, dass die Wirkung, welche eine Reihe paralleler Bergketten und Thäler auf die Niveaufläche ausübt, von der in § 791 dargelegten allgemeinen Beschaffenheit ist, aber nur die Hälfte des dort angegebenen Betrages hat. So z. B. würde eine Reihe mehrerer breiter Bergketten und Thäler, bei denen Kamm von Kamm oder Thal von Thal 20 Seemeilen entfernt wäre, und deren Länge mehrmals 20 Meilen betrüge, während die verticale Erhebung des Kamms über das Thal 7200 engl. Fuss ausmachte, die Niveaufläche so erhöhen und erniedrigen, dass sie $2^1/_2$ engl. Fuss von der Fläche abweicht, welche die Niveaufläche sein würde, wenn man die herausragenden Theile der Masse entfernte und mit denselben die Thäler ausfüllte.

793. **Das Potential ist überall bestimmt, wenn sein Werth für jeden Punkt einer Oberfläche gegeben ist.** — Green's Theorem [Zusatz A (e)]*) und der in § 497 gegebene Satz von Gauss zeigen, dass, wenn das Potential einer nach dem Newton'schen Gesetze anziehenden beliebig vertheilten Masse für jeden Punkt einer diese Masse vollständig umschliessenden Oberfläche gegeben ist, das Potential und daher auch die Kraft für den ganzen ausserhalb der Umgrenzungsfläche der Masse liegenden Raum bestimmt ist, mag die Oberfläche nun nur aus einer oder aus beliebig vielen isolirten geschlossenen Flächen bestehen, von denen jede einfach continuirlich ist. Allerdings kann man für das Problem, den Werth des Potentials im Raume zu bestimmen, noch keine allgemeine Lösung geben. Und sogar in den Fällen, in welchen das Potential für den Raum ausserhalb der Oberfläche, auf welcher es gegeben ist, vollständig bestimmt worden ist, ist es der mathematischen Analyse bisher nicht gelungen, den Werth desselben für den Raum zu bestimmen, welcher zwischen dieser Oberfläche und der eingeschlossenen anziehenden Masse liegt. Wir hoffen, in den folgenden Bänden auf

*) Man wende zuerst Green's Theorem auf die Oberfläche an, auf welcher das Potential gegeben ist. Dann zeigt der Satz von Gauss, dass es nicht zwei Vertheilungen des Potentials geben kann, welche in dem ganzen ausserhalb der Oberfläche liegenden Raum übereinstimmen, aber für irgend einen Theil des Raums verschieden sind, welcher zwischen ihr und der Umgrenzungsfläche der Masse liegt.

das durch den Gauss'schen Satz des § 497 gegebene wichtige Problem zurückzukommen. Inzwischen beschränken wir uns auf Fragen, welche für die physische Geographie von praktischem Nutzen sind.

Beispiel (1). — Die einschliessende Fläche sei eine Kugel vom Radius a, und es sei $F(\vartheta, \varphi)$ das in irgend einem Punkte dieser Oberfläche, der in der gewöhnlichen Weise durch seine Polarcoordinaten ϑ, φ bestimmt ist, gegebene Potential. Green's Lösung [§ 499 (3) und Zusatz B (46)] seines Problems für die Kugelfläche lässt sich unmittelbar auf einen Theil des vorliegenden Problems anwenden und liefert als Werth des Potentials in irgend einem ausserhalb der Kugelfläche liegenden Punkte (r, ϑ, φ)

$$(3)\quad V = \frac{1}{4\pi a} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(r^2 - a^2) F(\vartheta', \varphi') r^2 \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'}{\{r^2 - 2ar[\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')] + a^2\}^{3/2}}.$$

Da aber Laplace's Gleichung $\nabla^2 u = 0$ durch den Ausdruck (46) des Zusatz B sowohl in dem ganzen inneren, als auch in dem ganzen äusseren Raume erfüllt wird, und da in dem vorliegenden Problem die Gleichung $\nabla^2 V = 0$ nur für den Theil des inneren Raumes gilt [§ 491 (c)], welcher keine Masse enthält, so liefert der Ausdruck (3) die Lösung nur für den äusseren Raum. Wenn $F(\vartheta, \varphi)$ eine solche Function ist, dass für das bestimmte Integral ein Ausdruck in geschlossener Form gefunden werden kann, so ist dieser Ausdruck nothwendig die Lösung unseres Problems für den ganzen ausserhalb des anziehenden Körpers befindlichen Raum. Oder wenn $F(\vartheta, \varphi)$ so beschaffen ist, dass das bestimmte Integral (3) in ein anderes bestimmtes Integral transformirt werden kann, welches beim Durchgang durch die Kugelfläche überall oder in einem gewissen Theil derselben stetig variirt, so wird dieses zweite Integral die Lösung auch für einen gewissen Theil des inneren Raumes darstellen, nämlich für den Theil, den man erreichen kann, ohne dass das Integral discontinuirlich wird (d. h. dass seine Elemente unendlich gross werden), und ohne dass man einen Theil der anziehenden Masse trifft. Wir hoffen, den Gegenstand später in Verbindung mit dem Gauss'schen Satze (§ 497) wieder aufzunehmen; für unsern jetzigen Zweck ist es aber wünschenswerth, den Ausdruck (3) nach steigenden Potenzen von $\frac{a}{r}$ zu entwickeln, ganz wie es oben in Zusatz B (s) geschah. Das Resultat [Zusatz B (5')] ist

$$(3^*)\quad V = \frac{a}{r} F_0(\vartheta, \varphi) + \left(\frac{a}{r}\right)^2 F_1(\vartheta, \varphi) + \left(\frac{a}{r}\right)^3 F_2(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.},$$

wo $F_0(\vartheta, \varphi), F_1(\vartheta, \varphi), F_2(\vartheta, \varphi)$, u. s. w. die successiven Glieder der Entwicklung [Zusatz B (51)] von $F(\vartheta, \varphi)$ in harmonische Kugelflächenfunctionen sind; das allgemeine Glied dieser Entwicklung wird durch die Formel

$$(4)\quad F_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Q_n F(\vartheta' \varphi') \, d\vartheta' \, d\varphi'$$

gegeben, wo Q_n die durch Zusatz B (60) ausgedrückte Function von $(\vartheta, \varphi)(\vartheta', \varphi')$ ist.

In jedem Falle, in welchem die anziehende Masse ganz innerhalb einer inneren concentrischen Kugelfläche vom Radius a' liegt, muss die Entwicklung von $F(\vartheta, \varphi)$ nach harmonischen Functionen wenigstens ebenso stark convergent sein, wie die geometrische Reihe

$$\frac{a'}{a}+\left(\frac{a'}{a}\right)^2+\left(\frac{a'}{a}\right)^3+\cdots;$$

daher wird die Reihe (3*) für jeden Werth von r, der grösser als a' ist, convergiren, folglich die Lösung für die Punkte des von der Kugelfläche umschlossenen Raumes wenigstens bis an diese zweite Kugelfläche hin darstellen.

Beispiel (2). — **Bestimmung des Potentials aus der Form einer die Masse umgebenden näherungsweise kugelförmigen Fläche constanten Potentials.** — Es sei die anziehende Masse näherungsweise centrobarisch (§ 526) und eine dieselbe vollständig umschliessende Fläche constanten Potentials gegeben. Man soll die Vertheilung der Kraft und des Potentials in dem ganzen Raume ausserhalb der kleinsten Kugelfläche bestimmen, welche um diese Masse von dem Schwerpunkt derselben als Mittelpunkt aus gezogen werden kann. Es sei a ein approximativer oder mittlerer Radius; ferner möge der Trägheitsmittelpunkt (§ 230) zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden und die Polargleichung der Oberfläche constanten Potentials

$$(5) \qquad r = a\,[1+F(\vartheta,\varphi)]$$

sein, wo F für alle Werthe von ϑ und φ so klein ist, dass wir sein Quadrat sowie seine höheren Potenzen vernachlässigen dürfen. Betrachten wir jetzt die beiden benachbarten Punkte (r, ϑ, φ), (a, ϑ, φ). Die Entfernung beider Punkte ist $aF(\vartheta, \varphi)$, und die Verbindungslinie derselben geht durch den Coordinatenanfangspunkt O. Bezeichnet M die gesammte Masse, so ist die resultirende Kraft in irgend einem Punkte dieser Linie näherungsweise gleich $\frac{M}{a^2}$, und ihre Richtung ist die dieser Linie. Folglich ist die Differenz der Potentiale (§ 486) zwischen ihnen $\frac{MF(\vartheta, \varphi)}{a}$, und wenn a der genaue mittlere Radius ist, so wird der constante Werth des Potentials an der gegebenen Oberfläche (5) genau $\frac{M}{a}$ sein. Daher ist bis zu dem Grade der Genauigkeit, der durch Vernachlässigung der Quadrate von $F(\vartheta, \varphi)$ erreicht wird, das Potential im Punkte (a, ϑ, φ)

$$(6) \qquad \frac{M}{a}+\frac{M}{a}\,F(\vartheta, \varphi).$$

Danach ist das Problem auf das des vorhergehenden Beispiels reducirt, und wenn wir beachten, dass der von dem Gliede $\frac{M}{a}$ von (6) abhängende Theil seiner Lösung einfach $\frac{M}{r}$ ist, so erhalten wir nach (3*) für das jetzt gesuchte Potential

$$(7) \qquad U = M\left\{\frac{1}{r}+\frac{a}{r^2}F_1(\vartheta, \varphi)+\frac{a^2}{r^3}\,F_2(\vartheta, \varphi)+\text{u. s. w.}\right\},$$

wo F_n durch (4) gegeben ist. F_0 ist Null, weil a der genaue mittlere Radius ist; die Gleichung, welche diese Bedingung ausdrückt, ist

$$\int\int F(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0. \tag{8}$$

Wird weiter O in einer geeigneten mittleren Lage, d. h. so angenommen, dass

$$\int\int Q_1 F(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0 \tag{9}$$

ist, so verschwindet F_1, und es ist [§ 539, (12)] O der Schwerpunkt der anziehenden Masse; die Entwicklung von $F(\vartheta, \varphi)$ nach harmonischen Functionen wird dann

$$F(\vartheta, \varphi) = F_2(\vartheta, \varphi) + F_3(\vartheta, \varphi) + F_4(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.} \tag{10}$$

Wenn a' der Radius der kleinsten Kugelfläche ist, welche O zum Mittelpunkt hat und die ganze anziehende Masse umschliesst, so convergirt die Reihe (7) für alle Werthe von ϑ und φ nothwendig wenigstens ebenso rasch als die geometrische Reihe

$$1 + \frac{a'}{r} + \left(\frac{a'}{r}\right)^2 + \left(\frac{a'}{r}\right)^3 + \text{u. s. w.} \tag{11}$$

für jeden Werth von r, der grösser als a' ist. Folglich drückt der Ausdruck (7) die Lösung unseres jetzigen besonderen Problems aus. Derselbe kann die Lösung des Problems sogar noch für weitere Raumtheile innerhalb der Oberfläche ausdrücken, da die gegebene Fläche (6) eine solche sein kann, dass die Entwicklung (10) rascher convergirt als die Reihe

$$1 + \frac{a'}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^3 + \text{u. s. w.}$$

Resultirende Kraft. — Die Richtung und die Grösse der resultirenden Kraft lassen sich natürlich [§§ 486, 491) unmittelbar aus (7) für den ganzen Raum herleiten, für welchen dieser Ausdruck anwendbar ist, d. h. für den ganzen Raum, in welchem derselbe convergirt, und welcher von der gegebenen Oberfläche aus ohne einen Durchgang durch einen Theil der anziehenden Masse erreicht werden kann. Es ist wichtig zu bemerken, dass, da die resultirende Kraft von der radialen Richtung um unendlich kleine Winkelgrössen von derselben Ordnung wie $F(\vartheta, \varphi)$ abweicht, ihre Grösse von derjenigen der radialen Componente um kleine Grössen von derselben Ordnung wie das Quadrat von $F(\vartheta, \varphi)$ verschieden sein wird; bezeichnet also R die Grösse der resultirenden Kraft, so ist für unseren Grad von Genauigkeit

$$R = -\frac{dU}{dr} = \frac{M}{r^2}\left\{1 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2 F_2(\vartheta, \varphi) + 4\left(\frac{a}{r}\right)^3 F_3(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}\right\}. \tag{12}$$

Um die Resultante der Kraft in irgend einem Punkte der Kugelfläche zu finden, welche nur äusserst wenig von der gegebenen Fläche abweicht, setzen wir in dieser Formel $r = a$ und finden

$$\frac{M}{a^2}\left\{1 + 3\, F_2(\vartheta, \varphi) + 4\, F_3(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}\right\}. \tag{13}$$

In dem Punkte (r, ϑ, φ) der gegebenen Oberfläche genügt es für die Genauigkeit, die wir hier fordern, in allen Gliedern der Reihe (12), mit

Ausnahme des ersten, $r = a$ zu setzen; im ersten Gliede $\frac{M}{r^2}$ aber müssen wir $r = a\ \{1 + F(\vartheta, \varphi)\}$ setzen, so dass sich dasselbe in

$$(14) \qquad \frac{M}{r^2} = \frac{M}{a^2\{1 + F(\vartheta, \varphi)\}^2} = \frac{M}{a^2}\{1 - 2F(\vartheta, \varphi)\}$$
$$= \frac{M}{a^2}\{1 - 2[F_2(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.}]\}$$

verwandelt, und wir erhalten für die in Richtung der Normalen genommene Componente der resultirenden Kraft im Punkte (ϑ, φ) der gegebenen näherungsweise kugelförmigen Fläche constanten Potentials

$$(15) \qquad \frac{M}{a^2}\{1 + F_2(\vartheta, \varphi) + 2F_3(\vartheta, \varphi) + 3F_4(\vartheta, \varphi) + \cdots\}.$$

Nehmen wir der Einfachheit wegen ein Glied F_i in der Entwicklung von F allein und betrachten, mittels Zusatz B (38), (40), (p) und §§ 779 ... 784 die Beschaffenheit der harmonischen Kugelflächenfunctionen, so sehen wir, dass die im Bogenmaass (§ 404) gemessene grösste Abweichung der Normalen an die Oberfläche

$$(16) \qquad r = a\ \{1 + F_i(\vartheta, \varphi)\}$$

von der radialen Richtung genau das $i$fache der halben Entfernung zwischen einem Minimum und einem Maximum in den Werthen von $F_i(\vartheta, \varphi)$ für alle harmonischen Functionen zweiter Ordnung (Fall $i = 2$) und für alle sectorialen harmonischen Functionen (§ 781) jeder Ordnung ist, und dass es sich näherungsweise so verhält auch für die äquatorialen Theile aller zonalen harmonischen Functionen sehr hohen Grades. Auch sind für harmonische Functionen hohen Grades benachbarte Maxima und Minima näherungsweise gleich. Wir schliessen daraus folgendes: —

794. Resultante der Gravitationskräfte in irgend einem Punkte einer näherungsweise kugelförmigen Niveaufläche. — Wenn eine Niveaufläche (§ 487), welche eine nach dem Newton'schen Gesetz anziehende Masse umschliesst, von einer nahezu kugelförmigen Form um eine rein harmonische Undulation (§ 779) $i$ter Ordnung abweicht, so wird die Grösse der Schwerkraft in irgend einem ihrer Punkte den mittleren Werth derselben um das $(i - 1)$fache des sehr kleinen Bruchs übertreffen, um welchen der Abstand jenes Punktes vom Centrum grösser ist als der mittlere Radius. Die grösste Neigung der resultirenden Kraft gegen die genau radiale Richtung, gerechnet in Bruchtheilen der Winkeleinheit 57·3° (§ 404), ist für harmonische Abweichungen der zweiten Ordnung gleich dem Verhältniss der ganzen Entfernung zwischen Minimum und Maximum zum mittleren Radius. Für die oben unter der Bezeichnung sectoriale harmonische Functionen beliebigen Grades i beschriebene Classe steht die grösste Abweichung in der Richtung zu der ent-

sprechenden Abweichung von dem mittleren Radius genau in dem Verhältniss $i : (i - 1)$; für zonale harmonische Functionen hoher Grade ist dies Verhältniss nahezu gleich Eins.

Beispiel (3). — **Resultante der Schwere und der Centrifugalkraft in irgend einem Punkte einer näherungsweise kugelförmigen Niveaufläche.** — Die anziehende Masse sei wieder näherungsweise centrobarisch und rotire mit der Winkelgeschwindigkeit ω um OZ; dabei sei eine der sie vollständig umschliessenden Niveauflächen (§ 487) durch die Formel (5) des § 793 ausgedrückt. Das Potential der Centrifugalkraft (§§ 800, 813) wird $\frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2 + y^2)$, oder in räumlichen harmonischen Functionen

$$\frac{1}{3}\,\omega^2 r^2 + \frac{1}{6}\,\omega^2 (x^2 + y^2 - 2\,z^2)$$

sein. Für den Grad der Genauigkeit, an den wir gebunden sind, ist dies für jeden Punkt der gegebenen Oberfläche (5) gleich

$$\frac{1}{3}\,\omega^2 a^2 + \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right).$$

Da die Summe dieses Ausdrucks und des Gravitationspotentials in jedem Punkte dieser Oberfläche constant sein muss, so ist das Gravitationspotential im Punkte (ϑ, φ) der gegebenen Oberfläche (5) gleich

$$\frac{M}{a} - \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right),$$

und daher erhalten wir jetzt, wenn alle übrigen Umstände und ebenso die Bezeichnung wie im Beispiel 2 (§ 793) sind, für das Gravitationspotential im Punkte (a, ϑ, φ) statt (6) den folgenden Ausdruck: —

$$(16) \qquad \frac{M}{a} + \frac{M}{a}\,F(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right).$$

Wenn wir also die Lage von O und die Grösse von a nach (9) und (8) wählen, so erhalten wir für das Potential der reinen Gravitation in jedem Punkte (r, ϑ, φ) statt (7)

$$(17) \qquad U = M \left\{\frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^3}\left[F_2(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] + \frac{a^3}{r^4}\,F_3(\vartheta, \varphi) + \frac{a^4}{r^5}\,F_4(\vartheta, \varphi) + \cdots\right\},$$

wo $m = \omega^2 a : \frac{M}{a^2}$ ist, also das Verhältniss der Centrifugalkraft am Aequator zur Schwerkraft im mittleren Abstande a bezeichnet. Die Grösse der reinen Schwerkraft im Punkte (ϑ, φ) der gegebenen Oberfläche (5) wird folglich statt durch (15) durch die folgende Formel ausgedrückt: —

$$(18) \quad \frac{M}{a^2}\left\{1 + F_2(\vartheta, \varphi) - 3\,.\,\frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right) + 2\,F_3(\vartheta, \varphi) + 3\,F_4(\vartheta, \varphi) + \cdots\right\}.$$

Will man den Gesammtbetrag der zur gegebenen Oberfläche normalen resultirenden Kraft g (der scheinbaren Schwerkraft) finden, so hat man

von (18) die radiale Componente der Centrifugalkraft, welche (in harmonischen Functionen ausgedrückt) gleich

$$\frac{2}{3}\,\omega^2 a + \omega^2 a\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$$

ist, zu subtrahiren; es ist also

$$(19)\quad \begin{cases} g = \dfrac{M}{a^2}\Big\{1 - \dfrac{2}{3}\,m + F_2(\vartheta,\varphi) - \dfrac{5}{2}\,m\left(\dfrac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right) \\ \qquad\qquad + 2F_3(\vartheta,\varphi) + 3F_4(\vartheta,\varphi) + \cdots\Big\}. \end{cases}$$

Wenn wir in einem besonderen Falle

$F_i(\vartheta,\varphi) = 0$ [ausser für $i = 2$) und $F_2(\vartheta,\varphi) = e\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$

haben, so geht (19) über in

$$(20)\qquad g = \frac{M}{a^2}\left\{1 - \frac{2}{3}\,m - \left(\frac{5}{2}\,m - e\right)\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right\}.$$

795. Wenn also ausserhalb eines rotirenden festen Körpers die Linien der Resultante der Gravitations- und der Centrifugalkraft von einem um die Rotationsaxe symmetrischen elliptischen Sphäroid*) unter rechten Winkeln geschnitten werden, so variirt die Grösse der Resultante in den Punkten dieser Oberfläche wie das Quadrat des Sinus der Breite, und der Ueberschuss der polaren Resultante über die äquatoriale steht zum ganzen Betrage einer jeden in einem Verhältniss, welches, zur Elliptícität (§ 801) der Figur addirt, zwei und ein halb mal so gross als das Verhältniss der äquatorialen Centrifugalkraft zur Schwerkraft ist.

Satz von Clairaut. — Für den Fall einer rotirenden Flüssigkeitsmasse oder eines festen Körpers, dessen Dichtigkeit in den verschiedenen Punkten eine solche ist, als wenn der Körper flüssig wäre, wurden diese Sätze, von denen der zweite jetzt unter dem Namen des Clairaut'schen Satzes allgemein bekannt ist, zuerst von Clairaut entdeckt, der sie im Jahre 1743 in seinem berühmten Werke: *La Figure de la Terre* veröffentlichte. Laplace erweiterte dieselben, indem er die Formel (19) des § 794 für jeden festen Körper bewies, welcher aus näherungsweise kugelförmigen Schichten

*) Nach dem Vorgange der besten französischen Schriftsteller gebrauchen wir den Ausdruck Sphäroid, um irgend eine Oberfläche zu bezeichnen, welche nur sehr wenig von einer Kugel abweicht. Der in englischen Werken gewöhnliche Gebrauch, jenen Ausdruck auf ein um eine Axe symmetrisches Ellipsoid zu beschränken und ihn auch dann bei Flächen dieser Art anzuwenden, wenn dieselben nicht näherungsweise kugelförmig sind, ist verwerflich. (Auch von deutschen Schriftstellern wird der Name Sphäroid oft in dem von den Autoren hier getadelten Sinne gebraucht).

von gleicher Dichtigkeit besteht. Endlich führte Stokes*) aus, dass die Gleichung (19) ihre Geltung behält, wenn nur die auf die Gravitation allein und ebenso die auf die Resultante der Gravitation und der Centrifugalkraft bezüglichen Gleichgewichtsflächen näherungsweise kugelförmig sind, die Flächen gleicher Dichtigkeit mögen kugelförmig sein oder nicht. Eine sich hieraus ergebende Folgerung, die praktisch von der äussersten Wichtigkeit ist, ist die, dass man unabhängig von jeder Voraussetzung hinsichtlich der Vertheilung der Dichtigkeit der Erde die wahre Gestalt der Meeresoberfläche allein aus Pendelbeobachtungen bestimmen kann, ohne eine Hypothese über den Zustand des Innern der Erde aufzustellen.

Es sei der Kürze wegen

$$g\left\{1+\frac{5}{2}m\left(\frac{1}{3}-\cos^2\vartheta\right)\right\}=f(\vartheta,\varphi), \tag{21}$$

wo m (§ 801) gleich $\frac{1}{290}$ und der Werth von g durch an verschiedenen Orten angestellte Beobachtungen, sowie durch eine nach dem Quadrate des Abstandes vom Erdmittelpunkt (nicht nach der Young'schen Regel) ausgeführte Reduction auf die Meeresoberfläche bestimmt ist. Die Entwicklung dieses Ausdrucks nach harmonischen Kugelfunctionen sei

$$f(\vartheta,\varphi)=f_0+f_2(\vartheta,\varphi)+f_3(\vartheta,\varphi)+\text{u. s. w.} \tag{22}$$

Da nach (19)

$$F_i(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{i}\,\frac{f_i(\vartheta,\varphi)}{f_0} \tag{23}$$

ist, so geht die Gleichung (5) der Niveaufläche über in

$$r=a\left\{1+\frac{1}{f_0}\left[\frac{1}{2}f_2(\vartheta,\varphi+\frac{1}{3}f_3(\vartheta,\varphi)+\text{u. s. w.}\right]\right\}. \tag{24}$$

Wir wollen jetzt unsere Aufmerksamkeit für einen Augenblick auf die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks beschränken. Der explicite Werth von f_2 ist, wie sich aus Zusatz B (38) ergibt,

$$\begin{cases} f_2(\vartheta,\varphi)=A_0\left(\cos^2\vartheta-\frac{1}{3}\right)+(A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi)\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \qquad +(A_2\cos 2\varphi+B_2\sin 2\varphi)\sin^2\vartheta. \end{cases} \tag{25}$$

Wird dies in die Gleichung (24) substituirt, nachdem dieselbe aufs Quadrat erhoben ist, so erhält man, wenn man noch

$$\cos\vartheta=\frac{z}{r},\ \sin\vartheta\cos\varphi=\frac{x}{r},\ \sin\vartheta\sin\varphi=\frac{y}{r}$$

setzt und einige leichte Reductionen ausführt,

---

*) „On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth." — *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 1849.

$$(26)\quad \begin{cases} \left(f_0 + \frac{1}{3} A_0 - A_2\right) x^2 + \left(f_0 + \frac{1}{3} A_0 + A_2\right) y^2 \\ \quad + \left(f_0 - \frac{2}{3} A_0\right) z^2 - B_1 yz - A_1 zx - 2 B_2 xy = f_0 a^2. \end{cases}$$

Nun ersehen wir aus §§ 539, 534, dass, wenn OX, OY, OZ Hauptaxen der Trägheit sind, die Glieder von f_2, welche, in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt, die Producte yz, zx, xy enthalten, verschwinden müssen, d. h. es muss $B_1 = 0$, $A_1 = 0$, $B_2 = 0$ sein. Wenn aber OZ eine Hauptaxe ist, so muss, B_2 mag verschwinden oder nicht, $A_1 = 0$ und $B_1 = 0$ sein; dies ist also zu einem äusserst grossen Grade von Genauigkeit der Fall, wenn für OZ die mittlere Rotationsaxe der Erde gewählt wird, wie wir im zweiten Bande unter der durch die unten angeführten Gründe wahrscheinlich gemachten Voraussetzung beweisen werden, dass die Unvollkommenheit der Starrheit der Erde nur eine kleine oder nicht merkliche Störung der Bewegung derselben herbeiführt. Die Entwicklung (22) reducirt sich also auf

$$(27)\quad \begin{cases} f(\vartheta, \varphi) = f_0 + A_0 \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) \\ \quad + (A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi) \sin^2\vartheta + f_3(\vartheta, \varphi) + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wenn $f_3(\vartheta, \varphi)$ und die höheren Glieder vernachlässigt werden, so ist die Niveaufläche ein Ellipsoid, dessen eine Axe mit der Rotationsaxe der Erde zusammenfallen muss. Bezeichnen wir mit e die mittlere Elliptieität der Meridianschnitte, mit e' die Elliptieität des äquatorialen Schnittes und mit I die Neigung einer der Axen des letzteren gegen OX, so erhalten wir

$$e = \frac{1}{2} \frac{A_0}{f_0},\ e' = \frac{\sqrt{(A_2^2 + B_2^2)}}{f_0},\ I = \frac{1}{2} \arctan \frac{B_2}{A_2}.$$

Im Allgemeinen sind die Constanten der Entwicklung (22): f_0 (d. i. der mittlere Betrag der Schwerkraft), A_0, A_2, B_2, die sieben Coefficienten in $f_3(\vartheta, \varphi)$, die neun Coefficienten in $f_4(\vartheta, \varphi)$, u. s. w. aus Beobachtungen über die Grösse der Schwerkraft zu bestimmen, die zahlreich genug und an weit von einander entfernten Orten angestellt sein müssen.

796. Bestimmung der Gestalt der Meeresoberfläche durch Messungen der Schwerkraft. — Ein erstes approximatives Resultat, das auf diese Weise durch Pendelbeobachtungen gewonnen und durch direkte geodätische Messungen bestätigt worden ist, besteht darin, dass die Form der Meeresoberfläche sich einem abgeplatteten Rotationssphäroid nähert, dessen Elliptieität ungefähr $\frac{1}{295}$ beträgt. Beide Methoden werden in hohem Grade von den localen Unregelmässigkeiten der festen Erdoberfläche und der Dichtigkeit des Erdinnern beeinträchtigt, zu deren Elimination viele Arbeit und mathematische Geschicklichkeit mit bis jetzt nur theilweisem Erfolge aufgewendet worden sind. Wenn wir die allgemeine Vertheilung

der grossen Landzüge und Oceane betrachten, so können wir kaum daran zweifeln, dass eine sorgfältige Reduction der zahlreichen genauen Pendelbeobachtungen, welche in weit über die Erde zerstreuten Orten angestellt worden sind*), zu der Bestimmung eines Ellipsoides mit drei ungleichen Axen führen wird, welches im Ganzen mit der wahren Gestalt der Meeresoberfläche genauer als irgend ein Rotationssphäroid zusammenfällt. So lange dies nicht erreicht oder als unausführbar erwiesen ist, würde es vergeblich sein, über die Möglichkeit zu speculiren, aus erlangbaren Daten eine noch grössere Annäherung durch Einführung einer harmonischen Function dritter Ordnung [$f_3(\vartheta, \varphi)$ in (27)] zu erzielen. Es ist ferner wenig Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass sich harmonische Functionen vierter oder höherer Ordnungen je von Nutzen erweisen werden, und man muss — nach dem zuerst von Maskelyne in seiner Untersuchung der durch den Shehallien hervorgebrachten Abweichung gegebenen Beispiele — zu localen Quadraturen seine Zuflucht nehmen, um Unregelmässigkeiten in besonderen Distrikten zu erklären, mögen diese Unregelmässigkeiten nun die durch das Pendel gelieferte Grösse, oder die durch geodätische Beobachtungen bestimmte Richtung der Schwerkraft betreffen. Wir bemerken hier nur, dass die durch locale Quadraturen dargebotenen die Grösse der Schwerkraft betreffenden Probleme in demselben Grade einfacher und leichter als die auf die Richtung der Schwerkraft bezüglichen Probleme erscheinen, als Pendelbeobachtungen einfacher und leichter denn geodätische Messungen sind, und dass wir hinsichtlich unserer Erkenntniss der wahren Gestalt der Meeresoberfläche mehr von den ersteren als von den letzteren erwarten, obgleich die grössten Anstrengungen bisher gerade zur Reduction der letzteren gemacht worden sind. Wir beabsichtigen, zu diesem Gegenstande im zweiten Bande zurückzukehren, wenn wir in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie die thatsächliche Grundlage unserer Kenntniss der Schwerkraft darlegen werden.

797. Während der letzten sieben Jahre ist eine geodätische Arbeit von äusserster Wichtigkeit in der Ausführung gewesen; indem durch das Zusammenwirken der Regierungen von Preussen, Russ-

---

*) Im Jahre 1672 bewies ein von Richer von Paris nach Cayenne gebrachtes Pendel zuerst, dass die Schwerkraft an beiden Orten verschieden ist. — Capitän Kater und Dr. Thomas Young, *Trans. R. S.*, 1819. — Biot, Arago, Mathieu, Bouvard und Chaix, *Base du Système Métrique*, *Vol. III*, *Paris*, 1821. — Capitän Edward Sabine, „*Experiments to determine the Figure of the Earth by means of the Pendulum*," London, 1825. — Stokes „*On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth*," Camb. Phil. Trans., 1849.

land, Belgien, Frankreich und England die 1860 für diesen Zweck weit genug vorgeschrittene Triangulation von Frankreich, Belgien, Russland und Preussen mit der 1851 beendeten Haupttriangulation von Grossbritannien und Irland verbunden wurde. Bezüglich dieses Werkes macht Sir Henry James die folgenden Bemerkungen: — „Vor der Verbindung der Triangulationen der verschiedenen Länder in ein grosses Netz von Dreiecken, das sich über die ganze Breite von Europa erstreckt, und vor der Erfindung des elektrischen Telegraphen und seiner Anwendung von Irland bis an das Ural-Gebirge war es nicht möglich, ein so umfassendes Unternehmen wie das jetzt in Angriff genommene auszuführen. Es ist dies in der That eine Arbeit, welche in keiner früheren Periode in der Geschichte der Welt hätte ausgeführt werden können. Die genaue Bestimmung der Gestalt und der Dimensionen der Erde ist das grosse Ziel, das sich die Astronomen seit 2000 Jahren gestellt haben, und es ist ein Glück, dass wir in einer Zeit leben, in welcher die Menschen so erleuchtet sind, ein allseitig ersehntes Ziel durch gemeinsame Arbeit zu erreichen, und dies im ersten Augenblick, wo die Erreichung desselben möglich geworden ist."

Für eine kurze Zeit müssen wir noch zufrieden sein mit den aus der neuesten britischen Triangulation hergeleiteten Resultaten und mit den in Peru, Frankreich, Preussen, Russland, Indien und am Cap der guten Hoffnung ausgeführten Messungen von Meridianbogen. Die Bestimmung des mit der Meeresoberfläche für die ganze Erde am meisten übereinstimmenden Rotationsellipsoids ist von Capitän A. R. Clarke mit besonderem Geschick geschehen und im Jahre 1858 auf Befehl des „Board of Ordnance" veröffentlicht. Das Werk (ein Quartband von 780 Seiten, von denen fast jede einzelne die Resultate höchst umfangreicher und einsichtiger Arbeit zusammenfasst) ist vom Capitän Clarke unter der Leitung des Obersten (jetzt Sir Henry) James abgefasst worden. Die nachstehende Zusammenstellung der später genauer zu betrachtenden Ergebnisse hinsichtlich des mit der Meeresoberfläche am genauesten zusammenfallenden Ellipsoids von drei ungleichen Axen ist aus der Vorrede zu einem anderen neuerdings veröffentlichten Bande entnommen, welcher zu dem grossen Werke gehört, welches die britische mit den neueren Triangulationen anderer Länder verbindet*): —

*) „Comparisons of the Standards of Length of England, France, Belgium, Prussia, Russia, India, Australia, made at the Ordnance Survey Office, Southampton by Captain A. R. Clarke, under the direction of Colonel Sir Henry James." Published by order of the Secretary of State for War, 1866.

„Berechnet man die Gestalt der Meridiane und des Aequators für die verschiedenen gemessenen Meridianbogen, so ergibt sich, dass der Aequator schwach elliptisch ist, und dass die längere Axe dieser Ellipse sich in 15° 34′ östlicher Länge (von Greenwich) befindet. Auf der östlichen Halbkugel geht der Meridian 15° 34′ durch Spitzbergen, ein wenig westlich an Wien vorbei, durch die Strasse von Messina, durch den Tschadsee in Nordafrika und die Westküste von Südafrika entlang; derselbe entspricht also nahezu dem Meridian, welcher die grösste Masse Land auf jener Halbkugel berührt. Auf der westlichen Halbkugel geht dieser Meridian durch die Behringsstrasse und durch die Mitte des Stillen Oceans, entspricht also nahezu dem Meridian, welcher die grösste Wassermasse auf jener Halbkugel trifft.

„Der Meridian 105° 34′ geht durch das nördliche Eismeer, nahe am Cap Tscheljuskin (Nordost-Cap) vorbei, durch Tonkin und die Sunda-Strasse, und entspricht nahezu dem Meridian, welcher die grösste Ländermasse in Asien trifft. Auf der westlichen Halbkugel geht dieser Meridian durch den Smith-Sund in der Baffins-Bay, nahe an Montreal und New-York vorbei, zwischen Cuba und St. Domingo hindurch und die Westküste von Südamerika ganz nahe dem Meere entlang, entspricht also nahezu dem Meridiane, welcher die grösste Landmasse auf der westlichen Halbkugel berührt.

„Diese Meridiane entsprechen also den am meisten hervorstehenden Theilen des Globus.

	Engl. Fuss.
Die längste Halbaxe der äquatorialen Ellipse hat eine Länge von	20 926 350
Die kürzeste Halbaxe etc.	20 919 972
Hieraus ergibt sich die Ellipticität des Aequators gleich .	$\frac{1}{3269{\cdot}5}$
Die Polarhalbaxe ist gleich	20 853 429
Das Maximum und das Minimum der Abplattung an den Polen ist beziehungsweise	$\frac{1}{285{\cdot}97}$ und $\frac{1}{313{\cdot}38}$,
oder der Mittelwerth der Abplattung ist ganz nahezu	$\frac{1}{300}$.“

Capitän Clarke hatte schon vorher („Account of Principal Triangulation,“ 1858) für das Rotationssphäroid dieselbe Reihe von Beobachtungen aufgestellt, nämlich folgende: —

„Aequatoriale Halbaxe $= a = 20\,926\,062$ engl. Fuss
Polare Halbaxe $= b = 20\,855\,121$ „ „

also $\frac{b}{a} = \frac{293\text{·}98}{294\text{·}98}$, und Ellipticität $= \frac{a-b}{a} = \frac{1}{294\text{·}98}$.

„Bei dieser Oberfläche ist aber die Summe der Quadrate der Fehler in den Breiten 153·9939, während dieselbe bei dem Ellipsoid mit drei ungleichen Axen 138·3020 beträgt*)."

798. Fortsetzung der hydrostatischen Beispiele. — Um ein Beispiel der elementaren Principien des Gleichgewichts der Flüssigkeiten zu geben, welches lehrreich und zugleich von Nutzen ist, weil es die berühmten hydrostatischen Theorien der Ebbe und Fluth und der Gestalt der Erdoberfläche in sich schliesst, wollen wir voraussetzen, eine heterogene unzusammendrückbare Flüssigkeitsmasse von endlicher Grösse, die auf einer starren Kugelschale oder Vollkugel ruht, und welche unter der Einwirkung der zwischen ihren Theilchen wechselseitig wirkenden Gravitationskräfte und der als symmetrisch vorausgesetzten Attraction des Kugelkernes steht, werde ein wenig gestört, entweder durch irgend welche anziehende Massen, welche im Kern der Kugel oder ausserhalb der Flüssigkeit fest liegen, oder durch ein einem beliebigen Gesetz genügendes Kraftsystem, welches nur der Bedingung unterworfen ist, conservativ zu sein, oder endlich durch die Centrifugalkraft.

Zunächst bemerken wir, dass, wenn keine solche Störung vorhanden wäre, die Flüssigkeit in concentrischen Kugelschichten von gleicher Dichtigkeit zur Ruhe kommen würde, und zwar würden die Schichten nach dem Mittelpunkt zu immer dichter werden. Diese letztere Bedingung ist wesentlich, wenn das Gleichgewicht stabil sein soll. Es darf dann offenbar auch die mittlere Dichtigkeit des Kerns nicht kleiner als diejenige der ihm zunächst liegenden Flüssigkeitsschicht sein; denn sonst würde der Kern das Centrum verlassen und entweder auf einer Seite aus der Flüssigkeit heraustreten, oder (wenn die Abnahme der Dichtigkeit in der Flüssigkeit es gestattet) in einer excentrischen Lage, in der er von der Flüssigkeit ganz umhüllt wäre, zur Ruhe kommen; in beiden Fällen würde er der Bedingung (§ 762) des Gleichgewichts schwimmender Körper genügen.

799. Die Wirkung der störenden Kraft könnte sofort ohne Hülfe der Analysis bestimmt werden, wenn keine wechselseitige Anziehung zwischen den Theilen der Flüssigkeit stattfände, so dass die Einwirkung, welche die Kugelgestalt zu erhalten

*) „Comparison of Standards of Length" (1866), p. 287.

strebt, einfach die symmetrische Anziehung des festen Kernes sein würde. Denn dann wären die Flächen constanten Potentials (als direkt in den Daten enthalten) bekannt, und die Flüssigkeit würde sich (§ 750) in Schichten von gleicher Dichtigkeit anordnen, welche durch diese Flächen bestimmt wären.

800. Beispiele des § 799. — (1) Der Kern möge nach dem Newton'schen Gesetz wirken und entweder um einen Punkt herum symmetrisch sein oder (§ 526) eine beliebige andere centrobarische Anordnung haben; ferner sei die störende Einwirkung die Centrifugalkraft. Im zweiten Bande wird sich als eine unmittelbare Folgerung aus der elementaren Dynamik kreisförmiger Bewegungen ergeben, dass in jedem Falle das kinetische Gleichgewicht unter der Einwirkung der Centrifugalkraft dasselbe ist, wie das statische Gleichgewicht in dem imaginären Falle, in welchem dasselbe materielle System sich in Ruhe befindet, aber unter dem Einfluss einer dem Abstande von der Axe einfach proportionalen Abstossung von derselben steht.

Wenn z die Rotationsaxe und ω die Winkelgeschwindigkeit ist, so sind die Componenten der Centrifugalkraft (§§ 32, 35a, 259) $\omega^2 x$ und $\omega^2 y$. Folglich ist das Potential der Centrifugalkraft

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,(x^2+y^2);$$

dasselbe wird, um eine Uebereinstimmung mit der in § 485 getroffenen Bestimmung für Gravitationspotentiale zu erzielen, in der Axe als Null gerechnet und nimmt zu in der Richtung der Kraft. Der Ausdruck für die letzteren Potentiale ist (§§ 491, 528)

$$\frac{E}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}},$$

wo E die Masse des Kerns bezeichnet, und die Coordinaten von dem Schwerpunkt (§ 526) des Kerns als Anfangspunkt aus gerechnet werden. Man erhält somit die ausserhalb des Kerns gelegenen „Niveauflächen“ (§ 487), indem man in der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{E}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}+\frac{1}{2}\,\omega^2(x^2+y^2)=C$$

C verschiedene Werthe beilegt, und wenn sich die Flüssigkeit im Gleichgewicht befindet, so fallen ihre Schichten gleicher Dichtigkeit und ihre äussere Umgrenzung in diese Oberflächen. Ist ϱ die Dichtigkeit und p der Flüssigkeitsdruck in irgend einem Punkte einer dieser als Functionen von C angesehenen Oberflächen, so ist (§ 760)

$$(2)\qquad p=\int \varrho\, d\,C.$$

Wenn nicht die Flüssigkeit durch einen an ihrer Grundfläche angebrachten

Druck zurückgehalten wird, so muss das Potential von dieser Fläche aus nach innen zu zunehmen (oder die zur Oberfläche senkrechte Resultante der Schwere und der Centrifugalkraft muss nach innen zu gerichtet sein), da ein negativer Druck praktisch unzulässig ist. Wir empfehlen es dem Leser als eine interessante Uebung, die Umstände zu untersuchen, unter denen diese Bedingung erfüllt ist; es geschieht dies am besten dadurch, dass man die Meridiancurven der Schaar der durch die Gleichung (1) gegebenen Rotationsflächen verzeichnet.

Es seien a und a (1 — e) der äquatoriale und der polare Halbmesser einer dieser Oberflächen. Dann ist

$$\frac{E}{a} + \frac{1}{2}\,\omega^2 a^2 = \frac{E}{a(1-e)},$$

und daraus folgt

$$(3)\qquad e = \frac{\frac{1}{2}\,\omega^2 a}{\frac{E}{a^2} + \frac{1}{2}\,\omega^2 a} = \frac{m}{2+m},$$

wenn m das Verhältniss der Centrifugalkraft am Aequator zur reinen Schwerkraft an demselben Orte bezeichnet. (Vergl. die nahezu übereinstimmende Definition des m in § 794). Hieraus und aus der Form von (1) schliessen wir Folgendes: —

801. Im Falle einer nur geringen Abweichung von der Kugelgestalt, welcher allein für die Theorie der Gestalt der Oberfläche und der inneren Constitution der Erde von Interesse ist, sind die Umgrenzungsfläche und die Flächen gleicher Dichtigkeit und gleichen Drucks nur äusserst wenig von abgeplatteten Rotationsellipsoiden*) verschieden. Die Elliptitität**) eines jeden dieser Ellipsoide ist halb so gross als das Verhältniss der Centrifugalkraft im grössten Kreise desselben (den wir seinen Aequator nennen können) zur Schwerkraft in irgend einem Theile dieses Kreises. Die Elliptitität nimmt daher von Fläche zu Fläche nach aussen hin wie der Kubus der Radien zu. Der äquatoriale Radius der Erde beträgt 20 926 000 engl. Fuss, ihre Umlaufszeit (der siderische Tag) 86 164 Sekunden mittlere Sonnenzeit. Folglich ist in britischem absoluten Maass (§ 225) die Centrifugalkraft am Aequator $\left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 \times 20\,926\,000$

*) Airy hat die grösste Abweichung der Grenzfläche von einem genauen Ellipsoid auf 24 engl. Fuss geschätzt.

**) Dieser Ausdruck wird in den Schriften über die Gestalt der Erde dazu benutzt, das Verhältniss zu bezeichnen, in welchem die Differenz der Axen einer Ellipse zur grösseren Axe steht. Wenn also e die Elliptitität und ε die Excentricität einer Ellipse ist, so haben wir $\varepsilon^2 = 2e + e^2$. Wenn daher die Excentricität eine unendlich kleine Grösse ist, so ist die Elliptitität eine unendlich kleine Grösse von derselben Ordnung wie das Quadrat der Excentricität, und die erstere ist näherungsweise gleich der Quadratwurzel aus dem Doppelten der letzteren.

oder 0·11127. Dies ist $\frac{1}{289}$ von 32·158 oder nur sehr wenig von $\frac{1}{289}$ des durch Pendelbeobachtungen bestimmten Mittelwerthes 32·14 der scheinbaren Schwerkraft auf der ganzen Meeresoberfläche verschieden. Sie beträgt daher [§ 794 (20)] $\frac{1}{289\cdot66}$ oder näherungsweise $\frac{1}{290}$ des Mittelwerthes der wahren Schwerkraft. Wenn demnach die feste Erde bloss wie ein im Erdmittelpunkt befindlicher Massenpunkt anzöge und keine wechselseitige Anziehung zwischen den verschiedenen Theilen der See stattfände, so würde die Meeresoberfläche ein Sphäroid von der Ellipticität $\frac{1}{580}$ sein. In Wirklichkeit lehren die Beobachtungen, dass die Ellipticität des Rotationssphäroids, welches sich der Meeresoberfläche am engsten anschliesst, ungefähr $\frac{1}{295}$ ist. Die Differenz zwischen beiden Werthen, d. i. $\frac{1}{600}$, muss also in der Abweichung der wahren Schwerkraft von sphärischer Symmetrie ihren Grund haben. Danach kann man die ganze Ellipticität $\frac{1}{295}$ der wirklichen Meeresoberfläche als aus zwei nahezu gleichen Theilen bestehend ansehen, von denen der grössere $\frac{1}{580}$ direkt von der Centrifugalkraft, der kleinere $\frac{1}{600}$ von der Abweichung der anziehenden festen und flüssigen Masse von einer wirklich centrobarischen Anordnung (§ 526) herrührt. Ein wenig später (§§ 820, 821) werden wir auf diesen Gegenstand zurückkommen.

802. Die Grösse der zur freien Oberfläche der Flüssigkeit senkrechten resultirenden Kraft findet man, indem man die nach dem Mittelpunkt hin wirkende Schwerkraft mit der Centrifugalkraft verbindet, welche eine Entfernung von der Axe herbeizuführen sucht. Wenn die Abweichung von der Kugelgestalt nicht bedeutend ist, so ist jene Resultante näherungsweise gleich der Schwerkraft, vermindert um die für ihre Richtung genommene Componente der Centrifugalkraft. Da nun die erstere Componente umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes vom Centrum variirt, so wird sie am Aequator kleiner als an jedem Pole sein, und zwar um einen Betrag, dessen Verhältniss zu ihrem Mittelwerth gleich dem Doppelten der Ellipticität, und

welcher daher (§ 801) gleich der Centrifugalkraft am Aequator i
Daher ist im vorliegenden Falle die Differenz der scheinbaren Schwe
kraft an den Polen und am Aequator zur Hälfte der Centrifug
kraft, zur Hälfte der Differenz des Abstandes vom Centrum zu
schreiben. Es lässt sich leicht beweisen, dass die Grösse der schei
baren Schwerkraft vom Aequator nach den Polen hin allmälig w
das Quadrat des Sinus der Breite zunimmt, und dies nicht n
für das Resultat der Verbindung beider Ursachen der Variatio
sondern auch für jede einzelne. Diese Schlussfolgerungen bedürf
aber keines neuen Beweises, da sie bloss die Anwendungen der ob
(§ 795) bewiesenen allgemeinen Sätze von Clairaut auf den vo
liegenden Fall bilden.

Um die Sache analytisch zu behandeln, so haben wir hier

$$g = -\frac{\partial V}{dr},$$

wenn g die Grösse der Resultante der wahren Schwerkraft und der Cent
fugalkraft bezeichnet, $\frac{\partial}{dr}$ [wie in Zusatz B (g)] die für die Längeneinh
in der Richtung von r genommene Grösse der Variation und V das er
Glied von (1) in § 800 ist. Nehmen wir also

$$z^2 = r^2 \cos^2 \vartheta \text{ und } x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta,$$

so erhalten wir

$$g = \frac{E}{r^2} - \omega^2 r \sin^2 \vartheta. \tag{4}$$

Unter der Voraussetzung einer unendlich kleinen Abweichung von d
Kugelgestalt geht dies über in

$$g = \frac{E}{a^2}(1 - 2u) - \omega^2 a \sin^2 \vartheta, \tag{5}$$

wenn wir in dem ersten Theil des rechten Gliedes von (4) $r = a$ (1 +
im zweiten Theil $r = a = const.$ setzen. Aus (1) sehen wir, dass $\frac{E}{C}$
Näherungswerth für r ist, und wenn wir ihn für a nehmen, so lie
jene Gleichung

$$u = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 a^3}{E} \sin^2 \vartheta; \tag{6}$$

wird dieser Werth in (5) eingesetzt, so ergibt sich

$$g = \frac{E}{a^2}\left(1 - 2\frac{\omega^2 a^3}{E} \sin^2 \vartheta\right) = \frac{E}{a^2}(1 - 2m \sin^2 \vartheta), \tag{7}$$

wo m wie früher das Verhältniss bezeichnet, welches die Centrifugalk
am Aequator zur Schwerkraft hat.

803. Fortsetzung der Beispiele des § 799. — (2).
werde, während der Kern fixirt ist, die Flüssigkeit auf ihrer Oberflä

lurch die Attraction eines weit entfernten festliegenden Körpers gestört, welcher nach dem Newton'schen Gesetz anzieht.

Es seien r, ϑ Polarcoordinaten, bezogen auf den Schwerpunkt des Kerns als Anfangspunkt und die Linie vom Schwerpunkt zu dem störend inwirkenden Körper als Axe; ferner sei wie früher E die Masse des Kerns, endlich M die Masse des störenden Körpers und D seine Entfernung von dem Centrum des Kerns. Dann ist die Gleichung der Flächen constanten Potentials

$$8)\qquad \frac{E}{r} + \frac{M}{\sqrt{(D^2 - 2rD\cos\vartheta + r^2)}} = const.,$$

und dies geht für sehr kleine Werthe von $\frac{r}{D}$ näherungsweise über in

$$9)\qquad \frac{E}{r} + \frac{M}{D}\left(1 + \frac{r}{D}\cos\vartheta\right) = const.$$

Setzen wir, wie wir in entsprechenden Fällen thaten, $r = a\,(1 + u)$, wo a ein genauer Mittelwerth von r und u eine unendlich kleine numerische Grösse, eine Function von ϑ, ist, so erhalten wir schliesslich

$$10)\qquad u = \frac{M.a^2}{E.D^2}\cos\vartheta.$$

Dies ist eine harmonische Kugelflächenfunction erster Ordnung, und nach 789 schliessen wir daraus Folgendes: —

Die Flüssigkeit wird ihre Kugelgestalt nicht verlieren, sondern nach dem störenden Körper hin gezogen werden, so dass ihr Mittelpunkt vom Mittelpunkt des Kerns um eine Strecke abweicht, welche sich zum Radius des Kerns verhält wie die Attraction des störenden Körpers auf einen Punkt der Oberfläche der Flüssigkeit zu derjenigen des Kerns auf denselben Punkt. Für Erde und Mond ist der Werth dieses Verhältnisses ungefähr $\frac{1}{300000}$ $\left(\text{nämlich } \frac{1}{83 \times 60 \times 60}\right)$, da der Abstand des Mondes vom Mittelpunkt der Erde ungefähr 60 Erdradien und die Masse des Mondes $\frac{1}{83}$ der Erdmasse beträgt. Wenn also die Mittelpunkte der Erde und des Mondes beide festgehalten würden, so würde in dem dem Monde zunächst liegenden Punkte der Erde eine Erhöhung der Meeresfläche um $\frac{1}{300000}$ des Erdradius, d. i. ungefähr 70 engl. Fuss eintreten, und ebenso viel würde in dem vom Monde am weitesten entfernten Punkte die Senkung der Meeresoberfläche betragen. Wenn wir den Einfluss der Sonne unter ähnlichen, freilich nicht der Wirklichkeit entsprechenden Umständen betrachten, so erhalten wir auf der der

Sonne zunächst liegenden Erdseite eine Fluth von 12,500 engl. Fuss Erhebung und auf der entgegengesetzten Seite ein Fallen von demselben Betrage $\left[\text{d. i. (§ 812) } \frac{1}{38{\cdot}7\times 10^6} \text{ des Abstandes der Sonne}\right]$.

804. Fortsetzung der Beispiele des § 799. — (3) Es werde jetzt, während die übrigen Bedingungen dieselben wie in Beispiel (2), § 803 bleiben, die eine Hälfte des störenden Körpers entfernt und in gleicher Entfernung auf der anderen Seite befestigt.

Statt (8) haben wir jetzt als Gleichung der Flächen constanten Potentials

$$(11)\quad \frac{E}{r}+\frac{1}{2}M\left[\frac{1}{\sqrt{(D^2-2rD\cos\vartheta+r^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(D^2+2rD\cos\vartheta+r^2)}}\right]=const.,$$

und für ein sehr kleines $\frac{r}{D}$ ergibt sich jetzt statt (9) als erste Annäherung

$$(12)\qquad \frac{E}{r}+\frac{M}{D}\left[1+\frac{1}{2}\frac{r^2}{D^2}(3\cos^2\vartheta-1)\right]=const.,$$

woraus endlich statt (10) und bei Benutzung einer entsprechenden Bezeichnung

$$(13)\qquad u=\frac{1}{2}\frac{M.a^3}{E.D^3}(3\cos^2\vartheta-1)$$

folgt. Dies ist eine harmonische Kugelflächenfunction zweiter Ordnung und $\frac{M.a^3}{E.D^3}$ ist ein Viertel des Verhältnisses, in welchem die Differenz zwischen den Werthen, welche die Anziehung des Mondes beziehungsweise auf den ihm zunächst liegenden und den von ihm am weitesten abstehenden Theil der Erdoberfläche hat, zur Grösse der terrestrischen Schwere steht. Daraus geht Folgendes hervor: —

Die Flüssigkeit wird unter der vorausgesetzten störenden Einwirkung die Form eines verlängerten Ellipsoides annehmen, dessen lange Axe in die Verbindungslinie der beiden störenden Körper fällt, und dessen Ellipticität (§ 801) gleich $\frac{3}{4}$ des Verhältnisses ist, in welchem die Differenz der Attractionen eines der störenden Körper auf die ihm zunächst liegenden und die am weitesten von ihm entfernten Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit zur Grösse der Attraction steht, welche der Kern auf die Oberfläche ausübt. Setzen wir z. B. voraus, der Mond werde in zwei gleiche Theile getheilt und diese Theile auf entgegengesetzten Seiten der Erde befestigt, so dass der Abstand eines jeden von der Erde gleich dem mittleren Mondabstand wäre. Die Niveaufläche, welche die

Erde unter dieser Einwirkung erhielte, würde die Ellipticität $\frac{3}{2 \times 60 \times 300\,000}$ oder $\frac{1}{12\,000\,000}$ haben, und die ganze Höhendifferenz vom höchsten zum niedrigsten Punkte würde ungefähr $1^3/_4$ engl. Fuss betragen. Im zweiten Bande bei der Darlegung der kinetischen Theorie der Ebbe und Fluth werden wir vielfach Gelegenheit haben, obige Hypothese zu benutzen. Wir werden sehen, dass dieselbe (oder eine äquivalente Hypothese) unentbehrlich ist für Laplace's verschwindende tägliche Fluth auf einem festen Sphäroid, das mit einem überall gleich tiefen Ocean bedeckt ist. Andererseits wird sich alsbald (§ 814) zeigen, dass diese Hypothese sehr nahe mit den wirklich vorhandenen Umständen in Uebereinstimmung steht, so weit es sich um die Begründung der Gleichgewichtstheorie handelt.

805. Das Steigen und Fallen des Wassers in irgend einem Punkte der Erdoberfläche können wir uns jetzt dadurch hervorgebracht denken, dass wir diese beiden störenden Körper (Mond und Gegenmond, wie wir sie der Kürze wegen nennen wollen) einmal in 24 Mondstunden um die Erdaxe rotiren lassen, so dass ihre Verbindungslinie mit dem Erdäquator einen der Declination des Mondes beständig gleichen Winkel bildet. Wenn wir annehmen, dass in jedem Augenblick die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts erfüllt ist, d. h. dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit zur resultirenden Kraft senkrecht ist, so erhalten wir die sogenannte „Gleichgewichtstheorie der Ebbe und Fluth“.

806. Correction der Gleichgewichtstheorie. — Aber auch nach dieser Gleichgewichtstheorie würde das Steigen und Fallen an einem Orte ganz falsch geschätzt werden, wenn man es [und das geschieht, glauben wir, allgemein] als das Steigen und Fallen der sphäroidalen Oberfläche ansähe, welche das Wasser begrenzen würde, wenn kein trockenes Land (kein unbedeckter fester Körper) vorhanden wäre. Dies zu erläutern, denken wir uns, der Ocean bestände aus zwei kreisförmigen Seen *A* und *B*, deren Mittelpunkte auf dem Aequator 90° von einander entfernt lägen, und die durch einen engen Canal mit einander in Verbindung ständen. Im Verlauf von 12 Mondstunden würde die Oberfläche des Sees *A* steigen und fallen, die von *B* gleichzeitig fallen und steigen, und es würden in diesem Zeitabschnitte die Maxima der Abweichungen von der mittleren Niveaufläche eintreten. Wenn die Flächen der beiden Seen gleich

wären, so würden auch die Ebben und Fluthen beider gleich sein und in einem jeden ungefähr 1 engl. Fuss Senkung und Hebung von der mittleren Niveaufläche aus betragen. Anders dagegen würde es sich verhalten, wenn die Flächen der beiden Seen ungleich wären. Wenn der Durchmesser des grösseren Sees nur ein kleiner Theil des Erdquadranten, z. B. nicht mehr als 20° ist, so verhalten sich die Höhen, um welche das Wasser in beiden Seen steigt und fällt, bis zu einem grossen Grade von Genauigkeit umgekehrt wie die Flächen derselben. Ist z. B. der Durchmesser von B nur $\frac{1}{10}$ des Durchmessers von A, so wird das Steigen und Fallen in A kaum wahrnehmbar sein, während die Oberfläche von B von ihrer mittleren Lage aus um ungefähr 2 Fuss steigt und fällt, ganz wie das Steigen und Fallen des Quecksilbers in dem offenen Ende eines Gefässbarometers nur klein ist im Vergleich zum Fallen und Steigen in der Röhre. Oder wenn zwei grosse Seen A, A' sich an den entgegengesetzten Enden eines äquatorialen Durchmessers, zwei andere kleine Seen B, B' sich an den Enden des zum ersteren senkrechten äquatorialen Durchmessers, endlich zwei kleine Seen C, C' sich an den Enden der Polaraxe befinden, und wenn selbst der grösste dieser mit einander durch Canäle oder unterirdische Tunnel in freier Verbindung stehenden sechs Seen sich nur über einen kleinen Theil der gekrümmten Erdoberfläche erstreckt, so werden in den Seen A, A' keine merklichen Ebben und Fluthen eintreten; in B und B' wird sich das Wasser 2 Fuss über seine mittlere Höhe erheben, wenn der Mond oder der Gegenmond im Zenith steht, und um gleichfalls 2 Fuss unter seine gewöhnliche Höhe hinabsinken, wenn der Mond auf- oder untergeht; in C und C' endlich werden Ebben und Fluthen eintreten, bei welchen das Steigen und Fallen des Wassers von der mittleren Höhe aus 1 Fuss beträgt, und zwar ist die Zeit niedrigen Wasserstandes die, wenn der Mond oder der Gegenmond im Meridian von A, die Zeit hohen Wasserstandes die, wenn Mond oder Gegenmond im Horizont von A stehen. Der einfachste Weg, den Fall für die hier vorausgesetzten äussersten Umstände zu behandeln, besteht darin, dass man erstens die sphäroidale Oberfläche betrachtet, welche das Wasser in irgend einem Augenblick begrenzen würde, wenn kein trockenes Land vorhanden wäre, und sodann sich vorstellt, diese ganze Oberfläche würde ringsherum um so viel erniedrigt oder erhöht, als erforderlich ist, damit die Höhe in A und in A' keine Aenderung erleide. Oder wenn sich in irgend einem Theile der Erde ein grosser See A befindet, der durch Canäle mit

kleinen Seen in Verbindung steht, welche über verschiedene Theile der Erdoberfläche vertheilt sind und im Ganzen im Vergleich zu A nur eine kleine Wasserfläche haben, so erhält man die Fluthhöhe in jedem dieser kleineren Seen, indem man eine sphäroidale Fläche zieht, in welcher die Differenz zwischen dem grössten und dem kleinsten Radius zwei Fuss beträgt, und, ohne den Mittelpunkt zu verrücken, jeden Radius um eine solche Länge (diese ist für alle kleineren Seen dieselbe) vergrössert oder verkleinert, dass das Steigen oder Fallen in A in Abrechnung gebracht wird.

807. Dass das Steigen und Fallen an einem Orte fast ganz ausser Acht gelassen, an einem anderen Orte verdoppelt werden kann, ist indessen nur unter der von uns gemachten Voraussetzung möglich, dass es eine Wassermasse gebe, welche grösser sei als alle übrigen zusammen und dabei selbst nur einen kleinen Theil der Erdoberfläche bedecke. Wenn wir uns an die wirkliche Vertheilung von Land und Wasser auf der Erdoberfläche halten, so müssen wir von dem Radius des Sphäroids, welches das Wasser umgrenzen würde, wenn kein Land vorhanden wäre, eine gewisse positive oder negative Grösse α subtrahiren; α wird nach der Lage des Mondes und mit Rücksicht auf die Bedingung bestimmt, dass das Volumen des Wassers unverändert bleibe; auch hat diese Grösse α für alle Punkte des Meeres zu der nämlichen Zeit denselben Werth. Viele, welche über die Ebbe und Fluth geschrieben haben, haben dieses einleuchtende und wesentliche Princip übersehen; wir kennen in der That nur einen bisher veröffentlichten Satz*), welcher ein Bewusstsein dieses Princips verräth.

808. Die Grösse α ist eine harmonische Kugelfunction zweiter Ordnung der Declination des Mondes und des Stundenwinkels, vom Meridian von Greenwich aus gezählt. Die fünf constanten Coefficienten dieser Function hängen bloss von der Configuration von Land und Wasser ab und können leicht bestimmt werden durch nothwendiger Weise sehr mühselige Quadraturen, deren Data sich aus der Betrachtung guter Landkarten ergeben.

Es sei wie oben

$$r = a(1 + u) \tag{14}$$

die sphäroidale Niveaufläche, welche das Wasser begrenzen würde, wenn dasselbe den festen Erdkörper bedeckte; u ist durch § 804 (13) gegeben.

*) „Rigidity of the Earth," § 17, *Phil. Trans.*, 1862.

Bezeichnet nun $\int\int d\sigma$ eine sich über die ganze Meeresfläche erstreckende Integration, so drückt

$$a\int\int u\,d\sigma$$

die (je nach der Beschaffenheit des Falles positive oder negative) Grösse aus, welche zum Volumen addirt werden muss, damit das Wasser überall auf dieser Höhe sich erhalte. Um diese Volumenänderung zu beseitigen, müssen wir voraussetzen, die ganze Oberfläche werde überall gleichmässig um einen (positiven oder negativen) Betrag α von solcher Grösse erniedrigt, dass dadurch die Zunahme des Volumens aufgehoben werde. Ist also Ω die ganze Meeresoberfläche, so erhalten wir

$$\alpha' = \frac{a\int\int u\,d\sigma}{\Omega}, \tag{15}$$

und

$$\mathfrak{r} = r - \alpha = a\left\{1 + u - \frac{\int\int u\,d\sigma}{\Omega}\right\} \tag{16}$$

ist die berichtigte Gleichung der sphäroidalen Niveaufläche des Meeres. Hieraus folgt

$$h = a\left\{u - \frac{\int\int u\,d\sigma}{\Omega}\right\}, \tag{17}$$

wo h die Erhebung der Meeresoberfläche an irgend einem Orte über die Höhe bezeichnet, welche dieselbe einnehmen würde, wenn der Mond entfernt wäre.

Um die Gleichung (15) zu entwickeln, setzen wir zunächst der Kürze wegen

$$e = \frac{3}{2}\,\frac{M.a^3}{E.D^3}, \tag{18}$$

wodurch (13) in

$$u = e\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) \tag{19}$$

übergeht. Es seien nun l und λ beziehungsweise die geographische Breite und die westliche Länge des Ortes, welchem u entspricht; ferner seien ψ und δ der vom Meridian von Greenwich gerechnete Stundenwinkel und die Declination des Mondes. Da ϑ die Zenithdistanz des Mondes an jenem Orte ist, so ist nach der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\vartheta = \cos l\cos\delta\cos(\lambda - \psi) + \sin l\sin\delta,$$

und dies liefert

$$\left\{\begin{aligned}&3\cos^2\vartheta - 1 = \frac{3}{2}\cos^2 l\cos^2\delta\cos 2(\lambda - \psi)\\ &+ 6\sin l\cos l\sin\delta\cos\delta\cos(\lambda - \psi) + \frac{1}{2}(3\sin^2\delta - 1)(3\sin^2 l - 1).\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Wenn wir also mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ fünf Integrale bezeichnen, welche nur von der Vertheilung von Land und Wasser abhängen, und welche durch die folgenden Ausdrücke definirt sind: —

$$
(21)\quad \begin{cases}
\mathfrak{A} = \frac{1}{\Omega}\iint \cos^2 l \cos 2\lambda\, d\sigma \\
\mathfrak{B} = \frac{1}{\Omega}\iint \cos^2 l \sin 2\lambda\, d\sigma \\
\mathfrak{C} = \frac{1}{\Omega}\iint \sin l \cos l \cos\lambda\, d\sigma \\
\mathfrak{D} = \frac{1}{\Omega}\iint \sin l \cos l \sin\lambda\, d\sigma \\
\mathfrak{E} = \frac{1}{\Omega}\iint (3\sin^2 l - 1)\, d\sigma, \\
\text{wo natürlich } d\sigma = \cos l\, dl\, d\lambda \text{ ist,}
\end{cases}
$$

so erhalten wir

$$
(22)\quad \begin{cases}
\alpha = \frac{a}{\Omega}\iint u\, d\sigma \\
\quad = \frac{1}{3}\, a e \Big\{\frac{3}{2}\cos^2\delta(\mathfrak{A}\cos 2\psi + \mathfrak{B}\sin 2\psi) \\
\qquad + 6\sin\delta\cos\delta(\mathfrak{C}\cos\psi + \mathfrak{D}\sin\psi) + \frac{1}{2}\mathfrak{E}(3\sin^2\delta - 1)\Big\}.
\end{cases}
$$

Wird diese Formel in Verbindung mit (19) und (20) auf (17) angewandt, so erhält man als Gesammtergebniss der Gleichgewichtstheorie

$$
(23)\quad \begin{cases}
h = \\
\frac{ae}{2}\left[(\cos^2 l\cos 2\lambda - \mathfrak{A})\cos 2\psi + (\cos^2 l\sin 2\lambda - \mathfrak{B})\sin 2\psi\right]\cos^2\delta \\
+ 2ae\left[(\sin l\cos l\cos\lambda - \mathfrak{C})\cos\psi + (\sin l\cos l\sin\lambda - \mathfrak{D})\sin\psi\right]\sin\delta\cos\delta \\
+ \frac{1}{6}ae(3\sin^2 l - 1 - \mathfrak{E})(3\sin^2\delta - 1),
\end{cases}
$$

wo der Werth von e aus (18) für die Sonne oder für den Mond genommen werden kann, und δ und ψ die Declination und den von Greenwich aus gerechneten Stundenwinkel der Sonne, respective des Mondes bezeichnen. In diesem Ausdrucke können wir natürlich die halbtäglichen Glieder auf die Form $A\cos(2\psi - \varepsilon)$ und die täglichen Glieder auf die Form $A'\cos(\psi - \varepsilon')$ reduciren. Die Interpretation derselben führt zu den folgenden Schlüssen: —

809. In der Gleichgewichtstheorie wird die durch das Zusammenwirken der Sonne und des Mondes hervorgebrachte Aenderung der Höhe in irgend einem Punkte des Meeres durch die Summe von sechs Gliedern ausgedrückt, von denen drei sich auf jeden dieser beiden Weltkörper beziehen.

(1) Die halbtägige Mond- oder Sonnenfluth steigt und fällt proportional einer einfach harmonischen Function des vom Meridian von Greenwich aus gerechneten Stundenwinkels; diese Function hat zur Periode 180° dieses Winkels (oder, durch die Zeit ausgedrückt, die halbe Periode der Rotation der Erde), und ihre

Amplitude variirt einfach proportional dem Quadrate des Cosinus der Declination der Sonne, respective des Mondes, variirt demgemäss nur langsam und zwischen wenig von einander entfernten Grenzen.

(2) Die tägliche Mond- oder Sonnenfluth variirt wie eine einfache harmonische Function des Stundenwinkels von der Periode 360° oder vier und zwanzig Stunden; ihre Amplitude variirt immer einfach proportional dem Sinus der doppelten Declination des störenden Körpers und geht daher in der tropischen*) Periode jedes der beiden Körper in seinem Umlauf vom positiven Maximum zum negativen und wieder zum positiven Maximum zurück.

(3) Die vierzehntägige Mond- oder die halbjährliche Sonnenfluth ist eine Variation der mittleren Wasserhöhe für die 24 Mond- oder die 24 Sonnenstunden, nach welcher das Wasser im Ganzen, wenn die Declination des störenden Körpers Null ist, um den Aequator herum höher und an den Polen tiefer ist, als wenn die Declination einen anderen nördlichen oder südlichen Werth hat, und das Wasser an den Polen am höchsten und am Aequator am niedrigsten steht, wenn die Declination ihren grössten, nördlichen oder südlichen, Werth hat. Gauss' Art, die Umstände, von welchen die „säcularen" Variationen in den Elementen des Sonnensystems abhängen, auszudrücken, ist zur Erklärung dieser Componente der Fluthen geeignet. Es mögen die zwei Parallelkreise der nördlichen und südlichen Declination des Mondes und Gegenmondes zu irgend einer Zeit auf einer geocentrischen Kugelfläche, deren Radius gleich dem Abstande des Mondes ist, gezogen und auf jedem dieser Kreise die Hälfte der Mondmasse vertheilt werden. Da diese Massenkreise alle vierzehn Tage allmälig vom Aequator zur grössten Declination und wieder zurück variiren, so wird die erzeugte Fluth lediglich und genau die „vierzehntägige Fluth" sein.

810. Correctionen der gewöhnlichen Gleichgewichtstheorie. — Nach der Gleichgewichtstheorie, wie sie gewöhnlich ausgesprochen wird, ist an irgend einem Orte hoher Wasserstand der halbtägigen Fluth genau zur Zeit, wenn der störende Körper, oder sein Entgegengesetztes den Meridian des Ortes passirt; die Höhe des Wassers dieser Fluth ist für alle Orte derselben Breite die nämliche, und für Orte verschiedener Breite dem Quadrat des Cosinus

*) Die tropische Periode unterscheidet sich von der siderischen dadurch, dass sie nicht von einer im Raume festliegenden Linie, sondern von dem ersten Punkte des Widders aus gerechnet wird; die Differenz beider beträgt nur einen Tag in 26 000 Jahren.

der Breite proportional, also z. B. an jedem Pole gleich Null. Nach der berichtigten Gleichgewichtstheorie kann hoher Wasserstand der halbtägigen Fluthen vor und nach dem Durchgang des störenden Körpers durch den Meridian stattfinden; auch ist die Wasserhöhe an verschiedenen Orten derselben Breite sehr verschieden und jedenfalls nicht Null an den Polen.

Nach der Gleichgewichtstheorie, wie sie gewöhnlich ausgesprochen wird, findet auf der nördlichen Erdhälfte genau zur Zeit des Durchgangs, jenachdem die Declination des Körpers eine nördliche oder eine südliche ist, hoher oder niedriger Wasserstand der täglichen Fluthen statt, und die Grösse des Steigens oder Fallens ist einfach proportional dem Sinus der doppelten Breite, also sowohl am Aequator wie an den Polen gleich Null. Nach der berichtigten Gleichgewichtstheorie kann hoher Wasserstand lange vor oder nach der Zeit des Durchgangs eintreten; sein Betrag ist für verschiedene Orte derselben Breite sehr verschieden und weder am Aequator, noch an den Polen gleich Null. Nach dem gewöhnlichen Ausspruch der Theorie findet keine vierzehntägige Mond- oder halbjährliche Sonnen-Fluth in der Breite $35^{0}16'$ $\left(\text{es ist dies } \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ statt, und in anderen Breiten ist ihr Betrag proportional den Abweichungen der Quadrate ihrer Sinus von dem Werthe $^1/_3$. Nach der berichtigten Gleichgewichtstheorie ist jede dieser Fluthen noch constant in constanter Breite und verschwindet in einer gewissen Breite, während sie in allen anderen Breiten einfach proportional ist der Abweichung der Quadrate ihrer Sinus von dem Quadrat des Sinus der Breite, in welcher sie Null ist. Die Breite, in welcher es keine Fluth dieser Art gibt, ist aber nicht $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$, sondern $\arcsin \sqrt{\frac{1+\mathfrak{C}}{3}}$, wo $\mathfrak{C}$ der Mittelwerth ist, welchen $3 \sin^2 l - 1$ für den ganzen mit Wasser bedeckten Theil der Erdoberfläche hat, eine Grösse, welche sich durch eine mühsame Quadratur aus hinlänglich vollständigen geographischen Daten in Betreff der Küstenlinien der ganzen Erde leicht bestimmen lässt.

Da die vierzehntägigen und halbjährlichen Fluthen thatsächlich höchst wahrscheinlich nur wenig von dem Gleichgewichtsgesetz abweichen, so ist es von grosser Bedeutung, jene Grösse zu ermitteln. Wir bedauern, dass wir bisher noch nicht im Stande gewesen sind, diese Arbeit zu unternehmen. Umgekehrt ist es wahrscheinlich, dass eine sorgfältige Bestimmung der vierzehntägigen und halb-

jährlichen Fluthen an verschiedenen Orten durch passende Reductionen der Fluthbeobachtungen zur Bereicherung unserer geographischen Kenntnisse über die Grösse der Wasseroberfläche in den bisher unerforschten Theilen der arctischen und antarctischen Regionen beitragen wird.

811. **Spring- und Nippfluthen, Verfrühung und Verzögerung.** — Die Superposition der halbtägigen Sonnen- und der halbtägigen Mondfluth ist oben als ein Beispiel der Zusammensetzung einfacher harmonischer Bewegungen behandelt worden, und die wohlbekannten Erscheinungen der „Springfluthen" und der „Nippfluthen", sowie der „Verfrühung" und der „Verzögerung" sind erklärt (§ 60). Wir haben jetzt nur noch hinzuzufügen, dass die Beobachtung beweist, dass die verhältnissmässige Differenz zwischen den Höhen der Springfluthen und der Nippfluthen, und der Betrag der Verfrühung und der Verzögerung an fast allen Orten viel kleiner ist, als in § 60 unter der Voraussetzung des Gleichgewichts bestimmt wurde, sowie dass diese Grössen in verschiedenen Orten sehr verschieden sind, was, wie wir im zweiten Bande sehen werden, sich nach der kinetischen Theorie auch erwarten lässt.

812. **Einfluss des Mondes und der Sonne auf die scheinbare terrestrische Schwerkraft.** — Die in der vorhergehenden Untersuchung benutzten Potentialausdrücke sind ohne Weiteres passend für das hydrostatische Problem (§§ 802, 804). Es ist aber von Interesse, in Verbindung mit diesem Problem zu bestimmen, wie gross der störende Einfluss ist, welchen der Mond oder die Sonne auf die scheinbare terrestrische Schwerkraft in irgend einem Punkte der Erdoberfläche ausübt. Wir werden daher — indem wir die passende statische Hypothese des § 804 noch beibehalten — geeignete rechtwinklige Componenten für die Resultante der in jener Hypothese angenommenen beiden nahezu gleichen und nahezu entgegengesetzten störenden Kräfte bestimmen. Zunächst bemerken wir, dass diese beiden Kräfte annäherungsweise äquivalent sind einer Kraft, welche gleich ihrer Differenz ist und in einer der Verbindungslinie der Centren der Erde und des Mondes parallelen Richtung wirkt, und einer zweiten zu dieser ersteren senkrechten Kraft, welche gleich dem doppelten Product aus einer jener Kräfte in den Cosinus des halben stumpfen Winkels ist, den sie einschliessen.

Wenn wir jede dieser Componenten längs des durch den Ort gehenden Erdradius und senkrecht zu diesem Radius in Componenten

zerlegen, so erhalten wir durch ein Verfahren, dessen Einzelheiten wir dem Leser als Uebungsaufgabe überlassen, die folgenden, im Gravitationsmaass ausgedrückten Resultate: —

Die verticale Componente, die aufwärts wirkt, ist

$$= \frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3 (2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).$$

Die horizontale Componente, die nach einem Punkte des Horizonts unter dem Mond oder Gegenmond wirkt, ist

$$= 3\,\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3 \sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Hier bezeichnen, wie früher, E und M die Massen der Erde und des Mondes, D den Abstand ihrer Mittelpunkte, a den Erdradius und ϑ die Zenithdistanz des Mondes.

Dieselben Ausdrücke erhalten wir auch aus dem Potentialausdruck (12), indem wir an demselben die durch $\frac{d}{dr}$ und $\frac{d}{r d\vartheta}$ ausgedrückten Operationen ausführen.

Die verticale Componente hat einen aufwärts wirkenden Maximalwerth, wenn Mond oder Gegenmond im Zenith stehen; dieses Maximum beträgt

$$2\,\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3;$$

sie hat einen abwärts wirkenden halb so grossen Maximalwerth, wenn der Mond im Horizont ist. Die horizontale Componente ist ein Maximum, das sich auf

$$\frac{3}{2}\,\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3$$

beläuft, wenn der Mond oder der Gegenmond 45° über dem Horizont ist. Aehnliche Sätze gelten natürlich für den störenden Einfluss der Sonne. Für den Mond ist $\frac{M}{E}\left(\frac{a}{D}\right)^3$ wahrscheinlich ungefähr gleich $\frac{1}{83\times(60{\cdot}3)^3}$ oder $\frac{1}{18{\cdot}2\times10^6}$, und das entsprechende Maass des Sonneneinflusses ist nur sehr wenig von $\left(1+\frac{1}{83}\right)\left(\frac{27{\cdot}3}{365}\right)^2\frac{1}{(60{\cdot}3)^3}$ oder $\frac{1}{39{\cdot}1\times10^6}$ verschieden. Wenn nun der Mond oder Gegenmond an jedem Orte der Erdoberfläche vom Horizont zum Zenith steigt, so wird die Intensität der scheinbaren Schwerkraft um etwa $\frac{1}{6\,000\,000}$

vermindert, und das Senkblei wird nach dem unter dem Mond oder Gegenmond liegenden Punkt des Horizonts um einen Betrag abgelenkt, welcher seinen grössten Werth, d. i. $\frac{1}{12 \times 10^6}$ der Winkeleinheit ($57{\cdot}3^0$) erreicht, wenn die Höhe des Mondes 45^0 ist. Die entsprechenden Einwirkungen der Sonne sind ungefähr halb so gross.

813. Fortsetzung der Beispiele des § 799. — (4) **Erklärung der Fluth erzeugenden Einwirkung durch die Centrifugalkraft.** — Es seien alle anderen Umstände wie im Beispiel (2); es mögen aber die beiden Körper nicht fest sein, sondern in Kreisen um ihren gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkt mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit rotiren, dass die Centrifugalkraft, die jedem derselben ertheilt wird, gleich der Attractionskraft ist, die der andere Körper auf ihn ausübt.

Es sei der Mittelpunkt der Erde der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten und OZ senkrecht zur Ebene der kreisförmigen Bahnen; ferner möge die Axe OX sich so drehen, dass sie beständig durch den störenden Körper geht. Verfahren wir dann mit der Centrifugalkraft nach der Potentialmethode wie in § 794, so erhalten wir für die Gleichung einer Oberflächenschaar, welche die Resultirende der Schwere und der Centrifugalkraft überall unter rechten Winkeln schneiden,

$$(24) \quad \frac{E}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} + \frac{M}{\sqrt{[(D-x)^2+y^2+z^2]}} + \frac{1}{2}\,\omega^2[(b-x)^2+y^2] = const.,$$

wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der beiden Körper um ihren Trägheitsmittelpunkt und b den Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkt der Erde bezeichnen, so dass

$$(25) \qquad M(D-b)\,\omega^2 = E\,b\,\omega^2 = \frac{ME}{D^2}$$

ist. Folglich ist

$$\frac{Mx}{D} - \omega^2 b\, x = 0.$$

Wird dies in der Formel (24) angewandt, nachdem dieselbe entwickelt und allgemein wie (12) in Beispiel (3) behandelt worden ist, so sehen wir, dass die erste Potenz von x verschwindet, und wenn wir die Glieder dritter und höherer Ordnungen weglassen, so erhalten wir

$$(26) \qquad \frac{E}{r} + \frac{M}{D}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{3x^2 - r^2}{D^2}\right) + \frac{1}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) = const.$$

Um dies auf harmonische Kugelfunctionen zu reduciren, haben wir

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\,r^2 - \frac{1}{3}\,(3z^2 - r^2);$$

folglich erhalten wir, da wir bei der Annäherung, die wir fordern, $\omega^2 a^2$ für $\omega^2 r^2$ nehmen können [wenn wie oben die Bezeichnung $r = a(1 + \sigma)$ angewendet wird]

$$(27)\begin{cases} u = \frac{1}{2}\frac{Ma}{ED}\cdot\frac{3x^2 - r^2}{D^2} - \frac{1}{6}\,\omega^2\,\frac{a}{E}\,(3z^2 - r^2), \\ \text{oder in Polarcoordinaten} \\ u = \frac{1}{2}\frac{Ma^3}{ED^3}\,(3\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - 1) - \frac{1}{6}\,\frac{\omega^2 a^3}{E}\,(3\cos^2\vartheta - 1). \end{cases}$$

Interpretirt lehrt diese Formel Folgendes: —

Die Oberfläche der Flüssigkeit wird ein harmonisches Sphäroid zweiter Ordnung [d. h. (§ 779) ein Ellipsoid, welches nur unendlich wenig von einer Kugel verschieden ist] sein, welches wir betrachten können als das Resultat der Superposition der in § 804 betrachteten Abweichung von der Kugelgestalt und einer zweiten Abweichung, die in der Abplattung besteht, welche aus der Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den zur Ebene der Bahn des störenden Körpers senkrechten Erdradius herrührt. Wir können diesen Satz, ohne so viel mathematische Analysis anzuwenden, auch dadurch beweisen, dass wir voraussetzen, das rein statische System des Beispiels (3) rotire zuerst mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit ω um irgend einen Erddurchmesser, welcher senkrecht zu der durch das Centrum gehenden geraden Linie ist, in die man die störenden Körper gesetzt hat, und dass wir weiter annehmen, diese Winkelgeschwindigkeit sei eine solche, dass die von der Erde auf die beiden störenden Körper ausgeübte Attraction aufgehoben werde, so dass die Klammern, durch welche ein Zusammenfallen der Körper verhindert würde, entfernt werden können. Dann ist es leicht, analytisch zu beweisen, dass, wenn man einen der störenden Körper auf die andere Seite bringt und ihn mit dem zweiten vereinigt, die Wirkung eine kleine Störung in der Gestalt der Flüssigkeit sein wird, die sich zu der im Beispiel (3) untersuchten Störung verhält, wie der Erdradius zu dem Abstande des störenden Körpers.

814. Das rein statische System des Beispiels (3) liefert die einfachste und am meisten symmetrische Grundlage für die Gleichgewichtstheorie der Fluthen. Zwar ist das kinetische System des Beispiels (4) nicht weniger rein statisch in Beziehung auf die Erde und einem absolut statischen imaginären System äquivalent, in welchem die Centrifugalkraft des rotirenden Systems ersetzt ist durch eine auf Theile eines nicht rotirenden Systems ausgeübte Abstossung von einer festen Linie. Doch ist dasselbe nicht so einfach, wegen der durch die Centrifugalkraft oder die Abstossung erzeugten Abplattung der Oberfläche der Flüssigkeit. Diese Abplattung würde

sich, wie wir aus § 801 sehen, auf $\frac{1}{(27{\cdot}4)^2} \times \frac{1}{580}$ oder $\frac{1}{435,000}$ belaufen, also ungefähr das 27·8fache der Ellipticität der lunaren Fluthniveaufläche für den Fall der Erde und des Mondes sein; für den Fall der Erde und der Sonne würde dieselbe freilich nur $\frac{1}{366^2} \times \frac{1}{580}$ oder $\frac{1}{77,700,000}$ betragen.

815. Vergrösserung des Resultats durch die zwischen den Theilen der gestörten Wassermasse wirkende Attraction. — Wenn die Attraction, welche die Theile der Flüssigkeit auf einander ausüben, nicht unmerklich ist, so ruft die Störung in der Vertheilung derselben eine entgegengesetzte störende Kraft hervor, welche die Abweichung der Flächen constanten Potentials von der Kugelgestalt vergrössert. Die allgemeine hydrostatische Bedingung (§ 750), dass die Oberflächen gleicher Dichtigkeit noch mit den Flächen constanten Potentials zusammenfallen müssen, führt hierbei auf ein ausgezeichnetes Problem der Analysis. Legendre und Laplace gelangten dadurch zu einer ganz neuen Methode in der Mathematik, welche von den englischen Schriftstellern gewöhnlich die Methode der „Laplace'schen Coefficienten" oder der „Laplace'schen Functionen" genannt wird. Die Principien dieser Methode haben wir in dem zweiten Zusatz zu unserem ersten Capitel skizzirt. Daraus und aus den ergänzenden Untersuchungen der §§ 778 . . . 784 erhalten wir sofort die Lösung für den Fall, in welchem die Flüssigkeit homogen und der Kern [d. i. ein fester Körper von beliebiger Form, dessen innere Dichtigkeit eine beliebige ist, und der nur der Bedingung genügen muss, dass seine äusseren Flächen constanten Potentials näherungsweise kugelförmig sind] ganz von der Flüssigkeit bedeckt ist. Das Ergebniss kann in folgender Weise ausgedrückt werden: — Es sei ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit und σ die mittlere Dichtigkeit der ganzen Masse, d. i. der Flüssigkeit und des festen Körpers. Ferner möge der störende Einfluss, mag derselbe nun von äusseren störenden Massen, oder von einer Abweichung des Kernes von einer genauen centrobarischen (§ 526) Beschaffenheit oder von der durch die Rotation erzeugten Centrifugalkraft herrühren, ein solcher sein, dass die Niveauflächen harmonische Sphäroide $i$ter Ordnung werden, wenn die Flüssigkeit durch eine sie vollständig umschliessende starre Hülle in einer Kugelform erhalten wird. Das Streben der Oberfläche der Flüssigkeit würde sein, die Gestalt derjenigen dieser Niveauflächen anzu-

nehmen, welche genau das Volumen der Flüssigkeit umschliesst. Aber während die Flüssigkeit, wenn dies gestattet wäre, ihre Gestalt änderte, würde sie die Abweichung von dieser Niveaufläche vergrössern. Das Resultat besteht darin, dass die Niveaufläche der Flüssigkeit, wenn dieselbe nach Entfernung des Zwanges ins Gleichgewicht gekommen ist, ein harmonisches Sphäroid von derselben Art ist, dessen Abweichung von der Kugelgestalt jedoch in dem Verhältniss 1 zu $1 - \frac{3\varrho}{(2i+1)\sigma}$ vergrössert ist.

Es sei das Potential auf der umgrenzenden Fläche oder unendlich nahe derselben

$$\frac{4\pi\sigma a^3}{3r} + S_i, \tag{1}$$

wenn die Flüssigkeit durch eine kugelförmige Umhüllung vom Radius a in einer festen Form erhalten wird. Unter diesen Umständen ist

$$r = a\left(1 + \frac{3S_i}{4\pi\sigma a^2}\right) \tag{2}$$

die Fläche constanten Potentials vom mittleren Radius a. Wird nun die Umgrenzungsfläche der Flüssigkeit in das harmonische Sphäroid

$$r = a(1 + cS_i) \tag{3}$$

verwandelt, so geht das Potential (1) über in (§ 543)

$$\frac{4\pi\sigma a^3}{3r} + \left(1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1}\right) S_i, \tag{4}$$

und die Fläche constanten Potentials wird nicht mehr (2) sein, sondern

$$r = a\left\{1 + \left(1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1}\right)\frac{3S_i}{4\pi\sigma a^2}\right\}. \tag{5}$$

Damit also die Grenze (3) der Flüssigkeit eine Fläche constanten Potentials sei, müssen wir

$$c = \left(1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1}\right)\cdot\frac{3}{4\pi\sigma a^2}$$

haben, und dies liefert

$$4\pi c a^2 = \frac{1}{\frac{\sigma}{3} - \frac{\varrho}{2i+1}},$$

woraus

$$1 + \frac{4\pi\varrho c a^2}{2i+1} = \frac{1}{1 - \frac{3\varrho}{(2i+1)\sigma}} \tag{6}$$

folgt. Durch Einsetzung dieses Resultats in (5) und durch Vergleich mit (2) ergibt sich der Satz.

816. Stabilität des Oceans. — Die schon oben als einleuchtend angegebene Instabilität des Gleichgewichts in dem Falle, in

welchem die Dichtigkeit der Flüssigkeit grösser ist, als die mittlere Dichtigkeit des Kerns wird in merkwürdiger Art durch das letzte Resultat erläutert, welches die Abweichung unendlich gross macht, wenn $i = 1$ und $\sigma = \rho$ ist. Wir müssen aber bemerken, dass das Gleichgewicht nur dann instabil werden würde, wenn der Kern vollständig von der Flüssigkeit bedeckt ist. Wie dicht auch die Flüssigkeit sein möge, es würde immer eine Lage stabilen Gleichgewichts geben, wenn der Kern auf einer Seite heraussträte, und wenn die Masse der Flüssigkeit im Vergleich zu der des Kernes sehr klein oder sehr gross wäre, so würde die Gestalt ihrer Oberfläche im Zustande des stabilen Gleichgewichts offenbar näherungsweise kugelförmig sein. Wenn wir den Fall eines sehr kleinen Kerns von einem geringeren specifischen Gewicht ausschliessen (dieser Kern würde bloss ein kleiner schwimmender Körper werden, der die allgemeine Kugelform der Flüssigkeit nicht merklich störte), so haben wir in der anscheinend einfachen Frage, die Vertheilung einer kleinen Flüssigkeitsmasse über einen symmetrischen kugelförmigen Kern von geringerem specifischen Gewicht zu ermitteln, ein Problem, zu dessen Behandlung die bis jetzt erlangte mathematische Geschicklichkeit bei weitem nicht ausreicht.

817. Die Fälle $i = 1$ und $i = 2$ liefern die Lösungen der verschiedenen Beispiele des § 799, wenn die Attraction, welche die Theile der Flüssigkeit auf einander ausüben, in Rechnung gezogen wird, immer vorausgesetzt, dass der feste Körper vollständig bedeckt ist. So würde [§ 799, Beispiel (2)], wenn die Erde und der Mond inne gehalten und im Raume befestigt würden, die Anziehung des Mondes die Gestalt der flüssigen Erdoberfläche zwar noch kugelförmig lassen, aber die Excentricität derselben in dem Verhältniss von 1 zu $1 - \frac{\rho}{\sigma}$ vergrössern. Für die Erde und das Meer ist $\frac{\rho}{\sigma}$ ungefähr $\frac{2}{11}$, folglich würde die kugelförmige Flüssigkeitsfläche um 86 Fuss nach dem Monde zu gezogen werden, was $1\frac{2}{9}$ mal so viel ist, als die oben (§ 803) gefundenen 70 Fuss. Ebenso würden die Fluth- und die Rotationsellipticitäten, die wir in den §§ 800, 811, 813 bestimmt haben, unter der jetzt gemachten Voraussetzung jede im Verhältniss 1 zu $1 - \frac{3}{5}\frac{\sigma}{\rho}$, oder für den Fall der Erde und des Meeres im Verhältniss 55 zu 49 vergrössert werden. Die genaue Correction für die durch die Fluth in der Attraction des Meeres

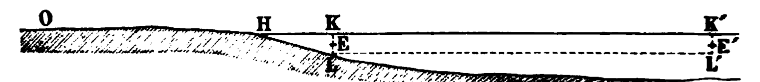
hervorgebrachte Aenderung muss in der Gleichgewichtstheorie der Fluthen kleiner als jene Grösse sein, da die Flüssigkeit nicht mehr als ungefähr $^2/_3$ des festen Körpers bedeckt. Die genaue Grösse der Correction für die von den Wassertheilchen auf einander ausgeübte Attraction zu finden, wenn nicht der ganze feste Körper bedeckt ist, gehört, sogar wenn die Anordnung von Wasser und Land ganz symmetrisch und einfach ist (wenn z. B. ein einziger kreisförmiger Continent da ist, während alles Uebrige Ocean ist), zu dem schon (§ 816) erwähnten der mathematischen Behandlung noch nicht zugänglichen Problem. Dasselbe kann erforderlichen Falls praktisch gelöst werden durch mühsame Näherungsmethoden; aber die unregelmässigen Grenzen von Land und Meer, wie sie auf der Erde thatsächlich vorhanden sind, und die Mitwirkung kinetischer Einflüsse bei Fluthen machen alle Arbeiten dieser Art illusorisch. Glücklicher Weise ist der Fehler, den man begeht, wenn man die in Rede stehende Correction ganz vernachlässigt, auf weniger als 10 Proc. zu veranschlagen $\left(\frac{6}{49}\right.$ würde 12·3 Proc. sein$\left.\right)$, und kann bei unserer gegenwärtigen Unsicherheit in Betreff der absoluten Werthe der Ursachen und Wirkungen in der Theorie der Fluthen unberücksichtigt bleiben.

818. Localer Einfluss hohen Wasserstandes auf die Richtung der Schwerkraft. — Obwohl nun der durch die Attraction des Wassers selbst, wenn es steigt und fällt, auf die Fluthen ausgeübte Einfluss an keinem Orte beträchtlich ist, so ist es doch ein offenbarer, obgleich nicht selten begangener Irrthum, anzunehmen, dass der störende Einfluss des Mondes auf die terrestrische Schwerkraft überall unmerklich sei. Es ist schon vor langer Zeit von Robison*) darauf hingewiesen worden, dass die grossen Fluthen der Fundy-Bay eine sehr bedeutende Ablenkung des Senkbleis in den benachbarten Orten erzeugen, und dass eine Beobachtung dieser Wirkung zu einer Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde benutzt werden könne. Aber auch gewöhnliche Fluthen müssen an Orten, welche der Meeresküste nahe liegen, Ablenkungen des Senkbleis hervorrufen, welche den grössten directen Einfluss des Mondes, der, wie wir (§ 812) gesehen haben, sich auf $\frac{1}{12{,}000{,}000}$ der Winkeleinheit (57·3°) beläuft, weit übertreffen. So würde in

*) Mechanical Philosophy, 1804. Siehe auch Forbes, Proc. R. S. E., April 1849.

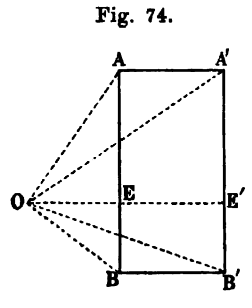
einem Punkte, der in der mittleren Meeresniveaufläche oder nicht viele Fuss darüber liegt, und der 100 Yards von dem Orte entfernt ist, welcher zur Zeit der Ebbe die Grenze zwischen Wasser und Land bildet, durch Fluthen von 5 Fuss Hebung und Senkung über die mittlere Höhe, wenn die Küstenlinie von dem Punkte aus nach jeder Seite hin 50 Meilen weit nicht bedeutend von einer mittleren Richtung abweicht, und wenn 50 Meilen ins Meer hinein das Steigen und Fallen näherungsweise gleichzeitig und mit gleicher Stärke erfolgt, eine Ablenkung von der mittleren Verticalen erzeugt werden, welche nach jeder Seite hin mehr als $\frac{1}{8{,}000{,}000}$ der Winkeleinheit beträgt. Denn ein in O (Fig. 73) befindlicher Punkt wird, wenn

Fig. 73.



das Wasser aus dem niedrigen Stande in den hohen aufsteigt, die Attraction einer Wasserplatte erleiden, die im Durchschnitt durch $HKK'L'L$ dargestellt wird. Wenn wir den kleinen Theil der Gesammtwirkung vernachlässigen, welcher in der längs der Küste sich hinziehenden langen Wassermasse ihren Grund hat, von welcher HKL ein Durchschnitt ist, so haben wir nur die Attraction der rechteckigen Wasserplatte zu bestimmen, welche nach der Voraussetzung von KL aus eine Breite von 50 Meilen hat, längs der Küste 100 Meilen lang ist, und deren Dicke KL 10 Fuss beträgt. Diese Attraction wird nicht merklich geändert, wenn man sich den Punkt O in die Verlängerung der Mittelebene EE' versetzt denkt (wenn derselbe auch bei einem am Meere erbauten passenden Gravitationsobservatorium der Regel nach einige Fuss höher liegen würde) und die ganze Masse der Platte in dieser Mittelebene concentrirt annimmt. Die Attraction einer gleichförmigen rechteckigen Platte auf einen Punkt O hat aber als Componente, welche AB parallel ist,

Fig. 74.



$$(7) \qquad \varrho t \log \left\{ \frac{(OA + AE) \cdot (OB + BE) \cdot OE'^2}{(OA' + A'E') \cdot (OB' + B'E') \cdot OE^2} \right\},$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Wassers und t die Dicke der Platte be-

zeichnet, die nach der Voraussetzung ein kleiner Bruchtheil von OE ist. (Den Beweis überlassen wir dem Leser als Uebungsaufgabe.) Wird jetzt die Seemeile = 2000 Yards angenommen, so erhalten wir nach den vorausgesetzten Daten mit einem grossen Grade von Genauigkeit

$$\frac{AE}{OE}=\frac{OA}{OE}=\frac{OE'}{OE}=1000 \text{ und } \frac{OA'}{OE}=1000\sqrt{2},$$

und B, B' liegen in denselben Entfernungen auf der einen Seite von OE', wie A, A' auf der anderen. Folglich geht der vorhergehende Ausdruck über in

$$2\varrho t \log \frac{2100}{1+\sqrt{2}},$$

und dies ist gleich $13{\cdot}5\times\varrho t$.

Das Verhältniss dieser Grösse zu $\frac{4\pi}{3}\sigma r$, d. h. zur ganzen Attraction, welche die Erde auf O ausübt, ist gleich $\frac{3\times 13{\cdot}4}{4\pi}\frac{\varrho t}{\sigma r}$, und dies beträgt $\left(\text{da } \frac{t}{r} \text{ nach der Voraussetzung } \frac{1}{2{,}100{,}000} \text{ und } \frac{\varrho}{\sigma} \text{ ungefähr } \frac{2}{11} \text{ ist}\right) \frac{1}{3{,}580{,}000}$. Das Senkblei wird daher zur Zeit der Fluth aus der Lage, die es zur Zeit der Ebbe inne hatte, durch eine horizontale Kraft entfernt werden, welche etwas grösser ist als $\frac{1}{4{,}000{,}000}$ der verticalen Kraft, und seine Ablenkung wird natürlich diesen Bruchtheil der Winkeleinheit $57{\cdot}3^0$ ausmachen.

819. Anwendung des § 817 auf die Theorie der Gestalt der Erde. — Wenn wir wieder zu dem Falle $\varrho=\sigma$ zurückkehren, so lernen wir aus § 817, dass eine unter dem Einfluss der Centrifugalkraft oder einer Fluth erzeugenden Einwirkung im Gleichgewicht befindliche homogene Flüssigkeit eine $2^1/_2$mal so grosse ElliptICität hat, wie sie haben würde, wenn die wechselseitige Attraction ihrer Theile entfernt (§ 800) würde und die Schwerkraft nach einem festen innern Kraftmittelpunkt hin gerichtet wäre. Daher ist für eine homogene Flüssigkeit, welche von derselben mittleren Dichtigkeit wie die Erde ist, und welche eine Rotationsdauer von der Länge eines siderischen Tages hat, die ElliptICität $\frac{1}{232}$, d. i. das

$2\frac{1}{2}$fache des in § 801 gefundenen Resultats $\frac{1}{580}$. Dies stimmt mit dem für den Fall einer näherungsweise kugelförmigen Gestalt geltenden Satz überein, den wir (§ 775) aus dem Satze des § 771 über das Gleichgewicht einer homogenen rotirenden Flüssigkeit herleiteten. Aber auch für diesen Fall ist Laplace's Entwicklung nach harmonischen Kugelfunctionen von grösster Wichtigkeit, indem sie beweist, dass die Lösung im Falle einer näherungsweise kugelförmigen Gestalt eindeutig ist, so dass weder ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen, noch irgend eine andere Figur ausser einem abgeplatteten elliptischen Rotationssphäroid den hydrostatischen Bedingungen genügen kann, wenn die Beschränkung einer näherungsweise kugelförmigen Gestalt auferlegt ist. Unsere Leser werden leicht ermessen, wie wir auch in diesem Punkte dem grossen französischen Naturforscher verpflichtet sind, wenn wir ihnen mittheilen, dass einer von uns in der That einige Zeit hindurch Untersuchungen darüber angestellt hat, ob nicht ein Ellipsoid von drei ungleichen Axen eine Figur terrestrischen Gleichgewichts sein könne.

820. Um ein anderes Beispiel des Resultats des § 817 für den Fall $i = 2$ zu geben, denken wir uns, die Erde, welche mit der Winkelgeschwindigkeit, die sie thatsächlich hat, rotiren möge, bestehe aus einem festen centrobarischen Kern, und dieser sei mit einer dünnen Schicht Flüssigkeit bedeckt, deren Dichtigkeit gleich der wirklichen Dichtigkeit der Erdrinde sei, d. h., wie wir sagen können, gleich der Hälfte der mittleren Dichtigkeit des Kerns. Dann würde die Ellipticität der freien Oberfläche

$$\frac{1}{580} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{406}$$

sein.

Endlich sei die Aufgabe gestellt: Die Dichtigkeit der auf einem centrobarischen Kern liegenden Flüssigkeitsschicht zu bestimmen, welche, mit der Winkelgeschwindigkeit, die die Erde wirklich hat, rotirend, eine sphäroidale Form von der Ellipticität $\frac{1}{295}$, d. i. der Ellipticität der Meeresoberfläche, annimmt. Wir erhalten

$$\frac{1}{1 - \frac{3}{5}\frac{\varrho}{\sigma}} = \frac{580}{295},$$

und dies liefert $\varrho = 0{\cdot}819 \times \sigma$

821. Wenn wir die verschiedenen Resultate der §§ 801, 817, 819 zusammenstellen, die wir für einen mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde rotirenden centrobarischen Kern erhalten haben, der mit einer dünnen Schicht Flüssigkeit von der Dichtigkeit ϱ bedeckt ist, so erhalten wir, wenn die mittlere Dichtigkeit der ganzen Masse (des Kerns und der Flüssigkeit) σ ist,

$$\text{(1)} \qquad \text{für } \frac{\varrho}{\sigma} = 0 \qquad e = \frac{1}{580},$$

$$\text{(2)} \qquad \text{„} \ \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{2}{11} \qquad e = \frac{1}{517},$$

$$\text{(3)} \qquad \text{„} \ \frac{\varrho}{\sigma} = \frac{1}{2} \qquad e = \frac{1}{406},$$

$$\text{(4)} \qquad \text{„} \ \frac{\varrho}{\sigma} = 0{\cdot}819 \quad e = \frac{1}{295},$$

$$\text{(5)} \qquad \text{„} \ \frac{\varrho}{\sigma} = 1 \qquad e = \frac{1}{232};$$

darin bezeichnet e die Ellipticität der freien Grenzfläche der Flüssigkeit. Die Dichtigkeit der oberen Erdrinde kann man ungefähr gleich der Hälfte der mittleren Dichtigkeit der ganzen Erdmasse annehmen; jedenfalls ist sie in jedem Theil kleiner als 0·812 dieser mittleren Dichtigkeit. Die Ellipticität der Meeresoberfläche weicht von $\frac{1}{295}$ nicht um mehr als 2 oder 3 Proc. ab und ist daher entschieden zu gross, als dass man sie der Centrifugalkraft und der Ellipticität in der oberen Rinde allein zuschreiben könnte, dass also die Voraussetzung sich rechtfertigen liesse, es sei ein starrer centrobarischer Kern vorhanden, mit einer nur dünnen Schicht bedeckt, deren Oberfläche hinsichtlich der Ellipticität im Ganzen mit der freien Flüssigkeitsoberfläche übereinstimmte. Es ist daher ganz unzweifelhaft, dass auch in den inneren Schichten eine Abplattung von einem gewissen Betrage vorhanden sein muss, und zwar muss diese Abplattung von der Richtung sein, in welcher die Centrifugalkraft eine solche erzeugen würde, wenn die Masse flüssig wäre. Wie wir in einem späteren Bande sehen werden, gibt es eine grosse Menge überzeugender Gründe, welche die von den Geologen allgemein angenommene Hypothese stützen, dass die obere Erdrinde zu einer Zeit durch die Wärme ganz geschmolzen war. Dies würde die Uebereinstimmung erklären, welche im Allgemeinen zwischen der Oberfläche des festen Körpers und der einer

im Gleichgewicht befindlichen flüssigen Masse besteht, obschon dieselbe durch die Hebungen und Senkungen bedeutend gestört ist, welche während des Festwerdens der Erdrinde eintraten, ein Vorgang, welcher (Zusatz D) wahrscheinlich einige Millionen Jahre gedauert hat und noch jetzt nicht ganz beendet ist (Zeuge dafür ist die Lava, die aus den noch thätigen Vulcanen herausfliesst). Die Abplattung der tieferen Schichten gleicher Dichtigkeit, die wir jetzt aus der Gestalt der Meeresniveaufläche schliessen, die beobachtete Dichtigkeit der Erdrinde und Cavendish's Wägung der ganzen Erde machen es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass die Erde zu einer Zeit nicht bloss auf ihrer ganzen Oberfläche, sondern entweder überall oder jedenfalls bis zu einer grossen Tiefe überall flüssig war.

822. Gleichgewicht einer heterogenen Flüssigkeitsmasse von der Form eines Sphäroids. — Wir werden demgemäss als letztes hydrostatisches Beispiel die Bedingungen einer heterogenen Flüssigkeit untersuchen, welche einem starren, kugelförmigen, centrobarischen Kern aufliegt und, wie in § 815 erklärt wurde, eine geringe Störung durch anziehende Massen erleidet, die entweder ausserhalb oder im Kern festliegen (darunter sind natürlich auch die etwa vorhandenen Abweichungen von einer streng centrobarischen Vertheilung der Masse des Kerns mit inbegriffen).

Es sei für irgend einen Punkt (r, ϑ, φ) des Raumes

N das Potential des Kerns,
V " " der ungestörten Flüssigkeit,
Q " " der störenden Kraft,
U " " der Störung in der Vertheilung der Flüssigkeit.

Es ist also das Gesammtpotential in dem in Rede stehenden Punkte $N+V$, so lange die Flüssigkeit ungestört ist, und $N+Q+V+U$, wenn die störende Kraft eingeführt und Gleichgewicht eingetreten ist. Weiter sei ϱ die Dichtigkeit der ungestörten Flüssigkeit im Punkte (r, ϑ, φ) [natürlich würde ϱ verschwinden, wenn dieser Punkt in einem von der Flüssigkeit nicht eingenommenen Raumtheil sich befände] und $\varrho + \varpi$ die geänderte Dichtigkeit in demselben Punkte $(\varrho, \vartheta, \varphi)$, wenn die Flüssigkeit unter der störenden Einwirkung verharrt. Es ist zu beachten, dass N, V, ϱ Functionen von r allein, dagegen Q, U, ϖ Functionen von r, ϑ, φ sind.

Es sei nun δr eine unendlich kleine Variation von r. Dann wird die Dichtigkeit der Flüssigkeit im Punkte $(r + \delta r, \vartheta, \varphi)$ den Werth $\varrho + \varpi + \frac{d(\varrho + \varpi)}{dr}\delta r$ haben, oder, da ϖ nach der Voraussetzung unendlich klein ist, einfach

$$r + \varpi + \frac{d\varrho}{dr}\,\delta r$$

sein. Setzen wir dies gleich ϱ, so erhalten wir

$$\varpi + \frac{d\varrho}{dr}\,\delta r = 0,$$

und hieraus ergibt sich die Gleichung

$$\delta r = -\frac{\varpi}{\frac{d\varrho}{dr}}, \tag{1}$$

welche die Abweichung der sphäroidalen Oberfläche, auf welcher die Dichtigkeit in der gestörten Flüssigkeit ϱ ist, von der Kugelfläche vom Radius r ausdrückt. Da die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist, so muss das von dieser sphäroidalen Oberfläche eingeschlossene Volumen gleich dem von der Kugelfläche eingeschlossenen sein. Wenn daher $d\sigma$ ein Element der Kugelfläche und $\int\int$ eine sich über diese ganze Fläche erstreckende Integration bezeichnet, so ist

$$\int\int \delta r\, d\sigma = 0. \tag{2}$$

Da nun $\frac{d\varrho}{dr}$ unabhängig von ϑ, φ ist, so folgt aus (1) als Ausdruck der Unzusammendrückbarkeit

$$\int\int \varpi\, d\sigma = 0. \tag{3}$$

Nun erhalten wir, wie früher für die Dichtigkeit, für das gestörte Potential in $(r + \delta r, \vartheta, \varphi)$

$$N + Q + V + U + \frac{d(N + Q + V + U)}{dr}\,\delta r,$$

oder, weil $Q + U$ unendlich klein ist,

$$N + Q + V + U + \frac{d(N + V)}{dr}\,\delta r.$$

Um daher auszudrücken, dass die der Abweichung (1) unter der Voraussetzung eines constanten r entsprechende sphäroidale Fläche in der gestörten Flüssigkeit eine Fläche constanten Potentials sei, erhalten wir

$$Q + U - \frac{\frac{d}{dr}(N + V)}{\frac{d\varrho}{dr}}\,\varpi + N + V = F(r), \tag{4}$$

was (§ 750) die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts ist. In dieser Gleichung müssen wir N und ϱ als explicit gegebene Functionen von r und Q als eine explicite Function von r, ϑ, φ ansehen. Für V, als Potential von ϱ, ergibt sich, wenn man in § 542 (15) und (16) $i = 0$ setzt,

$$V = 4\pi\left(\int_r^{\mathfrak{r}} r'\varrho'\,dr' + \frac{1}{r}\int_a^r r'^2\varrho'\,dr'\right), \tag{5}$$

wo ϱ' der Werth von ϱ in dem Abstande r' vom Centrum, $\mathfrak{r}$ der Radius der äusseren Umgrenzungsfläche der ungestörten Flüssigkeit und a der Radius der festen Kugeloberfläche des Kerns ist, auf dem die Flüssigkeit ruht. Um $V + U$ zu finden, folgen wir streng den Regeln des § 545, addiren also das Potential einer mit der Dichtigkeit $\varrho + \varpi$ durch den Raum zwischen den beiden Kugelflächen der Radien a und $\mathfrak{r}$ vertheilten Masse zu dem Potential der in § 545 definirten Schicht B positiver und negativer Masse. Es sei h die Dicke der letzteren im Punkte $(\mathfrak{r}, \vartheta, \varphi)$, d. h. der Werth von δr auf der Oberfläche, und es bezeichne q ihre Dichtigkeit, d. i. den Flächenwerth von ϱ. Wird dann das ungestörte Potential V subtrahirt, so erhalten wir für den aus der Abplattung herrührenden Theil des Potentials

$$(6) \qquad U = \iiint \frac{\varpi' r'^2 d\sigma' dr'}{D} + \left[\iint \frac{q' h' d\sigma'}{D}\right],$$

wenn wie gewöhnlich D die Entfernung der beiden Punkte (r, ϑ, φ), $(r', \vartheta', \varphi')$, von einander, die accentuirten Buchstaben die Werthe, welche die entsprechenden Elemente im letzteren Punkte haben, und [ ] die Werthe an, beziehlich Integration über die Oberfläche bezeichnen.

Wir wollen jetzt voraussetzen, die gesuchte Abweichung der Oberflächen gleichen Drucks, gleicher Dichtigkeit und gleichen Potentials seien in folgender Weise durch harmonische Flächenfunctionen ausgedrückt, bei denen das Glied R_0 der Gleichung (2) wegen verschwindet: —

$$(7) \quad \begin{cases} \text{für das Innere der Flüssigkeit } \delta r = R_1 + R_2 + R_3 + \text{u. s. w.,} \\ \text{und für die äussere Grenzfläche } h = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Dann ist nach (1)

$$(8) \qquad \varpi = \frac{-d\varrho}{dr}(R_1 + R_2 + R_3 + \text{u. s. w.}).$$

Wird diese Formel nach §§ 544, 542, 536 in (6) angewandt, so erhält man

$$(9) \quad \begin{cases} U = 4\pi \sum_1^\infty \frac{1}{2\nu+1} \left\{ r^\nu \int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' \right. \\ \qquad \left. + r^{-\nu-1} \int_a^r r'^{\nu+2} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' + q \, \mathfrak{R}_\nu \frac{r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}} \right\}, \end{cases}$$

wo R'_ν den Werth von R_ν für den Punkt (r', ϑ, φ) statt für (r, ϑ, φ) bezeichnet. Diese Formel drückt U in harmonischen Functionen aus.

Um die Entwicklung der hydrostatischen Gleichung (4) zu vervollständigen, können wir voraussetzen, der harmonische Ausdruck für Q sei entweder direkt gegeben, oder er werde, je nach der Form, unter welcher die Data dargestellt sind, unmittelbar nach Zusatz B (51) oder nach § 539 (8) gefunden. Es möge also nach der Bezeichnung des Zusatzes (B) (37) und (38)

$$(10) \qquad Q = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(A_\nu^{(s)} \cos s\varphi + B_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)}$$

sein, wo $A_\nu^{(s)}$, $B_\nu^{(s)}$ bekannte Functionen von r bezeichnen. Wird diese Formel, sowie auch (8) in (4) benutzt, so erhalten wir

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(A_\nu^{(s)} \cos s\varphi + B_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)} - \frac{-d(N+V)}{dr} R_\nu \right. \\ &\quad + \frac{1}{2\nu+1} \left(r^\nu \int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' \right. \\ &\quad \left.\left. + r^{-\nu-1} \int_a^r r'^{\nu+2} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' + \mathfrak{R}_\nu \frac{r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}} \right) \right\} \\ &+ A_0^{(0)} + N + V = F(r), \end{aligned} \right.$$

wo $\left[\frac{-d\varrho}{dr}\right]$ den Werth von $\frac{-d\varrho}{dr}$ für $r = \mathfrak{r}$ bezeichnet. Hieraus ergibt sich erstens für die Glieder nullter Ordnung

$$(12) \qquad A_0^{(0)} + N + V = F(r),$$

was bloss den Werth von $F(r)$ liefert, den wir zeitweilig in (4) eingeführt und nicht wieder gebraucht haben. Ferner erhalten wir durch die Glieder νter Ordnung

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{-d(N+V)}{dr} R_\nu \\ &- \frac{1}{2\nu+1} \left\{ r^\nu \int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu \, dr' + r^{-\nu-1} \int_a^r r'^{\nu+2} \frac{-d\varrho'}{dr'} R'_\nu dr' \right. \\ &\quad \left. + q \mathfrak{R}_\nu \frac{r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}} \right\} = \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(A_\nu^{(s)} \cos s\varphi + B_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)}. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir endlich R_ν (wie oben für das νte Glied von Q) nach Zusatz B (37) entwickeln, möge sich

$$(14) \qquad R_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(u_\nu^{(s)} \cos s\varphi + v_\nu^{(s)} \sin s\varphi\right) \Theta_\nu^{(s)}$$

ergeben, wo $u_\nu^{(s)}$, $v_\nu^{(s)}$ Functionen von r sind, auf deren Bestimmung das Problem reducirt ist. Wenn wir jetzt die beiderseitigen Coefficienten von $\cos s\varphi\, \Theta_\nu^{(s)}$, u. s. w. einzeln einander gleich setzen, und mit u_ν eine beliebige der gesuchten Functionen $u_\nu^{(s)}$, $v_\nu^{(s)}$, ferner mit A_ν irgend eine der gegebenen Functionen $A_\nu^{(s)}$, $B_\nu^{(s)}$, endlich mit u'_ν, $\mathfrak{u}_\nu$ beziehungsweise die

Werthe von u_ν für $r = r'$ und $r = \mathfrak{r}$ bezeichnen, so erhalten wir

$$(15)\begin{cases} \dfrac{-d(N+V)}{dr}\,u_\nu - \dfrac{4\pi}{2\nu+1}\left\{r^\nu \displaystyle\int_r^{\mathfrak{r}} r'^{-\nu+1}\,\dfrac{-d\varrho'}{dr'}\,u'_\nu\,dr' \right. \\ \qquad\qquad \left. + \, r^{-\nu-1}\displaystyle\int_a^r r'^{\nu+2}\,\dfrac{-d\varrho'}{dr'}\,u'_\nu\,dr' + q\,\dfrac{\mathfrak{u}_\nu r^\nu}{\mathfrak{r}^{\nu-1}}\right\} = A_\nu, \\ \text{oder, wie es zuweilen der Kürze wegen zweckmässig geschrieben wird.} \\ \qquad\qquad \sigma_\nu(u_\nu) = A_\nu; \end{cases}$$

darin bezeichnet σ_ν eine gewisse Operation, welche bestimmte Integrationen in sich schliesst und so beschaffen ist, dass $\sigma_\nu(u)$ für jede — continuirliche oder discontinuirliche — Function u von r für alle Werthe von r nothwendig verschwindet, für welche $u = 0$ ist. Um (15) auf eine Differentialgleichung zu reduciren, dividiren wir durch r^ν, differentiiren, multipliciren mit $r^{2\nu+2}$ und differentiiren zum zweiten Male. Setzen wir der Kürze wegen

$$(16)\qquad \frac{-d(N+V)}{dr} = r\psi,$$

so erhalten wir

$$(17)\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left\{r^{2\nu+2}\,\dfrac{d\left(r^{-\nu+1}\psi u_\nu\right)}{dr}\right\} + 4\pi r^{\nu+2}\,\dfrac{-d\varrho}{dr}\,u_\nu \\ \qquad\qquad = \dfrac{d}{dr}\left\{r^{2\nu+2}\,\dfrac{d\left(r^{-\nu}A_\nu\right)}{dr}\right\}. \end{cases}$$

eine in Beziehung auf u_ν lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten und unabhängiges Glied bekannte Functionen von r sind. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist, wie bekannt, von der Form

$$(18)\qquad u_\nu = CP + C'P' + \alpha;$$

darin ist α eine Function von r, welche der Gleichung

$$(19)\qquad \sigma_\nu(\alpha) = A_\nu$$

genügt; C und C' sind zwei willkürliche Constanten und P, P' zwei verschiedene Functionen von r.

Die Gleichung (15) erfordert, dass $C = 0$ und $C' = 0$ sei; mit anderen Worten, die Function u_ν ist völlig bestimmt, wenn sie (15) genügt. Dies erkennt man am besten durch folgende Erwägung: Wenn wir statt (15)

$$(20)\qquad \sigma_\nu(u) = A_\nu + Kr^\nu + K'r^{-\nu-1}$$

haben, wo K, K' zwei willkürliche Constanten sind, so verschwinden diese Constanten in den Differentiationen, wir erhalten noch dieselbe Differentialgleichung (17), und die beiden willkürlichen Constanten C und C' der allgemeinen Lösung (18) der letzteren sind durch (20) bestimmt, wenn

zwei beliebige Werthe für K und K' gegeben werden. In der That reducirt sich (20), wenn man für u_ν den Ausdruck (18) anwendet, auf

$$C\sigma_\nu(P) + C'\sigma_\nu(P') = Kr^\nu + K'r^{-\nu-1}, \tag{21}$$

welche Formel zeigt, dass $\sigma_\nu(P)$ und $\sigma_\nu(P')$ verschiedene lineare Functionen von r^ν und $r^{-\nu-1}$ sind, und welche C und C' bestimmt.

Wir sehen somit, dass, welchen Werth A_ν auch haben mag, wir durch Integration der Differentialgleichung (19) und durch Bestimmung der willkürlichen Constanten (14) die vollständige Lösung des Problems erhalten.

So lange man nicht der analytischen Merkwürdigkeit halber oder aus einem anderen besseren Grunde die Annahme, N sei eine willkürliche Function von r, gelten lassen will, ist es unnöthig, ψ und ϱ als zwei verschiedene gegebene Functionen beizubehalten. Denn da die äussere Kraft des Kerns oder der Theil derselben, dessen Potential N ist, nach der Voraussetzung in Beziehung auf den Mittelpunkt symmetrisch ist, so muss sie in der Natur umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von diesem Punkte variiren, d. h. es ist

$$\frac{-dN}{dr} = \frac{\mu}{r^2}, \tag{22}$$

wo μ eine Constante ist, welche in der gewöhnlich benutzten Einheit (§ 459) die Masse des Kerns ausdrückt. Ferner ist nach (5)

$$\frac{-dV}{dr} = \frac{4\pi}{r^2}\int_a^r \varrho' r'^2 dr'. \tag{23}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (22) und (17)

$$\psi = \frac{4\pi}{r^3}\int_a^r \varrho' r'^2 dr' + \frac{\mu}{r^3}, \tag{24}$$

und dies liefert

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi\varrho &= \frac{d(\psi r^3)}{r^2 dr} \\ 4\pi\frac{d\varrho}{dr} &= r\frac{d^2\psi}{dr^2} + 4\frac{d\psi}{dr}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Wird diese letzte Formel auf (17) angewandt und sodann durch Differentiation reducirt, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u_\nu}{dr^2} + 2\left(\frac{d\log\psi}{dr} + \frac{2}{r}\right)\frac{du_\nu}{dr} - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{r^2}u_\nu \\ &\quad = \frac{1}{r^{\nu+3}}\frac{d}{dr}\left\{r^{2\nu+2}\frac{d\left(r^{-\nu}A_\nu\right)}{dr}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Eine andere Form, welche für die Fälle geeignet ist, in denen die störende Kraft von einer äusseren anziehenden Masse oder von der Centrifugalkraft der Flüssigkeit selbst, falls diese rotirt, herrührt, erhält man, indem man in (17)

$$r^{-\nu+1} u_\nu = e_\nu \tag{27}$$

setzt und durch Differentiation reducirt. Es ergibt sich auf diese Weise

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 e_\nu}{d r^2} + 2\left(\frac{d \log \psi}{d r} + \frac{\nu+1}{r}\right)\frac{d e_\nu}{d r} + \frac{2(\nu-1)}{r}\frac{d \log \psi}{d r}\, e_\nu \\ &\qquad = \frac{1}{r^{2\nu+2}}\frac{d}{d r}\left\{r^{2\nu+2}\frac{d\left(r^{-\nu} A_\nu\right)}{d r}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Bei dieser Bezeichnung liefert das Zwischenintegral, das man aus (15) durch Ausführung des ersten Schrittes des in der angegebenen Reihenfolge vorzunehmenden Differentiationsverfahrens erhält,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d e_\nu}{d r} + \frac{d \log \psi}{d r}\, e_\nu - r^{-2\nu-2}\int_a^r \left(r\,\frac{d^2 \psi}{d r^2} + 4\,\frac{d \psi}{d r}\right) r^{2\nu+1} e_\nu \\ &\qquad = \frac{d\left(r^{-\nu} A_\nu\right)}{d r}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Wichtige Schlüsse, die man leicht aus diesen Formeln ziehen kann, sind folgende: Wenn Q eine räumliche harmonische Function ist (wie es der Fall ist, wenn die Störung entweder von störenden Körpern, die sich im Kern oder in dem Raume ausserhalb der Flüssigkeit befinden, oder von der Centrifugalkraft der Flüssigkeit herrührt, wenn letztere wie ein fester Körper um eine Axe rotirt), so kann (1) die als positiv und als Function von r angesehene Grösse e_ν zwar einen Minimalwerth, aber keinen Maximalwerth haben und (2), wenn die Störung von äusseren störenden Massen oder von irgend einer anderen Ursache (wie der Centrifugalkraft) herrührt, welche als Potential eine räumliche harmonische Function νter Ordnung liefert, die nur das Glied r^ν, nicht auch das Glied $r^{-\nu-1}$ enthält, so kann e_ν, ausser im Centrum, keinen Minimalwerth haben und muss in der Flüssigkeit nach aussen hin zunehmen.

Diese Sätze zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass ψ nothwendig nach aussen hin abnehmen muss. Um dies darzuthun, bezeichnen wir mit n den Ueberschuss der Masse des Kerns über die Masse einer gleich grossen Vollkugel, deren Dichtigkeit s gleich derjenigen der dem Kern zunächst liegenden Flüssigkeitsschicht ist. Dann können wir (24) auf die Form

$$\psi = 4\pi s - \frac{4\pi}{r^3}\int_a^{r'} (s-\varrho')\, r'^2 d r' + \frac{n}{r^3} \tag{30}$$

bringen. Damit nun das Gleichgewicht stabil sei, muss jede der Grössen n und $s-\varrho'$ positiv sein; folglich ist der letzte Theil des zweiten Gliedes positiv und wird bei zunehmendem r kleiner, während der zweite Theil desselben Gliedes negativ ist und an absoluter Grösse zunimmt und der erste Theil einen constanten Werth hat. Mithin nimmt ψ bei wachsendem r ab. Weiter müssen wir, wenn die Kraft von der angegebenen Art ist, [Zusatz B (57)]

$$A_\nu = K r^\nu + K' r^{-\nu-1} \tag{31}$$

haben, und daher verschwindet das zweite Glied von (28). Wenn also für irgend einen Werth von r

$$\frac{d e_\nu}{d r} = 0$$

ist, so ist für denselben Werth

$$\frac{d^2 e_\nu}{d r^2} = - \frac{2(\nu - 1)}{r} \frac{d \log \psi}{d \psi} e_\nu$$

eine positive Grösse, und dies beweist den Satz (1). Wenn endlich die Kraft von der in (2) angegebenen Art ist, so haben wir einfach $A_\nu = K r^\nu$, und daher verschwindet das zweite Glied von (29). Diese Gleichung liefert dann für Werthe von r, welche um eine unendlich kleine Grösse grösser als a sind,

$$\frac{d e_\nu}{d r} = - \frac{d \log \psi}{d r} e_\nu,$$

was positiv ist. Folglich beginnt die Function e_ν vom Kern aus zu wachsen, und da sie nach (1) keinen Minimalwerth haben kann, so wächst sie nach aussen hin unaufhörlich.

823. Fall der Centrifugalkraft. — Wenn die Störung die aus der Rotation der Flüssigkeit herrührende ist, so ist das Potential der störenden Kraft

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

und dies ist gleich der Summe einer räumlichen harmonischen Function zweiten Grades und einer Constanten. Hieraus folgt [§§ 822, 779], dass die Flächen gleicher Dichtigkeit concentrische abgeplattete Rotationsellipsoide sind, welche eine gemeinschaftliche Axe haben, und deren Ellipticitäten von der Oberfläche aus nach innen zu immer kleiner werden.

Wir erhalten in § 822 (10)

$$Q = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \frac{r^2 \omega^2}{6} \left(\Theta_0^{(0)} + \Theta_2^{(0)}\right).$$

Dies liefert sofort, wegen (7) und (14),

$$\delta r = u_2 \, \Theta_0^{(0)}.$$

Folglich ist

$$r + \delta r = r \left(1 + \frac{u_2}{r} \Theta_2^{(0)}\right)$$

$$= r \left[1 + \frac{u_2}{r} \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta\right)\right],$$

oder, wenn wir die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, was zulässig ist, weil ω und daher auch $\frac{u^2}{r}$ sehr klein sind,

$$(1) \qquad r + \delta r = r\left(1 - \frac{2u_2}{3r}\right)\left(1 + \frac{u_2}{r}\sin^2\vartheta\right).$$

Danach ist die Kugel, deren Radius r war, ein abgeplattetes Rotations-ellipsoid von der Elliptícität [§ 822 (27)]

$$(2) \qquad e_2 = \frac{u_2}{r}$$

geworden.

Ihr Polardurchmesser ist um den Bruch $\frac{2u_2}{3r}$ oder $\frac{2e_2}{3}$ kleiner, ihr Aequatorialdurchmesser um $\frac{e_2}{3}$ grösser geworden, während ihr Volumen unverändert geblieben ist.

Um den Werth von u_2 zu erhalten, müssen wir Daten oder Voraussetzungen haben, welche uns in den Stand setzen, die Gleichung (15) zu integriren. Diese können in vielen Formen gegeben werden; es ist aber nur die eine, zu der wir uns jetzt wenden, für praktische Schlussfolgerungen ausgearbeitet worden.

824. Laplace's hypothetisches Gesetz über die Dichtigkeit im Innern der Erde. — Um die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung auf die Bestimmung des Gesetzes der Ellipticität der Schichten gleicher Dichtigkeit innerhalb der Erde, unter der Voraussetzung, dass dieselbe ursprünglich flüssig gewesen ist anzuwenden, ist es unumgänglich nöthig, dass wir (da Beobachtungen darüber unmöglich sind) mit einer Hypothese über das Gesetz beginnen, nach welchem sich die Dichtigkeit mit dem Abstand vom Erdmittelpunkt ändert. Denn wir haben (§ 821) gesehen, zu wie sehr verschiedenen Resultaten wir gelangen, wenn wir die beiden äussersten Voraussetzungen machen, nämlich erstens, dass die Masse homogen sei, und zweitens, dass die Dichtigkeit im Centrum unendlich gross sei. In wenigen der bisher gemachten Messungen der Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten (siehe Bd. II., Eigenschaften der Materie) ist der angewandte Druck gross genug gewesen, um eine Verdichtung zu erzeugen, die mehr als 1/2 Proc. betrug. Wie man erwarten konnte, hat sich herausgestellt, dass die in diesen Experimenten erhaltenen Verdichtungen in jedem Falle näherungsweise dem Druck einfach proportional sind; aber man hat experimentell noch keine Andeutung über das Gesetz der Zusammendrückbarkeit für eine Flüssigkeit unter einem Druck erhalten, der gross genug war, beträchtliche Verdichtungen hervorzubringen. Da es uns an Kenntniss darüber fehlt, so stellte Laplace die Hypothese auf, das Gesetz der Zusammendrückbarkeit der Masse, aus welcher die Erde vor ihrer Festwerdung bestand, sei folgendes: —

Die Zunahme des Quadrates der Dichtigkeit ist der Zunahme des Drucks proportional. Diese Hypothese führt, mittels der gewöhnlichen Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts, zu einem sehr einfachen Ausdruck für das Gesetz der Dichtigkeit, welcher noch weiter vereinfacht wird, wenn wir annehmen, die Dichtigkeit sei überall von endlicher Grösse.

Bei Vernachlässigung der störenden Kräfte haben wir (§§ 822, 752)

$$dp = \varrho d(V + N). \tag{1}$$

Nach der oben angegebenen Hypothese von Laplace ist aber, wenn k eine gewisse Constante bezeichnet,

$$dp = k \varrho d \varrho. \tag{2}$$

Folglich ist

$$k \varrho + C = V + N,$$

oder nach § 822 (5)

$$k \varrho + C = 4\pi \int_r^{\mathfrak{r}} r' \varrho' dr' + \frac{4\pi}{r} \int_a^r r'^2 \varrho' dr' + \frac{\mu}{r}.$$

Wird jetzt mit r multiplicirt und sodann differentiirt, so folgt

$$k \frac{d}{dr}(r \varrho) + C = 4\pi \int_r^{\mathfrak{r}} r' \varrho' dr'$$

und

$$\frac{d^2}{dr^2}(r \varrho) = -\frac{4\pi}{k} r \varrho.$$

Setzen wir

$$\frac{4\pi}{k} = \frac{1}{x^2},$$

so kann das Integral dieser Gleichung in folgender Form ausgedrückt werden: —

$$r \varrho = F \sin\left(\frac{r}{x} + G\right).$$

Wenn wir voraussetzen, die ganze Masse sei flüssig, d. h. es sei kein fester Kern vorhanden, oder es gelte auf alle Fälle dasselbe Dichtigkeitsgesetz von der Oberfläche bis zum Centrum, so muss G verschwinden, da sonst die Dichtigkeit im Centrum unendlich gross sein würde. Wir werden daher im Folgenden

$$\varrho = \frac{F}{r} \sin \frac{r}{x} \tag{3}$$

annehmen. Für diesen Werth von ϱ ist es leicht, die Richtigkeit der Formel

$$\int_0^r r'^2 \varrho' dr' = -x^2 r^2 \frac{d\varrho}{dr} \tag{4}$$

zu erkennen, indem jede Seite derselben den Werth

$$F x^2 \left(\sin \frac{r}{x} - \frac{r}{x} \cos \frac{r}{x}\right)$$

hat.

Wir sind jetzt vorbereitet zur Bestimmung des Werthes von u_2 in § 823, von welchem die Elliptizität der Schichten abhängt. Denn die Formel (15) des § 822 wird nach § 822 (23) und der vorhergehenden Gleichung (4)

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\mu - \mu'}{r^2} - 4\pi x^2 \frac{d\varrho}{dr}\right) u_2 + \frac{4\pi}{5}\left[r^2 \int_r^{\mathfrak{r}} \frac{u'_2}{r'} \frac{d\varrho'}{dr'}\, dr' + r^{-3} \int_a^r r'^4 u'_2 \frac{d\varrho'}{dr'} dr'\right] \\ &\qquad\qquad - \frac{4\pi}{5}\, q\, \frac{u_2 r^2}{\mathfrak{r}} = \frac{\omega^2 r^3}{2}, \end{aligned} \right.$$

wo μ' die Masse der von dem Kern μ verdrängten, dem Dichtigkeitsgesetz (3) folgenden Flüssigkeit ist. In dem die Erde betreffenden Problem können wir $\mu' = \mu$ und natürlich $a = 0$ annehmen. Der Einfachheit wegen setzen wir noch

$$(6) \qquad r \frac{d\varrho}{dr} u_2 = v,$$

dividiren sodann durch r^2 und differentiiren. Es ergibt sich

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r^3}\right) + \frac{1}{x^2 r^6} \int^r r'^3 v' dr' = 0.$$

Wir multipliciren jetzt mit r^6 und differentiiren von Neuem; dann erhalten wir

$$(7) \qquad \frac{d^2 v}{dr^2} + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{r^2}\right) v = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist bekanntlich

$$(8) \qquad v = C\left[\left(\frac{3}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(\frac{r}{x} + C'\right) - \frac{3}{xr} \cos\left(\frac{r}{x} + C'\right)\right],$$

so dass u_2 aus (6) bekannt ist. Nun haben wir schon bewiesen, dass e vom Centrum aus nach aussen hin wächst; es muss daher

$$C' = 0$$

sein, da sonst u_2 im Centrum unendlich gross sein würde. Wir erhalten also schliesslich

$$(9) \qquad e_2 = \frac{u_2}{r} = -\frac{C}{F} \frac{\left(\frac{3}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right) \tan \frac{r}{x} - \frac{3}{xr}}{\tan \frac{r}{x} - \frac{r}{x}}.$$

Die Constanten sind natürlich aus den bekannten Werthen der Elliptizität der Oberfläche und der Winkelgeschwindigkeit der Masse zu bestimmen.

Jetzt geht (5) an der Oberfläche über in

$$(10) \qquad \frac{4\pi}{\mathfrak{r}^2} \mathfrak{u}_2 \int_0^{\mathfrak{r}} \varrho r^2 dr + \frac{4\pi}{5\mathfrak{r}^3} \int_0^{\mathfrak{r}} r^4 \frac{d\varrho}{dr} u_2 dr = \frac{\mathfrak{r}^2 \omega^2}{2} + \frac{4\pi}{5} q\, \mathfrak{u}_2 \mathfrak{r}.$$

Wir können weiter ϱ, $\frac{d\varrho}{dr}$ und q vermittels der Formeln (3), (4), (6) und (8)

eliminiren und überall $r e_2$ für u_2 setzen. Wenn ausserdem m das Verhältniss $\left(\frac{1}{289}\right)$ bezeichnet, in welchem die Centrifugalkraft am Aequator zur Schwerkraft steht, so kann ω vermittels der Gleichung

$$m = \frac{\mathfrak{r}\,\omega^2}{\frac{4\pi}{\mathfrak{r}^2}\int\limits_0^{\mathfrak{r}} \varrho\, r^2 d r}$$

eliminirt werden, aus welcher mit Hülfe von (3) die Grösse ϱ entfernt wird. Durch diese Substitutionen transformirt sich (10) in

$$\frac{4\pi F e}{\mathfrak{r}}\int\limits_0^{\mathfrak{r}} r \sin\frac{r}{x}\, d r + \frac{4\pi C}{5\mathfrak{r}^3}\int\limits_0^{\mathfrak{r}} r^3 \left[\left(\frac{3}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right)\sin\frac{r}{x} - \frac{3}{x r}\cos\frac{r}{x}\right] dr$$

$$= \frac{4\pi m F}{2\mathfrak{r}}\int\limits_0^{\mathfrak{r}} r \sin\frac{r}{x}\, d r + \frac{4\pi F}{5}\,\mathfrak{r}\, e \sin\frac{\mathfrak{r}}{x}.$$

Setzen wir

$$\tan\frac{\mathfrak{r}}{x} = t \text{ und } \frac{\mathfrak{r}}{x} = \vartheta,$$

so wird der integrirte Ausdruck, nach Division durch $\frac{4\pi F e}{5\mathfrak{r}}$,

$$5(t - \vartheta) - \frac{t - \vartheta}{(3 - \vartheta^2)t - 3\vartheta}\left[15(t - \vartheta) + \vartheta^3 - 6 t \vartheta^2\right]$$

$$= \frac{5m}{2e}(t - \vartheta) + \vartheta^2 t.$$

Hieraus folgt leicht

$$\text{(11)} \qquad \frac{5m}{2e} = \frac{\vartheta^4 + \vartheta^3 t + \vartheta^4 t^2 - 2 t^2 \vartheta^2}{(t - \vartheta)[(3 - \vartheta^2)t - 3\vartheta)]}.$$

Setzen wir $1 - z$ für $\frac{\vartheta}{t}$, d. h. für $\frac{\frac{\mathfrak{r}}{x}}{\tan\frac{\mathfrak{r}}{x}}$, so wird diese Formel etwas einfacher und kann folgendermaassen geschrieben werden:

$$\text{(12)} \qquad \frac{5m}{2e} = \frac{\vartheta^4 - 3 z \vartheta^2 + z^2 \vartheta^2}{z(3z - \vartheta^2)}.$$

Die mittlere Dichtigkeit ist natürlich

$$\frac{\int\limits_0^{\mathfrak{r}} \varrho\, r^2 d r}{\int\limits_0^{\mathfrak{r}} r^2 d r} = \frac{F x^2\left(\sin\frac{\mathfrak{r}}{x} - \frac{\mathfrak{r}}{x}\cos\frac{\mathfrak{r}}{x}\right)}{\frac{\mathfrak{r}^3}{3}} = \frac{3F}{\mathfrak{r}}\,\frac{\sin\frac{\mathfrak{r}}{x} - \frac{\mathfrak{r}}{x}\cos\frac{\mathfrak{r}}{x}}{\left(\frac{\mathfrak{r}}{x}\right)^2}.$$

Es sei nun q_0 die mittlere Dichtigkeit und q, wie oben, die Dichtigkeit auf der Oberfläche, dann ist

$$q_0 = \frac{3F}{\mathfrak{r}} \frac{\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta}{\vartheta^2},$$

$$q = \frac{F}{\mathfrak{r}} \sin\vartheta,$$

folglich

(13)
$$\frac{q_0}{q} = 3\,\frac{t-\vartheta}{t\vartheta^2} = \frac{3z}{\vartheta^2}.$$

Wenn wir dieses Verhältniss der mittleren Dichtigkeit zur Dichtigkeit in der Oberfläche mit f bezeichnen, eine Grösse, welche experimentell bestimmt werden kann, so liefert (13)

$$f = 3\,\frac{t-\vartheta}{t\vartheta^2}.$$

Aus dieser Gleichung kann ϑ durch Annäherung bestimmt werden, und dann drückt (12) $\mathfrak{e}$ durch bekannte Grössen aus. In der That geht (12) über in

(14)
$$\frac{5m}{2\mathfrak{e}} = 3\,\frac{1-f+\frac{f^2\vartheta^2}{9}}{f(f-1)} = \frac{f\vartheta^2}{3(f-1)} - \frac{3}{f}.$$

Aus (13) und (14) berechnet man ohne Mühe die Zahlen der Columnen IV und V der folgenden Tabelle. Die Columne VII zeigt das Verhältniss, in welchem das Trägheitsmoment in Beziehung auf einen mittleren Durchmesser für das angenommene Dichtigkeitsgesetz zu dem Werthe steht, den dasselbe unter der Voraussetzung, die Erde wäre homogen, haben würde.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$1-\frac{\vartheta}{t}$	$\frac{\vartheta}{\pi}180^0$	ϑ	f	$\mathfrak{e}$	$\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{C}$	$\frac{C}{{}^2/_5 M\mathfrak{r}^2}$
3·91	140^0	4·244	1·966	$\frac{1}{292}$	0·00335	0·843
4·24	142^0·5	2·487	2·057	$\frac{1}{295}$	·00330	·835
4·61	145^0	2·531	2·161	$\frac{1}{299}$	·00325	·826
5·04	147^0·5	2·574	2·282	$\frac{1}{302·5}$	·00321	·818
5·53	150^0	2·618	2·423	$\frac{1}{306·5}$	·00315	·810
6·11	152^0·5	2·662	2·589	$\frac{1}{311}$	·00309	·801
6·80	155^0	2·705	2·788	$\frac{1}{315}$	·00304	·792

825. Dynamischer Ursprung der Präcession und Nutation. — Die Erscheinungen der Präcession und der Nutation rühren daher, dass die Erde nicht centrobarisch (§ 526) ist und deshalb die Sonne und den Mond anzieht und von diesen Körpern Einwirkungen erleidet in Richtungen, welche, ausser wenn sie in der Ebene des Aequators der Erde liegen, nicht genau durch den Trägheitsmittelpunkt derselben gehen. Daher erhält man, wenn man die Anziehung jedes der beiden Körper aus ihrer wirklichen Linie in eine durch den Trägheitsmittelpunkt der Erde gehende parallele Linie versetzt (§ 555), ein Kräftepaar, welches, wenn wir zunächst der Einfachheit wegen annehmen, die Schwerkraft sei um die Polaraxe herum symmetrisch, die Erde um einen Durchmesser ihres Aequators in einer solchen Richtung zu drehen strebt, dass die Ebene des Aequators dem störenden Körper zugewandt wird. Das Moment dieses Kräftepaars ist [§ 539 (14)] gleich

$$S\,\frac{3(C-A)\sin\delta\cos\delta}{D^3}, \tag{15}$$

wo S die Masse des störenden Körpers, D seine Entfernung, δ seine Declination und C und A die beziehungsweise für den Polar- und den Aequatorialdurchmesser genommenen Trägheitsmomente der Erde bezeichnen. Aller Wahrscheinlichkeit nach (§§ 796, 797) sind die für die beiden Hauptaxen in der Ebene (§ 795) des Aequators genommenen Trägheitsmomente sehr merklich von einander verschieden; es leuchtet aber ein und wird im zweiten Bande bewiesen werden, dass die Präcession und die Nutation doch so beschaffen sind, wie sie sein würden, wenn die Erde um eine Axe symmetrisch wäre und zum Trägheitsmoment in Beziehung auf die äquatorialen Durchmesser das arithmetische Mittel zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe hätte, den dieses Trägheitsmoment thatsächlich hat. Aus § 539 (12) sehen wir, dass zur Bestimmung der Differenzen der in Beziehung auf die Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente, oder, falls um eine Axe Symmetrie stattfindet, des Werthes von $C - A$ im Allgemeinen eine Kenntniss der Schwerkraft auf der Oberfläche oder im äusseren Raume, oder [§§ 794, 795] der Gestalt der Meeresniveaufläche genügt, und dass es keiner Data in Betreff der Dichtigkeit im Innern der Erde bedarf.

Setzt man § 539 (12) gleich § 794 (17), wo $F_2(\vartheta, \varphi)$, wenn die Meeresniveaufläche als symmetrisch vorausgesetzt wird, einfach $e\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$ wird, so erhalten wir

$$\frac{M\mathfrak{r}^2}{r^3}\left(\epsilon - \frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{3} - cos^2\vartheta\right) = \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{r^3}\left(\frac{1}{3} - cos^2\vartheta\right),$$

und hieraus folgt

$$C - A = \frac{2}{3} M\mathfrak{r}^2\left(\epsilon - \frac{1}{2}m\right). \tag{16}$$

In ähnlicher Weise können wir darthun, dass dieselbe Formel für den realen Fall gilt, in welchem die Meeresniveaufläche ein Ellipsoid von drei ungleichen Axen ist, von denen die eine mit der Rotationsaxe zusammenfällt; es bezeichnet dann ϵ den Mittelwerth der Ellipticitäten der beiden durch die Rotationsaxe gehenden Hauptschnitte dieses Ellipsoides und A den Mittelwerth der für die beiden in der Ebene des Aequators liegenden Hauptaxen genommenen Trägheitsmomente.

826. Die Präcession belehrt uns über die Vertheilung der Erdmasse, während die Grösse der Schwerkraft auf der Erdoberfläche es nicht thut. — Die durch die störenden Kräfte erzeugten Winkelbeschleunigungen sind (§ 281) den Momenten der Kräftepaare direkt und dem für einen äquatorialen Durchmesser genommenen Trägheitsmoment der Erde umgekehrt proportional. Es würden aber (Band II) die in der Präcession und Nutation beobachteten Gesammtresultate, wenn der Zustand der Erde sich änderte, direkt wie $C - A$ und umgekehrt wie C variiren. Wir haben gesehen (§ 794), dass $C - A$ unverändert bleibt, wenn die Dichtigkeit im Innern der Erde eine andere wird, dabei aber die Schwerkraft auf der Oberfläche [und folglich (§ 793) auch im äusseren Raume] keine Aenderung erleidet. Anders verhält es sich dagegen mit der Grösse C, welche kleiner oder grösser sein wird, jenachdem die Masse in den um den Mittelpunkt liegenden Theilen mehr verdichtet, oder bis auf eine kleine Entfernung von der Oberfläche näherungsweise mehr homogen ist. So kommt es, dass ein Vergleich zwischen der dynamischen Theorie und der Beobachtung der Präcession und Nutation uns über die Vertheilung der Masse im Innern der Erde belehrt (ganz so, wie wir aus der Grösse der Beschleunigung von Kugeln oder Cylindern, die eine geneigte Ebene hinunterrollen, erkennen können, ob wir einen vergoldeten Messingkörper ohne Höhlung oder einen hohlen Goldkörper von der nämlichen Schwere und gleicher Oberfläche vor uns haben), während wir eine solche Belehrung nicht schöpfen können aus der Gestalt der Meeresoberfläche, der Vertheilung der Schwere auf der Erdoberfläche oder der Störung der Bewegung des Mondes, ohne eine Hypothese, wie das anfängliche Flüssigsein oder die gegenwärtige Uebereinstimmung der Oberflächen gleicher Dichtigkeit mit den Flächen anzunehmen,

welche, wenn die ganze Erde ihrer Starrheit beraubt würde, Flächen gleichen Drucks sein würden.

827. Bestimmung der Constanten der Präcession mittels des Laplace'schen Gesetzes. — Wir wollen aber zunächst untersuchen, welche Grösse die terrestrische Constante $\frac{C-A}{C}$ der Präcession und Nutation haben würde, wenn Laplace's Gesetz über die Dichtigkeit im Innern der Erde richtig wäre, und wenn die Schichten gleicher Dichtigkeit für die jetzige Winkelgeschwindigkeit der Rotation Niveauflächen wären. Jedes Trägheitsmoment, welches den letzteren Theil dieser Annahme involvirt, soll durch einen grossen deutschen Buchstaben bezeichnet werden.

Das Trägheitsmoment für die Polaraxe ist nach § 281

$$\mathfrak{C} = 2\int_0^{\mathfrak{r}}\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \varrho\,\mathfrak{r}^2 \sin\vartheta\, d\mathfrak{r}\, d\vartheta\, d\varphi \,.\, \mathfrak{r}^2 \sin^2\vartheta,$$

wo der erste Factor unter dem Integralzeichen ein Element der Masse, der zweite das Quadrat seines Abstandes von der Axe ist.

Für das in Beziehung auf eine andere Hauptaxe (die irgend ein äquatorialer Radius sein kann, hier aber in der Ebene angenommen wird, von welcher aus φ gemessen wird) genommene Trägheitsmoment erhalten wir

$$\mathfrak{A} = 2\int_0^{\mathfrak{r}}\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \varrho\,\mathfrak{r}^2 \sin\vartheta\, d\mathfrak{r}\, d\vartheta\, d\varphi \,.\, \mathfrak{r}^2(1-\sin^2\vartheta \sin^2\varphi).$$

Nun ist nach § 823

$$\mathfrak{r} = r\left[1 + e_2\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right],$$

wo $\mathfrak{r}$ den mittleren Radius der durch (r, ϑ, φ) gehenden Oberfläche gleicher Dichtigkeit bezeichnet; daraus folgt

$$\mathfrak{r}^4 d\mathfrak{r} = \frac{1}{5}\frac{d\mathfrak{r}^5}{dr}\,dr = r^4\,dr + \frac{d\,.\,r^5 e_2}{dr}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)dr.$$

Es sei nun

$$(17)\qquad \begin{cases} \int_0^{\mathfrak{r}} \varrho\, r^4 dr = K \\ \text{und} \\ \int_0^{\mathfrak{r}} \varrho\, \frac{d\,.\,r^5 e_2}{dr}\, dr = K_1, \end{cases}$$

dann ist

$$\mathfrak{C} = 2\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \left[K + K_1\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right],$$

oder näherungsweise

$$\mathfrak{C} = \frac{8\pi}{3} K. \tag{18}$$

Ferner ist

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{C} - \mathfrak{A} &= 2\int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \left[K + K_1\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right](\sin^2\vartheta - 1 + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi) \\ &= \frac{8\pi}{15} K_1. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Nun haben wir

$$K = \int_0^{\mathfrak{r}} \varrho r^4 dr = F\int_0^{\mathfrak{r}} r^3 \sin\frac{r}{\varkappa}\, dr,$$

oder, wenn wir wie früher $\vartheta = \frac{\mathfrak{r}}{\varkappa}$ setzen,

$$K = F\varkappa^4 \cos\vartheta(-\vartheta^3 + 3\vartheta^2 t + 6\vartheta - 6t).$$

Weiter ist

$$K_1 = \int_0^{\mathfrak{r}} \varrho \frac{d}{dr}(r^5 e_2)\, dr = \mathfrak{r}^5 e q - \int_0^{\mathfrak{r}} r^5 e_2 \frac{d\varrho}{dr}\, dr,$$

und dies geht nach § 826 (10) über in

$$\left\{\begin{aligned} K_1 &= 5\mathfrak{r}^2 e\int_0^{\mathfrak{r}} \varrho r^2\, dr - \frac{5\mathfrak{r}^5\omega^2}{8\pi} \\ &= 5\left(e - \frac{m}{2}\right) F\varkappa^4 \vartheta^2 (t - \vartheta)\cos\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Auf diese Weise erhalten wir schliesslich

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{C} &= \frac{1}{5}\frac{K_1}{K} = \left(e - \frac{m}{2}\right)\frac{\vartheta^2(t - \vartheta)}{-\vartheta^3 + 3\vartheta^2 t + 6\vartheta - 6t} \\ &= \left(e - \frac{m}{2}\right)\frac{z}{2 + \left(1 - \frac{6}{\vartheta^2}\right) z}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Mittels dieser Formel sind die Zahlen der Columne VI in der Tabelle des § 824 berechnet worden. Aus (19) und (20) sehen wir, dass

$$\mathfrak{C}-\mathfrak{A} = \frac{8\pi}{3}\left(\mathrm{r}^2\,\mathrm{e}\int_0^{\mathrm{r}} \varrho\, r^2\, dr - \frac{\mathrm{r}^5\,\omega^2}{8\,\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\, M\, \mathrm{r}^2 \left(\mathrm{e} - \frac{m}{2}\right)$$

ist, was, wie es auch der Fall sein muss, mit § 825 (16) übereinstimmt.

828. Vergleich der Laplace'schen Hypothese mit der Beobachtung. — Aus den von Le Verrier und Serret mit grosser Sorgfalt ausgeführten Untersuchungen über die Präcession und Nutation geht hervor, dass der wahre Werth von $\frac{C-A}{C}$ nur sehr wenig von 0·00327 *) verschieden ist. Nach der Tabelle des § 824 stimmt dies mit $\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{C}$ für $f = 2{\cdot}1$ überein, was $\mathrm{e} = \frac{1}{297}$ liefert. Dies sind (§§ 792, 796, 797) die wahrscheinlichsten Werthe, die wir diesen Elementen durch Beobachtung beilegen können. Danach ist die Hypothese von Laplace, soweit wir die Mittel haben, sie zu prüfen, bewahrheitet.

829. Prüfung der Laplace'schen Hypothese mit Beziehung auf die Zusammendrückbarkeit einiger Stoffe.— Um die Hypothese von Laplace noch weiter zu prüfen, ist zu untersuchen, ob die Resultate derselben Etwas enthalten, was mit unserer experimentellen Kenntniss der Zusammendrückbarkeit der Materie unter Druckkräften, wie wir sie in unseren Laboratorien anwenden können, unvereinbar wäre. Zu diesem Zwecke ist der vorhergehenden Tabelle die erste Columne zugefügt worden. Aus derselben lässt sich die nach dem angenommenen Dichtigkeitsgesetze für die respectiven Werthe von ϑ erforderte Zusammendrückbarkeit der obersten Schicht der flüssigen Masse entnehmen, welche die Erdrinde bildete. In der That sind die Zahlen in der Columne I diejenigen, durch welche der Erdradius dividirt werden muss, um gemäss dem Werthe, welchen die Schwerkraft auf der Oberfläche hat, die Längen des Compressionsmodulus (§ 688) der obersten Flüssigkeitsschicht zu finden.

Wir haben nach § 824 (3)

$$q = \frac{F}{r}\sin\frac{r}{x},\ \frac{d\,q}{d\,r} = -\frac{F}{r}\left(\frac{\sin\frac{r}{x}}{r} - \frac{\cos\frac{r}{x}}{x}\right);$$

*) Annales de l'Observatoire Impérial de Paris, 1859, p. 324.

hieraus ergibt sich an der Oberfläche

$$\left[-\frac{1}{q}\frac{dq}{dr}\right] = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\vartheta}{t}\right).$$

Die entsprechenden Zahlen für mehrere verschiedene flüssige und feste Substanzen sind folgende: —

Alkohol	37
Wasser	27
Quecksilber	27
Glas	5·0
Kupfer	8·1
Eisen	4·1
Geschmolzene Lava, nach Laplace's Gesetz, für $f = 2·1$	4·42

Dieser Vergleich kann entschieden als dem Gesetz von Laplace nicht widersprechend angesehen werden; es ist aber wünschenswerth, dass Experimente über die Zusammendrückbarkeit geschmolzener Felsen wirklich angestellt würden.

830. Ein aus der Ellipticität der Erde und der Fluthreibung gezogener Schluss. — In § 276 wurde bewiesen, dass die Ebbe und Fluth die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde zu verringern bestrebt sein muss, und in einem späteren Bande wird dargethan werden, dass diesem Streben nur in einem ganz geringen Grade durch die Beschleunigung entgegen gearbeitet wird, welche aus der säcularen Abkühlung und Zusammenziehung der Erde resultirt. Seit dem Druck des § 276 sind uns Ergebnisse der physischen Astronomie bekannt geworden, welche den in § 405 aufgestellten Satz umstürzen und so dem § 276 eine praktische Bedeutung beilegen, welche jener Satz ihm versagte. Der in § 405 angegebene Satz wurde von Laplace aus der Uebereinstimmung der Beobachtung und seiner Dynamik der mittleren Bewegung des Mondes gezogen. Im Jahre 1853 wies Adams in Laplace's Werk einen Fehler nach, der bis dahin der Aufmerksamkeit der Astronomen entgangen war, und zeigte, dass ungefähr nur die Hälfte der beobachteten Beschleunigung der mittleren Bewegung des Mondes in Beziehung auf die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde nach Laplace's Theorie ihre Erklärung fände. Im Jahre 1859 theilte er Delaunay als Resultat, zu dem er schliesslich gelangt sei, mit: — dass der Mond am Ende eines Jahrhunderts sich 5·7″ vor der Lage befindet, welche er in Beziehung auf einen Meridian der Erde nach den Winkelgeschwindigkeiten

der beiden Bewegungen und der aus den verschiedenen bekannten störenden Ursachen genau berechneten Beschleunigung seiner eigenen Bewegung beim Beginn des Jahrhunderts haben würde. Delaunay bewahrheitete bald nachher dieses Resultat und erklärte im Anfang des Jahres 1866, dass diese Erscheinung sich nur durch die Annahme einer Verlangsamung der Rotation der Erde durch die Fluthreibung erklären lasse. Indem Adams diese Hypothese benutzte und die daraus sich ergebende Verlangsamung der mittleren Bewegung des Mondes durch die Fluthreaction (§ 276) in Rechnung zog, fand er in einer Berechnung, die er uns mittheilte, unter der näherungsweise richtigen Voraussetzung, dass die aus den Sonnen- und Mondfluthen herrührenden Theile der Verlangsamung der Erdrotation den Quadraten der bezüglichen Fluth erzeugenden Kräfte proportional sind, 22ˢ als die Zeit, um welche die Erde in einem Jahrhundert hinter einer vollkommenen zu Anfang des Jahrhunderts gestellten Uhr zurückbleiben würde. Wenn die Verlangsamung, welche in einem Jahrhundert diese Gesammtwirkung hervorbringt, gleichförmig (§ 35, b) wäre, so würde die Erde, als Chronometer angesehen, in der Mitte des Jahrhunderts um 0·22 einer Secunde und am Ende des Jahrhunderts um 0·44 einer Secunde per Jahr langsamer gehen. Der letztere Betrag ist $\frac{1}{70{,}000{,}000}$ der jetzigen Winkelgeschwindigkeit, und wenn die Grösse der Verlangsamung seit 10,000,000 Jahrhunderten gleichförmig gewesen wäre, so müsste vor dieser Zeit die Erde um $\frac{1}{7}$ schneller als gegenwärtig rotirt haben und die Centrifugalkraft im Verhältniss von 64 zu 49 grösser gewesen sein. Wenn die Erstarrung damals oder früher stattfand, so muss die Ellipticität der oberen Schichten gleicher Dichtigkeit $\frac{1}{230}$ statt ungefähr $\frac{1}{300}$ gewesen sein, welchen Werth sie jetzt sicherlich hat. Es ist unmöglich, dem Schluss zu entgehen, dass die Erstarrung vor weit weniger als tausend Millionen Jahren erfolgt ist. Im Zusatz D wird aus der Theorie der Wärmeleitung gefolgert, dass die Erstarrung vor etwa hundert Millionen Jahren stattgefunden haben, aber nicht fünfhundert Millionen Jahre entfernt sein kann.

831. Plötzliche Aenderungen der Dichtigkeit im Innern der Erde sind nicht unwahrscheinlich. — Nach den bekannten Thatsachen hinsichtlich der oben (§ 829) angegebenen Zusammen-

drückbarkeit terrestrischer Substanzen ist es höchst wahrscheinlich, dass sogar in einem chemisch homogenen Stoffe nach unten zu eine continuirliche Zunahme der Dichtigkeit in einem Betrage erfolgt, der mit dem in Laplace's Gesetz vorausgesetzten vergleichbar ist. Es ist aber nicht unwahrscheinlich, dass auch discontinuirliche Aenderungen in der Beschaffenheit der Substanz vorhanden sein mögen, wie z. B. wenn ein grosser Theil des Erdinnern zu einer früheren Zeit aus geschmolzenen Metallen bestanden hätte, die jetzt erstarrt sind. Wir fügen daher eine Lösung des Problems hinzu, die Elliptícitäten der Oberflächen einer rotirenden Masse zu bestimmen, die aus zwei sich mit einander nicht vermischenden Flüssigkeiten von ungleicher Dichtigkeit besteht, wobei jedoch jede der Flüssigkeiten als unzusammendrückbar vorausgesetzt wird.

Es seien ϱ und $\varrho + \varrho'$ die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten; die Flüssigkeit von der Dichte $\varrho + \varrho'$ bilde das Sphäroid

$$r = a'\left[1 + \varepsilon'\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right], \tag{1}$$

während die Flüssigkeit von der Dichte ϱ den Raum zwischen dem Sphäroid (1) und der ausserhalb desselben liegenden concentrischen und coaxalen Oberfläche

$$r = a\left[1 + \varepsilon\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] \tag{2}$$

ausfüllen möge. Ferner möge die ganze Masse mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω rotiren. Die Bedingungen des Gleichgewichts sind, dass die Oberfläche jedes Sphäroids eine Fläche constanten Potentials sei.

Nun ist das Potential in einem Punkte r, ϑ in der äusseren Flüssigkeit

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{4\pi\varrho}{3}\left[\frac{3a^2 - r^2}{2} + \frac{3}{5}r^2\varepsilon\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] \\ &+ \frac{4\pi\varrho'}{3}\left[\frac{a'^3}{r} + \frac{3}{5}\frac{a'^5}{r^3}\varepsilon'\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)\right] \\ &+ \frac{1}{3}\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Die erste Zeile ist das aus einer das grössere Sphäroid ausfüllenden Flüssigkeit von der Dichte ϱ herrührende Potential, die zweite das Potential, welches aus einer das innere Sphäroid erfüllenden Flüssigkeit von der Dichte ϱ' entsteht, die dritte das in räumlichen harmonischen Functionen dargestellte Potential $\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\vartheta\right)$ der Centrifugalkraft.

Substituiren wir in (3) der Reihe nach die in (1) und (2) angegebenen Werthe von r, vernachlässigen die zweiten, u. s. w. Potenzen der Elliptícitäten und setzen die Summe der Coefficienten von $\left(\frac{1}{3} - \cos^2\vartheta\right)$ gleich Null, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen sich

$$(4)\qquad \varepsilon = \frac{\varrho + \frac{1}{5}\varrho'\left(2 + 3\,\frac{a'^5}{a^5}\right)}{\left(\varrho + \frac{2}{5}\varrho'\right)\left(\frac{2}{5}\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right) - \frac{9}{25}\varrho\varrho'\,\frac{a'^5}{a^5}} \cdot \frac{3\,\omega^2}{8\,\pi}$$

ergibt. Der entsprechende Werth von ε' ist aus der Gleichung

$$\varepsilon\left(\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right) = \varepsilon'\left\{\varrho + \frac{1}{5}\varrho'\left(2 + 3\,\frac{a'^5}{a^5}\right)\right\}$$

zu entnehmen.

Drückt man ω^2 durch die bekannte Grösse m aus, so erhält man

$$(5)\qquad \frac{3\,\omega^2}{8\,\pi} = \frac{m}{2}\left(\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right).$$

Auch ist zu einem genügenden Grade der Genauigkeit

$$(6)\qquad \begin{cases} C = \frac{8\,\pi}{15}\,a^5\left(\varrho + \frac{a'^5}{a^5}\varrho'\right) \\ M = \frac{4\,\pi}{3}\,a^3\left(\varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'\right), \end{cases}$$

und die mittlere Dichtigkeit ist offenbar

$$(7)\qquad \varrho + \frac{a'^3}{a^3}\varrho'.$$

Die numerischen Werthe der Ausdrücke (4) und (7) sind näherungsweise aus der Beobachtung und aus Experimenten bekannt, so dass, wenn wir einen Werth von $\frac{a'}{a}$ annehmen, wir sofort ϱ und ϱ' und daraus den Werth von $\frac{C-A}{C}$ bestimmen können.

Aus den hier gegebenen Formeln können, wie sich leicht zeigen lässt, mit der Beobachtung sehr nahe übereinstimmende Resultate hinsichtlich der Präcession, des Verhältnisses der Dichtigkeit auf der Oberfläche zur mittleren Dichtigkeit und der Ellipticität der Meeresniveaufläche gezogen werden, ohne dass man unzulässige Hypothesen über die relativen Volumina und Dichtigkeiten der beiden vorausgesetzten Flüssigkeiten zu Hülfe zu nehmen hätte. Dieser Gegenstand muss jedoch dem Leser als Uebungsaufgabe überlassen werden.

832. **Starrheit der Erde.** — Diese Berechnungen und alle bisher über die Flutherscheinungen und die Präcession und Nutation veröffentlichten dynamischen (sowohl die statischen, wie die kinetischen) Untersuchungen, mit alleiniger Ausnahme der unten erwähnten, setzten voraus, dass die äussere Oberfläche der festen Erdrinde absolut starr sei. Vor wenigen Jahren *) wurde zum

*) „On the Rigidity of the Earth." W. Thomson. *Trans. R. S.*, May 1862.

ersten Male die Frage erhoben: Behält die Erde ihre Gestalt mit vollkommener Starrheit bei, oder gibt sie in merklicher Weise dem deformirenden Streben der Attractionskräfte nach, welche Mond und Sonne auf ihre oberen Schichten und ihre innere Masse ausüben? In einem gewissen Grade muss sie nachgeben, da keine Substanz eine unendlich grosse Starrheit besitzt; ob aber diese Fluthen der festen Erdmasse gross genug sind, um durch irgend eine Art Beobachtung auf directem oder auf indirectem Wege entdeckt werden zu können, ist noch nicht ausgemacht worden. Das negative Resultat der Versuche, ihren Einfluss auf die Meeres- und Seefluthen, wie sie bisher beobachtet sind, und auf die Präcession und Nutation zu erforschen, genügt, wie wir sehen werden, die bis jetzt so vorherrschende Hypothese zu widerlegen, dass wir auf einer dünnen Schale fester Substanz leben, welche eine flüssige Masse geschmolzener Felsen und Metalle umhülle, und beweist im Gegentheil, dass die Erde im Ganzen weit starrer als irgend einer der Felsen ist, welche ihre obere Rinde ausmachen.

833. Die Beschaffenheit des deformirenden Einflusses wird leicht verstanden werden, wenn wir betrachten, dass, wenn die ganze Erde vollkommen flüssig wäre, ihre Oberfläche zusammenfallen würde mit einer Fläche constanten Potentials in Beziehung auf die Attraction ihrer eigenen Masse, die Centrifugalkraft ihrer Rotation und die Fluth erzeugende Resultante (§ 804) der Kräfte des Mondes und der Sonne und deren kinetische Reactionen *). So würden (§§ 819, 824) die vollen Mond- und Sonnengleichgewichtsfluthen eintreten, und deren Höhe würde $2^1/_2$ mal so gross sein, wenn die Flüssigkeit homogen wäre, oder nahezu doppelt so gross, wenn die Flüssigkeit heterogen wäre und ihre Dichtigkeit nach Laplace's hypothetischem Gesetz zunähme. Wenn jetzt eine sehr dünne Schicht einer leichteren Flüssigkeit hinzugefügt würde, so würde diese Schicht die frühere

*) Es wird im zweiten Bande gezeigt werden, dass die „Gleichgewichtstheorie" der Fluthen für einen Ocean von gleichmässiger oder nach unten hin zunehmender Dichtigkeit, welcher einen festen Kern vollständig bedeckt, wegen der täglichen Rotation eine Correction erfordert, aber eine um so kleinere Correction, je kleiner dieser Kern ist, und dass sie, wenn kein solcher Kern vorhanden ist, vollständig mit der „kinetischen Theorie" übereinstimmt, immer vorausgesetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit für die gewöhnlichen Annäherungen (§§ 794, 801, 802, 815) nicht zu gross ist, welche erfordern, dass auf keine Weise eine mehr als unendlich kleine Abweichung von der Kugelgestalt stattfinde. Es ist interessant zu bemerken, dass dieser Satz nicht erfordert, dass die Fluthdeformationen klein seien im Vergleich zu der durch die Centrifugalkraft der Rotation erzeugten Abweichung von 70,000 engl. Fuss.

Grenzfläche in einer ringsherum nahezu gleichen Höhe bedecken und unter den Einflüssen der Fluth mit jener Fläche einfach steigen und fallen, ohne mehr als unendlich kleine Variationen in ihrer eigenen Tiefe zu zeigen. Wenn also der feste Theil der Erde so wenig Starrheit besässe, dass es ihm gestattet wäre, in seiner Gestalt nahezu in demselben Grade nachzugeben, als wenn er flüssig wäre, so würde fast Nichts von dem stattfinden, was wir Ebben und Fluthen nennen — Fallen und Steigen des Wassers in Beziehung auf das Land —, sondern Meer und Land zusammen würden jede zwölf Mondstunden einige Fuss steigen und fallen. Dies würde, wie wir sehen werden, auch der Fall sein, wenn die geologische Hypothese einer dünnen Erdrinde wahr wäre. Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth, wie sie wirklich erfolgen, liefern also eine sichere Widerlegung jener Hypothese. Wir werden in der That alsbald sehen, dass sogar eine continuirliche feste Kugel von derselben Masse und demselben Durchmesser wie die Erde, wenn sie homogen und von derselben Starrheit (§ 680) wie Glas oder Stahl wäre, in ihrer Gestalt den Flutheinwirkungen beziehungsweise $^3/_5$ oder $^1/_3$ mal so viel nachgeben würde, wie eine vollkommen flüssige Kugel, und weiter wird gezeigt werden, dass die Wirkung eines solchen Nachgebens in dem festen Körper, je nachdem seine Starrheit gleich der des Glases oder der des Stahls vorausgesetzt wird, darin bestehen würde, die Fluthen auf ungefähr $^2/_5$ oder $^2/_3$ von dem Betrage zu reduciren, den sie haben würden, wenn die Starrheit unendlich gross wäre.

834. **Fluthen der elastischen festen Erdtheile.** — Um dies zu beweisen und diese Frage der Fluthen in der elastischen festen Erde zu erläutern, wollen wir die Lösung des allgemeinen Problems des § 696 explicit entwickeln für den Fall einer homogenen elastischen festen Kugel, welche keinem Oberflächenzuge ausgesetzt ist, sondern durch ein im Gleichgewicht befindliches System von Kräften unendlich wenig deformirt wird, die im Innern körperlich einwirken, und die wir zum Schluss mit dem Fluth erzeugenden Einflusse des Mondes oder der Sonne zusammenfallen lassen werden. Zunächst beschränken wir jedoch die deformirende Kraft nur durch die am Ende des § 733 gemachte Voraussetzung.

Eine homogene feste elastische Kugel mit freier Oberfläche wird durch eine körperlich einwirkende harmonische Kraft deformirt. — Wenn wir den Vorschriften des § 732 folgen, so haben wir, um die vollständige Lösung zu erhalten, die beiden Arten von Functionen

$('\alpha, '\beta, '\gamma)$ und $(\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \gamma_{\prime})$ zu finden; für die erstere liefern die Formeln (6) und (7) des § 733 folgende Werthe: —

$$(1)\quad \begin{cases} '\alpha = -\dfrac{1}{2(2\nu+5)(m+n)} \dfrac{d(r^2 W_{\nu+1})}{dx} \quad \dfrac{1}{m+n}\Big\{-\dfrac{r^2}{2(2\nu+3)}\dfrac{dW_{\nu+1}}{dx} \\ \qquad + \dfrac{r^{2\nu+5}}{(2\nu+3)(2\nu+5)} \dfrac{d(W_{\nu+1} r^{-2\nu-3})}{dx}\Big\} \end{cases}$$

und symmetrische Formeln für $'\beta$ und $'\gamma$, woraus [§ 733 (6)]

$$(2)\quad \begin{cases} '\delta = -\dfrac{W_\nu}{m+n} \\ \text{und [§ 737 (28)]} \\ '\zeta = -\dfrac{(\nu-3) r^2 W_{\nu+1}}{2(2\nu+5)(m+n)} \end{cases}$$

folgt. In § 737 (29) eingesetzt, liefern diese Formeln, wenn man $\nu+2$ für ν setzt,

$$(3)\quad -'F.r = \frac{1}{m+n}\left\{(m-n) W_{\nu+1}\, x + \frac{(\nu+2)n}{(3\nu+5)} \frac{d(r^2 W_{\nu+1})}{dx}\right\},$$

was, durch die geeignete Formel [§ 737 (36)] auf harmonische Functionen reducirt, in

$$(4)\quad \begin{cases} 'Fr = \dfrac{-1}{(2\nu+3)(m+n)} \left\{\Big[m+(\nu+1)n\Big] r^2 \dfrac{dW_{\nu+1}}{dx} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{(2\nu+5)m-n}{2\nu+3} r^{2\nu+5} \dfrac{d(W_{\nu+1} r^{-2\nu-3})}{dx}\right\} \end{cases}$$

übergeht. Diese und die symmetrischen Formeln für $'G r$ und $'H r$ drücken, wenn r gleich a genommen wird, die Componenten der für die Flächeneinheit genommenen Kraft aus, welche durch Anwendung einer auf die Grenzfläche der Kugel von aussen einwirkenden Zugkraft aufgehoben werden müsste, wenn die Deformation im Innern genau die durch (1) ausgedrückte wäre. Folglich müssen wir jetzt, immer noch nach den Vorschriften des § 732, den Zustand der inneren Deformation $(\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \gamma_{\prime})$ bestimmen, bei welcher keine auf das Innere von aussen körperlich einwirkende Kraft aus der (4) gleichen und entgegengesetzten Oberflächenzugkraft resultiren würde. Die Lösung dieses Theils des Problems enthält § 737 (52), wo die besonderen Data jetzt

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{A_\nu}{a^{\nu+1}} = \dfrac{m+(\nu+1)n}{(2\nu+3)(m+n)} r^{-\nu} \dfrac{dW_{\nu+1}}{dx} \\ \dfrac{A_{\nu+2}}{a^{\nu+1}} = -\dfrac{(2\nu+5)m-n}{(2\nu+3)(2\nu+5)(m+n)} r^{\nu+3} \dfrac{d(W_{\nu+1} r^{-2\nu-3})}{dx} \end{cases}$$

und symmetrische Ausdrücke für B_ν, C_ν und $B_{\nu+2}$, $C_{\nu+2}$, aber keine Grössen von anderen Ordnungen als ν und $\nu+2$ sind. Folglich ergibt sich für die Hilfsfunctionen des § 737 (50)

$$(6)\begin{cases} \Psi'_{\nu-1} = 0, \quad \Phi_{\nu+1} = -\dfrac{(\nu+1)(2\nu+1)[m+(\nu+1)n]\,a^{\nu+1}}{(2\nu+3)(m+n)}\,W_{\nu+1} \\ \Psi'_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+2)[(2\nu+5)m-n]\,a^{\nu+1}}{(2\nu+3)(m+n)}\,W_{\nu+1}, \quad \Phi_{\nu+3} = 0. \end{cases}$$

Nun kann (52), wenn man die passenden Ausdrücke für $\nu + 2$ statt ν addirt, zur Bestimmung von $\alpha_{,}$ benutzt werden und geht, da $\Psi'_{\nu-1}$ und $\Phi_{\nu+3}$ verschwinden, über in

$$(7)\begin{cases} \alpha_{,} = \dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{1}{\nu-1}\left[\dfrac{a^{-\nu+1}}{2\nu(2\nu+1)}\dfrac{d\Phi_{\nu+1}}{dx} + \dfrac{A_\nu r^\nu}{a^{\nu-1}}\right]\right. \\ \quad + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{m(a^2-r^2).a^{-\nu-1}}{[2(\nu+2)^2+1]m-(2\nu+3)n}\,\dfrac{d\Psi'_{\nu+1}}{dx} \\ \quad + \dfrac{a^{-\nu-1}}{\nu+1}\left[\dfrac{[(\nu+4)m-(2\nu+3)n]}{[2(\nu+2)^2+1]m-(2\nu+3)n}\,\dfrac{r^{2\nu+5}\,d(\Psi'_{\nu+1}r^{-2\nu-3})}{(2\nu+5)\,dx}\right. \\ \quad \left.\left. + A_{\nu+2}\,r^{\nu+2}\right]\right\}. \end{cases}$$

Hierzu müssen wir den durch (1) gegebenen Werth von $`\alpha$ addiren, um nach § 732 die explicite Lösung α unseres Problems zu erhalten. Auf diese Weise gelangen wir nach etwas mühseligen algebraischen Reductionen, wobei $m + n$, welches als Factor im Zähler und Nenner jedes Bruches auftritt, wegfällt, zu einem merkwürdig einfachen Ausdruck für α. Dieser und die symmetrischen Formeln für β und γ sind folgende: —

$$(8)\begin{cases} \alpha = (\mathfrak{E}_{\nu+1}a^2 - \mathfrak{F}_{\nu+1}r^2)\dfrac{dW_{\nu+1}}{dx} - \mathfrak{G}_{\nu+1}\,r^{2\nu+5}\,\dfrac{d(W_{\nu+1}r^{-2\nu-3})}{dx} \\ \beta = (\mathfrak{E}_{\nu+1}a^2 - \mathfrak{F}_{\nu+1}r^2)\dfrac{dW_{\nu+1}}{dy} - \mathfrak{G}_{\nu+1}\,r^{2\nu+5}\,\dfrac{d(W_{\nu+1}r^{-2\nu-3})}{dy} \\ \gamma = (\mathfrak{E}_{\nu+1}a^2 - \mathfrak{F}_{\nu+1}r^2)\dfrac{dW_{\nu+1}}{dz} - \mathfrak{G}_{\nu+1}\,r^{2\nu+5}\,\dfrac{d(W_{\nu+1}r^{-2\nu-3})}{dz}, \end{cases}$$

wo

$$(9)\begin{cases} \mathfrak{E}_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+1)[(\nu+3)m-n]}{2\nu n\{[2(\nu+2)^2+1]m-(2\nu+3)n\}} \\ \mathfrak{F}_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+2)(2\nu+5)m-(2\nu+3)n}{2(2\nu+3)n\{[2(\nu+2)^2+1]m-(2\nu+3)n\}} \\ \mathfrak{G}_{\nu+1} = \dfrac{(\nu+1)m}{(2\nu+3)n\{[2(\nu+2)^2+1]m-(2\nu+3)n\}} \end{cases}$$

ist. Der unendlich grosse Werth von $\mathfrak{E}_{\nu+1}$ für den Fall $\nu = 0$ hängt von dem Umstande ab, dass die körperlich wirkende Kraft für diesen Fall, da sie gleichförmig ist und durch die ganze Masse in parallelen Richtungen wirkt, sich nicht durch sich selbst im Gleichgewicht befindet, und dass es daher zur Herstellung des Gleichgewichts eines Oberflächenzwanges bedarf.

Der Fall $\nu = 1$ ist derjenige, mit dem wir es in dem die Fluth betreffenden Problem zu thun haben. In diesem Falle verwandeln sich die Formeln (9) für die numerischen Coefficienten in

$$(10)\qquad \mathfrak{E}_2 = \frac{4m - n}{n(19m - 5n)},\quad \mathfrak{F}_2 = \frac{21m - 5n}{10n(19m - 5n)},\quad \mathfrak{G}_2 = \frac{2m}{5n(19m - 5n)}.$$

Um uns für terrestrische Anwendungen vorzubereiten, ist es zweckmässig, zu Polarcoordinaten überzugehen. Wir bezeichnen den Abstand vom Centrum mit r, die Breite mit l und die Länge mit λ, so dass

$$(11)\qquad x = r\cos l\cos\lambda,\quad y = r\cos l\sin\lambda,\quad z = r\sin l$$

ist, und drücken die entsprechenden Componenten der Verschiebung durch $`r$, $`l$, $`\lambda$ aus. Die Ausdrücke für diese letzteren werden genau dieselben wie die für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sein, nur dass wir statt $\frac{d}{dx}$, wie es in dem Ausdruck für $\alpha$ erscheint, $\frac{d}{dr}$ in dem Ausdruck für $`r$, $\frac{d}{r\,dl}$ in dem für $`l$ und $\frac{d}{r\cos l\,d\lambda}$ in dem für $`\lambda$ haben. Setzen wir also

$$(12)\qquad W_{\nu+1} = S_{\nu+1} r^{\nu+1},$$

so dass $S_{\nu+1}$ die $W_{\nu+1}$ entsprechende harmonische Flächenfunction oder die harmonische Function der Winkelcoordinaten l, λ bezeichnet, so erhalten wir

$$(13)\qquad \begin{cases} `r = \left\{(\nu+1)\mathfrak{E}_{\nu+1} a^2 - \left[(\nu+1)\mathfrak{F}_{\nu+1} - (\nu+2)\mathfrak{G}_{\nu+1}\right] r^2\right\} r^\nu S_{\nu+1} \\ `l = \left\{\mathfrak{E}_{\nu+1} a^2 - (\mathfrak{F}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_{\nu+1}) r^2\right\} r^\nu \dfrac{dS_{\nu+1}}{dl} \\ `\lambda = \left\{\mathfrak{E}_{\nu+1} a^2 - (\mathfrak{F}_{\nu+1} - \mathfrak{G}_{\nu+1}) r^2\right\} r^\nu \dfrac{dS_{\nu+1}}{\cos l . d\lambda}, \end{cases}$$

woraus schliesslich nach (9) für $`r$

$$(14)\qquad `r = \frac{(\nu+1)\{(\nu+1)[(\nu+3)m - n]a^2 - \nu[(\nu+2)m - n]r^2\}}{2\nu n\{[2(\nu+2)^2+1]m - (2\nu+3)n\}} r^\nu S_{\nu+1}$$

folgt. Die Ausdrücke für $`l$ und $`\lambda$ lassen wir besser, wie sie in (12) und (9) dargestellt sind. Aus (13) ergibt sich

$$(15)\qquad \frac{d`r}{dr} = \frac{(\nu+1)^2\{ma^2 + [(\nu+2)m - n](a^2 - r^2)\}}{2n\{[2(\nu+2)^2+1]m - (2\nu+3)n\}} r^{\nu-1} S_{\nu+1},$$

was für $r < a$ immer positiv ist, da ν wenigstens gleich 1 und [§ 698 (1)] m nothwendig (§ 694) grösser als $\frac{1}{3}n$ ist. Obgleich daher $`r$ für die successiven concentrischen Sphäroide nach aussen hin beständig zunimmt, so sehen wir doch, wenn wir den Ausdruck für $\frac{d\frac{`r}{r}}{dr}$ niederschreiben, dass $\frac{`r}{r}$, wenn $\nu > 1$ ist, vom Centrum nach aussen hin anfangs wächst, in einer gewissen Entfernung vom Centrum einen Maximalwerth erreicht

und von da bis an die Oberfläche wieder abnimmt. Wenn $\nu = 1$ ist, so erhalten wir

$$
(16)\qquad {}'r = \frac{2(4m-n)a^2-(3m-n)r^2}{n(19m-5n)}\, r\, S_2;
$$

daher nimmt $\frac{'r}{r}$ in diesem Falle vom Centrum an bis zur Oberfläche ab, und seine äussersten Werthe sind

$$
(17)\begin{cases} \text{im Centrum} \\ \dfrac{'r}{r} = \dfrac{2(4m-n)a^2}{n(19m-5n)} S_2 = \dfrac{8a^2}{19n}\left(1+\dfrac{\frac{1}{76}\frac{n}{m}}{1-\frac{5}{19}\frac{n}{m}}\right) S_2, \\ \text{an der freien Oberfläche} \\ \dfrac{'r}{r} = \dfrac{(5m-n)a^2}{n(19m-5n)} S_2 = \dfrac{5a^2}{19n}\left(1+\dfrac{\frac{6}{25}\frac{n}{m}}{1-\frac{5}{19}\frac{n}{m}}\right) S_2. \end{cases}
$$

Besondere Fälle. — Wenn die störende Wirkung die aus einer Rotation mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω herrührende Centrifugalkraft ist, so haben wir, wie wir oben (§ 794) fanden, für das ganze Potential

$$
(18)\qquad W = w\left\{\frac{1}{3}\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\left(\frac{1}{3}-\cos^2\vartheta\right)\right\},
$$

wo w die in der Volumeneinheit enthaltene Masse des festen Körpers bezeichnet. Die Wirkung des Gliedes $\frac{1}{3} w\,\omega^2 r^2$ ist bloss ein ringsherum symmetrisch erfolgender Zug des festen Körpers vom Centrum nach aussen hin; dies werden wir im zweiten Bande in dem Capitel über die Eigenschaften der Materie eingehend betrachten. Die übrigen Theile des Ausdrucks liefern uns nach unserer jetzigen Bezeichnung

$$
(19)\qquad W_2 = \frac{1}{3}\tau\,(x^2+y^2-2z^2), \quad \text{oder} \quad S_2 = w\,\tau\left(\frac{1}{3}-\cos^2\vartheta\right),
$$

wo

$$
(20)\qquad \tau = \frac{1}{2}\omega^2
$$

ist.

Für die Fluth erzeugende Kraft gelten gleichfalls die Formeln (15) und (16), wenn wir (§§ 804, 808, 813)

$$
(21)\qquad \tau = \frac{3}{2}\frac{M}{D^3}
$$

nehmen und die Zeichen so ändern, dass die Deformationsellipsoide zugespitzt statt abgestumpft werden. Die deformirte Gestalt jeder der concentrischen Kugelflächen der Kugel ist natürlich ein Rotationsellipsoid, und aus (15) und (17) erhalten wir für die äussersten dieser Flächen: —

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\text{die Ellipticität des centralen Deformationssphäroids}\\
&\quad = \frac{8\,a^2}{19\,n}\left(1+\frac{\frac{1}{76}\frac{n}{m}}{1-\frac{5}{19}\frac{n}{m}}\right)\cdot w\,\tau,\\
&\text{die Ellipticität der freien Oberfläche}\\
&\quad = \frac{5\,a^2}{19\,n}\left(1+\frac{\frac{6}{95}\frac{n}{m}}{1-\frac{5}{19}\frac{n}{m}}\right)\cdot w\,\tau.
\end{aligned}\right.
$$

Aus den Resultaten (8) bis (22) schliessen wir Folgendes: —

835. Die Umgrenzungsfläche und die inneren concentrischen Kugelflächen einer homogenen elastischen festen Kugel, welche durch von aussen einwirkende einander das Gleichgewicht haltende Attractionskräfte schwach deformirt wird, verwandeln sich in harmonische Sphäroide von derselben Ordnung und Art, wie die räumliche harmonische Function, welche die Potentialfunction dieser Kräfte ausdrückt, wenn dieselben sich so ausdrücken lassen, und die Richtung der zum Radius in irgend einem Punkte senkrechten Verschiebungscomponente ist dieselbe, wie die Richtung der zu dem Radius senkrechten Componente der anziehenden Kraft. Diese concentrischen harmonischen Sphäroide sind zwar von derselben Art, aber nicht ähnlich. Wenn sie vom zweiten Grade sind (d. h. wenn das Kraftpotential eine räumliche harmonische Function zweiten Grades ist), so sind die Verhältnisse der Ellipticitäten in den drei Normalschnitten eines jeden in allen dieselben; aber in jedem Schnitt wachsen die Ellipticitäten der concentrischen Ellipsoide vom äussersten an nach dem Centrum zu in dem Verhältniss

$$1 : \frac{5\,m - n}{2\,(4\,m - n)}.$$

Für harmonische Störungen höherer Ordnungen nimmt die natürlich im Verhältniss zum Radius gerechnete Grösse der Abweichung von der Kugelgestalt von der Oberfläche an nach innen hin bis zu einem gewissen Abstande zu und von da bis zum Centrum ab. Dieser bemerkenswerthe Satz lässt sich leicht ohne Anwendung der mathematischen Analysis darthun; wir werden uns aber darauf beschränken, diesen Beweis bloss für den Fall ellipsoidaler Störungen zu geben.

836. Synthetischer Beweis des Satzes, dass bei einer Deformation zweiter Ordnung die Ellipticität am Centrum ein Maximum ist. — Es möge die körperlich wirkende störende

Kraft aufhören zu wirken und die Oberfläche durch ein auf ihr so vertheiltes System von Zugkräften (§§ 693, 662) in derselben ellipsoidalen Form erhalten bleiben, dass überall im Innern eine homogene Deformation erzeugt wird. Die inneren ellipsoidalen Deformationsflächen werden jetzt ähnliche concentrische Ellipsoide werden, und die mehr nach innen zu liegenden müssen jetzt offenbar weniger elliptisch sein, als sie waren, als die äussere Umgrenzung durch Kräfte, die durch das ganze Innere wirkten, in derselben Form erhalten wurde; sie müssen daher für die innere Fläche grösser gewesen sein. Einen ähnlichen Schluss können wir hinsichtlich des Theils des ganzen festen Körpers ziehen, der innerhalb eines jeden dieser Deformationsellipsoide liegt, indem wir voraussetzen, die ganze Cohäsion, sowie die tangentiale Kraft zwischen diesem Theil und der ihn umgebenden Masse werde aufgehoben, und er behalte seine ellipsoidale Form durch ein auf seine Oberfläche vertheiltes System von Zugkräften, welches geeignet ist, überall in seinem Innern eine homogene Deformation zu erzeugen, wenn die körperlich angreifende Kraft aufhört zu wirken. Wir schliessen daraus, dass die Ellipticitäten der concentrischen Ellipsoide von der Oberfläche durch den ganzen festen Körper bis zum Centrum hin wachsen, wenn auf den Körper die körperlich angreifende Kraft störend einwirkt, und seine Oberfläche nicht der Einwirkung von Zugkräften unterliegt.

837. **Die durch eine Rotation in einer homogenen elastischen festen Kugel erzeugte Abplattung.** — Wenn die störende Wirkung die Centrifugalkraft oder eine Fluth erzeugende Kraft (wie die von der Sonne oder dem Mond auf die Erde ausgeübte) ist, so ist das Potential, wie wir gesehen haben, eine in Beziehung auf eine Axe symmetrische harmonische Function zweiten Grades. In einem Falle sind die Deformationsellipsoide abgeplattete, im andern Falle zugespitzte concentrische Rotationsellipsoide. In jedem Falle nimmt die Ellipticität von der Oberfläche aus nach innen hin nach demselben Gesetz [§ 834 (16)] zu, welches natürlich vom Radius der Kugel unabhängig ist. Für Kugeln von verschiedenen Dimensionen und ähnlichen Substanzen verhalten sich die durch Rotationen von gleicher Winkelgeschwindigkeit erzeugten Ellipticitäten wie die Quadrate der Radien. Oder, wenn die Oberflächengeschwindigkeit V am Aequator in rotirenden elastischen Kugeln von verschiedenen Dimensionen aber ähnlicher Substanz dieselbe ist, so sind die Ellipticitäten einander gleich. Für feste

Körper, welche Poisson's Hypothese (§ 685), nach welcher $m = 2n$ ist, erfüllen, sind die Werthe der Ellipticität auf der Oberfläche und am Centrum beziehungsweise

$$\frac{3}{11}\,\frac{V^2 w}{2n} \quad \text{und} \quad \frac{14}{33}\,\frac{V^2 w}{2n}.$$

Numerische Resultate für Eisen und Glas. — Für Stahl oder Eisen sind die Werthe von n und m beziehungsweise 780×10^6 und ungefähr 1600×10^6 Gramm per Quadratcentimeter, oder in absoluten Einheiten (§ 223), wenn als Masseneinheit das Gramm, als Zeiteinheit die Secunde und als Raumeinheit das Centimeter angenommen wird, 770×10^9 und ungefähr 1600×10^9; das specifische Gewicht (w) ist ungefähr 7·8. Folglich wird eine rotirende Stahlkugel von beliebigem Radius, deren Geschwindigkeit am Aequator 10,000 Centimeter per Secunde beträgt, so abgeplattet, dass ihre Ellipticität (§ 801) gleich $\frac{1}{7220}$ wird. Für eine Probe Flintglas vom specifischen Gewicht 2·94 findet Everett $n = 244 \times 10^6$ Gramm per Quadratcentimeter und näherungsweise $m = 2n$. Für diese Substanz ist daher $\frac{n}{w} = 83 \times 10^6$ [es ist dies die in Centimetern ausgedrückte Länge des Moduls der Starrheit (§ 687)]. Die oben gebrauchten Zahlen liefern aber für Stahl $\frac{n}{w} = 100 \times 10^6$ Centimeter, und daher (§ 838) ist die Abplattung einer Glaskugel $\frac{1}{0·83}$ oder $1^1/_5$ mal so gross, als die einer mit der nämlichen Geschwindigkeit rotirenden Stahlkugel.

838. **In elastischen festen Kugeln von Metall, Glas oder gallertartigem Stoff ist die Zusammendrückbarkeit nur von geringem Einfluss auf die Rotations- oder Fluthellipticitäten.** — Für Glas- oder Metallkugeln, welche durch Rotation oder durch Ebbe und Fluth deformirt sind, wird die Grösse der Deformation, wie wir sofort aus § 834 (22) erkennen, durch die Zusammendrückbarkeit nur wenig beeinflusst, da für solche Substanzen (§§ 684, 694) der Werth von m entweder gleich $2n$ oder noch grösser ist. So wird für jede Substanz, für welche $m \geqq 2n$ ist, die Ellipticität der Oberfläche um 3 Proc. oder um weniger als 3 Proc., die Ellipticität am Centrum um $^2/_3$ Proc. oder um weniger als $^2/_3$ Proc. verringert, wenn wir voraussetzen, dass die Starrheit in

jedem Falle unverändert bleibt, aber die Substanz absolut unzusammendrückbar wird. Für die Ellipticität der Oberfläche liefert die Formel (22) des § 834 unter dieser Voraussetzung

$$(23) \qquad e = \frac{5\, a^2 w}{19\, n}\, \tau,$$

oder wenn wir

$n = 770 \times 10^9$ (wie für Stahl, § 837)

$a = 640 \times 10^6$ (der in Centimetern ausgedrückte Erdradius)

$w = 5{\cdot}5$ (die mittlere Dichtigkeit der Erde)

annehmen, so erhalten wir

$$(24) \qquad e = 77 \times 10^4 . \tau.$$

839. **Ellipticität der Oberfläche für eine Kugel von der Grösse und Masse der Erde, deren Substanz nicht der Schwere unterworfen, homogen, nicht zusammendrückbar und so starr wie Stahl ist.** — Betrachten wir jetzt eine Kugel von der Grösse der Erde, die aus einem nicht zusammendrückbaren homogenen Stoffe besteht, und deren Dichtigkeit gleich der mittleren Dichtigkeit der Erde ist, die aber dieselbe Starrheit wie Stahl oder Glas hat. Wir setzen zunächst voraus, die Masse dieser Kugel werde der Eigenschaft beraubt, dass ihre Theile eine Attraction auf einander ausüben. Dann werden die durch eine Rotation oder durch eine Fluth erzeugende Kraft hervorgebrachten Ellipticitäten die durch die vorhergehenden Formeln [§ 834 (22)] gegebenen sein, wenn n dieselben Werthe wie früher hat, $\frac{n}{m} = 0$, $a = 640 \times 10^6 =$ dem in Centimetern ausgedrückten Erdradius und $w = 5{\cdot}5$ ist, statt dem specifischen Gewicht von Glas und Stahl gleich zu sein.

Wenn aber der Körper gar keine Starrheit besitzt und nur die zwischen seinen Theilen wirkende Gravitation einer Abweichung von der Kugelgestalt entgegenarbeitet, so ist die Ellipticität, wie wir früher (§ 819) fanden,

$$(25) \qquad e = \frac{5}{2}\, \frac{a}{g}\, \tau = 162 \times 10^4 . \tau.$$

840. **Die Gravitation ist auf die Gestalt grosser, homogener, fester Kugeln von grösserem Einfluss als die Starrheit.** — Vergleichen wir daher die beiden Einflüsse, die wir einzeln betrachtet haben: — auf der einen Seite die Elasticität der Gestalt, sogar bei einer so grossen Starrheit, wie sie das Eisen besitzt: auf

der anderen Seite die zwischen den Theilen wirkende Gravitation — so sehen wir, dass der letztere Einfluss in einer Kugel von solchen Dimensionen wie die Erde bedeutend mächtiger als der erstere ist. Wenn, wie es in der Natur geschieht, diese beiden Widerstände gegen eine Formänderung vereint wirken, so wird die resultirende Ellipticität der reciproke Werth der Summe der reciproken Werthe der Ellipticitäten sein, welche einzeln erzeugt werden würden, wenn jeder Widerstand für sich allein wirkte. Denn wir können uns den störenden Einfluss in zwei Theile getheilt denken, von denen der eine allein die vom festen Körper wirklich erlangte Ellipticität bei fehlender Gravitationskraft unterhalten würde, während der andere dieselbe Ellipticität erzeugen würde, wenn die Substanz keine Starrheit besässe, aber einer zwischen ihren Theilen wirkenden Gravitationskraft ausgesetzt wäre. Es sei τ der nach § 834 (20), (21) gemessene störende Einfluss, $\frac{\tau}{\mathfrak{r}}$ und $\frac{\tau}{\mathfrak{g}}$ beziehungsweise die Ellipticitäten der sphäroidalen Figur, in welche sich die Kugel unter den beiden Voraussetzungen: Starrheit ohne Schwere und Schwere ohne Starrheit verwandelt. Ferner sei e die wirklich erlangte Ellipticität, und es werde τ in τ' und τ'' getheilt, welche Grössen den beiden Theilen proportional sein sollen, in welche wir uns den störenden Einfluss, während er jene Ellipticität unterhält, getheilt denken. Dann ist

$$\tau = \tau' + \tau''$$

und

$$e = \frac{\tau'}{\mathfrak{r}} = \frac{\tau''}{\mathfrak{g}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\tau}{e} = \mathfrak{r} + \mathfrak{g},$$

oder

$$\frac{1}{e} = \frac{\mathfrak{r}}{\tau} + \frac{\mathfrak{g}}{\tau},$$

was den Satz beweist. Die letzte Formel liefert auch

$$e = \frac{\tau}{\mathfrak{r} + \mathfrak{g}} = \frac{\frac{\tau}{\mathfrak{g}}}{\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}} + 1}. \tag{26}$$

Nach §§ 838, 839 ist

$$\mathfrak{r} = \frac{19\,n}{5\,a^2 w} \quad \text{und} \quad \mathfrak{g} = \frac{2}{5}\,\frac{g}{a}, \tag{27}$$

$$(28)\qquad \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}} = \frac{19\,n}{2\,g\,a\,w} = \frac{19\,\frac{n}{g}}{2\,a\,w},$$

wo $\frac{n}{g}$ die Starrheit ist, ausgedrückt in Gramm per Quadratcentimeter. Für Stahl und Glas (§§ 837, 839) sind die Werthe von $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}}$ beziehungsweise 2·1 und 0·66.

841. Daraus erhellt, dass, wenn die Starrheit der Erde im Ganzen nur gleich der des Stahls oder Eisens wäre, sie den Fluth erzeugenden Einflüssen der Sonne und des Mondes ungefähr $\frac{1}{3}$ so viel nachgeben würde, wie sie thun würde, wenn sie gar keine Starrheit besässe. Sie würde ungefähr $\frac{3}{5}$ mal so viel wie eine Flüssigkeit nachgeben, wenn ihre Starrheit nicht grösser als die des Glases wäre.

842. Einfluss des elastischen Nachgebens des festen Erdkörpers auf die Wasserfluthen. — Um die Wirkung zu finden, welche das elastische Nachgeben der Erde auf die Fluthen hat, müssen wir uns ins Gedächtniss zurückrufen (§ 819), dass die aus der störenden Kraft und der Gravitation der ungestörten Kugel herrührende Ellipticität der Niveaufläche, welche [§§ 804, 808 (18), (19)] gleich $\frac{a}{g}\,\tau$ ist, wegen der Umwandlung der Kugel in ein Sphäroid von der Ellipticität e um $\frac{3}{5}\,e$ vergrössert wird, so dass wir, wenn die Attraction zwischen den Wassertheilen vernachlässigt wird (§ 799), für die Ellipticität der gestörten Meeresoberfläche (§ 785)

$$(29)\qquad \frac{a}{g}\,\tau + \frac{3}{5}\,e$$

erhalten. Das Steigen und Fallen des Wassers in Beziehung auf das Festland wird von dem Ueberschuss dieses Werthes über die Ellipticität des festen Erdkörpers abhängen. Wird dieser Ueberschuss, oder die Ellipticität der relativen Fluthen mit ε bezeichnet, so ist

$$(30)\qquad \varepsilon = \frac{a}{g}\,\tau - \frac{2}{5}\,e,$$

oder nach (26) und (27)

$$\varepsilon = \frac{a}{g} r \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r} + \mathfrak{g}}. \tag{31}$$

Folglich ist das Steigen und Fallen der Fluthen kleiner, als es bei vollkommener Starrheit der Erde sein würde, und zwar in dem Verhältniss, in welchem der aus der Starrheit herrührende Widerstand des festen Körpers gegen eine Deformation im Sinne der Fluthbewegung zur Summe der Widerstände steht, welche auf der Starrheit des festen Körpers und der zwischen seinen Theilen wirkenden Gravitation beruhen. Aus den am Schluss des § 840 gegebenen Zahlen schliessen wir, dass, wenn die Starrheit so gross wie die des Stahls wäre, das relative Steigen und Fallen des Wassers durch das elastische Nachgeben des festen Körpers auf $\frac{2}{3}$, oder wenn die Starrheit nur gleich der des Glases wäre, das relative Steigen und Fallen auf $\frac{2}{5}$ des Betrages reducirt werden würde, den es bei vollkommener Starrheit haben würde.

843. **Die Starrheit der Erde im Ganzen ist wahrscheinlich grösser als die einer festen Glaskugel.** — Trotz der Unvollkommenheit, die den Vergleichungen zwischen Theorie und Beobachtung in Betreff der wirklichen Höhe der Fluthen bis jetzt noch anhaftet, ist es doch kaum möglich zu glauben, dass die Höhe in Wahrheit nur $\frac{2}{5}$ von dem beträgt, was sie sein würde, wenn, wie in den Theorien der Ebbe und Fluth allgemein angenommen wird, die Erde vollkommen starr wäre. Es scheint daher schon durch die bisherigen Beobachtungen ziemlich festgestellt zu sein, dass die in Betreff der Fluth wirksame Starrheit der Erde grösser als die des Glases ist.

844. **Die dynamische Theorie der Fluthen ist zu unvollkommen, um eine Berechnung der absoluten Werthe der Haupterscheinungen zu gestatten.** — Die wirkliche Vertheilung von Land und Wasser auf der Erdkugel ist so unregelmässig, und das Wasser hat an den damit bedeckten Stellen eine so verschiedene Tiefe, dass wir sogar von der eindringendsten mathematischen Analysis keine Annäherung an eine directe dynamische Berechnung des Betrages erwarten dürfen, den die gewöhnlichen halbtägigen Fluthen an irgend einem Orte haben sollten, wenn die Erde vollkommen starr wäre. In Wasser von 10,000 Fuss Tiefe (was im Allgemeinen beträchtlich weniger als die Tiefe des Atlantischen

Oceans ist, wie durch viele Messungen in den letzten Jahren, namentlich durch Messungen längs des Atlantischen Telegraphenkabels von Valencia bis Newfoundland bewiesen ist) ist die Geschwindigkeit langer freier Wellen, wie wir im zweiten Bande zeigen werden, 576 engl. Fuss per Secunde *). Bei dieser Geschwindigkeit würde ein Fortschreiten durch 57° (oder eine Entfernung von der Grösse des Erdradius) nur eine Zeit von 10 Stunden erfordern. Folglich dürfen wir vermuthen, dass, wenigstens an allen Inseln des Atlantischen Oceans, jede Fluthstörung, deren Periode einige Tage oder mehr beträgt, mit ziemlicher Annäherung die wahre Gleichgewichtsfluth geben muss, die durch die Trägheit der Flüssigkeit nicht merklich oder nur wenig modificirt ist. Nun gibt es solche Fluthstörungen (§ 808) wegen der Aenderungen der Declination des Mondes und der Sonne, und die Perioden dieser Störungen sind gleich den Perioden der genannten Declinationsänderungen.

845. Berechnung der Höhe der vierzehntägigen Fluth für verschiedene Werthe der Starrheit. — Fluthmesser. — Die Summe des Steigens vom niedrigsten zum höchsten Punkte in Teneriffa und des gleichzeitigen Fallens vom höchsten zum niedrigsten Stande in Island würden in der vierzehntägigen Mondfluth 4·5 Zoll betragen, wenn die Erde vollkommen starr wäre, oder 3 oder 1·8 Zoll, wenn die hinsichtlich der Fluthen wirksame Starrheit beziehungsweise nur gleich der des Stahls oder des Glases wäre. Die Beträge der halbjährlichen Fluth würden, unabhängig von der Starrheit der Erde, natürlich ungefähr die Hälfte der vierzehntägigen Fluth sein. Die Grösse einer jeden liesse sich an jedem Orte bis auf einen kleinen Bruchtheil eines Zoll genau bestimmen durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Angaben eines genauen selbstregistrirenden Fluthmessers, eine Arbeit, die bis jetzt noch nicht ausgeführt ist. Was den jetzt vorliegenden Gegenstand betrifft, so kann die halbjährliche Fluth, obgleich sie den Vortheil haben mag, dass ihre Grösse wahrscheinlich nicht merklich von der durch die Gleichgewichtstheorie gegebenen verschieden ist, doch durch das Schmelzen von Eis aus den arctischen und antarctischen Regionen, sowie durch das Niederfallen von Regen und das Abschwemmen von Land an anderen Stellen merklich modificirt werden, und dies wird wahrscheinlich messbare Störungen

*) *Airy, Tides und Waves*, § 170.

in der Meeresniveaufläche ergeben, die im Durchschnitt vieler Jahre eine jährliche und halbjährliche harmonische Variation zeigen werden. Diese Störung kann aber für jeden Zeitraum von vierzehn Tagen oder einem halben Jahre dadurch eliminirt werden, dass man die an passend gewählten Stationen verschiedener Breite gemachten Beobachtungen combinirt. Es scheint daher wahrscheinlich, dass man aus guten selbstregistrirenden Fluthmessern, die mehrere Jahre hindurch an Stationen wie Island, Teneriffa, den Inseln des Grünen Vorgebirges, Ascension und St. Helena benutzt sind, die wahre Grösse des elastischen Nachgebens der Erde gegen die Fluth erzeugenden Kräfte des Mondes und der Sonne ziemlich genau bestimmen kann. Ebenso ist es wahrscheinlich, dass sich aus solchen Beobachtungen das Verhältniss der Masse des Mondes zu der der Sonne genauer bestimmen lassen wird, als es bisher geschehen ist. Es ist zu hoffen, dass diese Gegenstände die Britische Regierung, welche in vielen Beziehungen so viel für die physische Geographie gethan hat, veranlassen werden, an geeigneten Stationen Fluthmesser aufzustellen und mit möglichster Genauigkeit die vierzehntägigen und die halbjährlichen Fluthen, sowie die Variationen der Meeresniveaufläche bestimmen zu lassen, welche von dem Schmelzen des Eises in den Polargegenden und von dem Niederfallen von Regen und dem Abschwemmen von Land in den übrigen Theilen der Erde herrühren.

846. Mehr Beobachtungen und eine genauere Reduction der schon gemachten Beobachtungen sind erforderlich, um eine entscheidende Antwort auf die Fragen zu geben, wie viel die vierzehntägigen und wie viel die halbjährlichen Fluthen betragen. „In den „Philosophical Transactions, 1839, p. 157 zeigt Whewell, „dass die in Plymouth angestellten Beobachtungen des hohen und „niedrigen Wasserstandes ergeben, dass die mittlere Wasserhöhe „zunimmt bei zunehmender Declination des Mondes und sich auf „3 Zoll beläuft, wenn die Declination des Mondes 25° ist. Diese „Aenderung geschieht in demselben Sinne, wie die, welche der obige „Ausdruck für hohe Breiten anzeigt. Die Wirkung der Declination der „Sonne ist aus den Beobachtungen nicht bestimmt worden. In der ge„nannten Arbeit (p. 163) theilt Whewell die Beobachtungen einiger „ausserordentlichen Fluthen in Peter-Paulshafen, Novo-Archangelsk „und der an der Westküste von Nordamerika gelegenen Insel „Sitcha mit.

„Sowohl nach den in den Philosophical Transactions ver„öffentlichten, wie nach den übrigen auf dieselben Beobachtungsorte

„bezüglichen Curven (von denen uns Herr Whewell Einsicht nehmen zu lassen die Güte hatte) scheint es ganz unzweifelhaft zu „sein, dass die mittlere Höhe des Wassers in Peter-Paulshafen und „Archangelsk steigt, wenn die Declination des Mondes zunimmt. „Mehr ist über diesen Punkt nicht bekannt.“ — (Airy, Tides and Waves, § 533).

847. **Einfluss des elastischen Nachgebens der Erde auf die Präcession und Nutation.** — Wir beabsichtigen, im zweiten Bande eine dynamische Untersuchung der Präcession und Nutation zu geben, in welcher gezeigt werden wird, dass das elastische Nachgeben der Erde diese Erscheinungen in demselben Grade wie die Fluthen beeinflusst. Wir haben schon gesehen (§§ 825, 826, 796, 797), dass, um die beobachteten Werthe derselben mit den unter der Voraussetzung einer vollkommenen Starrheit theoretisch gefundenen mit einer solchen Genauigkeit zu vergleichen, dass der begangene Fehler nicht mehr als 1 Proc. beträgt, nur eine bis zu eben diesem Grade genaue Kenntniss des Trägheitsmomentes der Erde in Beziehung auf irgend einen Durchmesser erfordert. Wir haben gesehen (§ 828), dass die besten bisher angestellten Berechnungen der Präcession mit der beobachteten Grösse derselben in merkwürdiger Uebereinstimmung stehen. Es ist aber durchaus nicht unwahrscheinlich, dass besser begründete Bestimmungen des Trägheitsmomentes (§ 826) der Erde und eine genauere als die bis jetzt durch Beobachtung erlangte Kenntniss der in dem Ausdrucke der äusseren Schwerkraft (§§ 825, 795) enthaltenen harmonischen Function zweiten Grades zeigen werden, dass der wahre Betrag der Präcession (der jetzt bis zum äussersten Grade von Genauigkeit bekannt ist) etwas kleiner ist, als er sein würde, wenn die Starrheit unendlich gross wäre. Solch eine Abweichung könnte, wenn sie wirklich vorhanden wäre, nur durch eine gewisse kleine Deformation erklärt werden, die die festen Theile der Erde unter dem Einflusse des Mondes und der Sonne erlitten. Es findet aber im Ganzen bei Zugrundelegung der Hypothese einer vollkommenen Starrheit eine so genaue Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung hinsichtlich der Präcession und Nutation statt, dass wir berechtigt sind, das elastische Nachgeben der Erde gegen den störenden Einfluss der Sonne und des Mondes als sehr klein anzunehmen, als viel kleiner z. B., als es sein würde, wenn die wirksame Starrheit nicht grösser als die Starrheit des Stahls wäre.

848. Prüfung der Consequenzen der geologischen Hypothese einer dünnen mit Flüssigkeit erfüllten Schale. — Es ist interessant, dass die weit verbreitete geologische Hypothese, nach welcher die Erde eine dünne Schicht fester Substanz ist, die in ihrem Hohlraume mit Flüssigkeit gefüllt sei, zwei Wirkungen der Abweichung von einer vollkommenen Starrheit involvirt, welche die Grösse der Präcession in entgegengesetzter Weise beeinflussen würden. Das vergleichsweise leichte Nachgeben der Schale muss, wie wir im zweiten Bande sehen werden, das wirksame bewegende Kräftepaar, welches aus der Sonne und dem Monde herrührt, viel kleiner machen, als es sein würde, wenn das ganze Innere fest wäre, und muss deshalb die Grösse der Präcession und Nutation zu verringern streben. Dagegen würde das wirksame Trägheitsmoment einer dünnen festen Schale, die in ihrem Innern eine homogene oder heterogene Flüssigkeit enthält, viel kleiner als das der ganzen Masse sein, wenn diese überall fest wäre, und dieser Grund würde eine viel grössere Präcession und Nutation hervorzubringen streben. Es scheint äusserst unwahrscheinlich zu sein, dass die Grösse, um welche das Trägheitsmoment wegen der im Innern der Erde enthaltenen Flüssigkeit kleiner ist, zum ganzen Trägheitsmoment näherungsweise in demselben Verhältniss stehen sollte, wie das wirklich stattfindende elastische Nachgeben zu dem vollkommen leichten Nachgeben, welches eintreten würde, wenn die Erde ganz flüssig wäre. Wir müssen aber entweder diese Voraussetzung zulassen, so unwahrscheinlich sie auch zu sein scheint, oder aus der genauen Uebereinstimmung zwischen den Werthen, welche die Präcession und Nutation wirklich haben, mit denen, die sie haben würden, wenn die Erde vollkommen starr wäre, den Schluss ziehen, dass in Beziehung auf jeden Durchmesser die aus der im Innern enthaltenen Flüssigkeit herrührende Abnahme des Trägheitsmomentes im Vergleich mit dem ganzen Trägheitsmomente der Erde sehr klein ist, und dass die von der Erde durch die Einwirkung des Mondes und der Sonne erlittene Deformation klein ist im Vergleich zu der, die die Erde erleiden würde, wenn sie vollkommen flüssig wäre. Es steht jedoch fest, dass es im Innern der Erde flüssige Massen gibt. Beweis dafür sind die Eruptionen von Lava aus den Vulcanen. Aber dies sind wahrscheinlich ganz locale Zustände, wie Hopkins behauptete, der zuerst die Erscheinungen der Präcession und Nutation anführte, um die Hypothese, dass der feste Theil der Erdmasse bloss eine dünne Schale sei, zu widerlegen.

849. Eine merkwürdig ähnliche Bemerkung lässt sich auf die Fluthen anwenden; aber nur wegen der grösseren Dichtigkeit in den tieferen Theilen der hypothetischen Flüssigkeit. Die durch die Fluth erzeugende Einwirkung in den Schichten gleicher Dichtigkeit hervorgebrachte Abplattung würde (§ 815) die Elliptieität, welche die Fluth der obersten Fläche ertheilt, vergrössern, und wenn daher die feste Erdrinde vollkommen starr, also die Umgrenzungsfläche von absolut constanter Gestalt wäre, so würden die Fluthen grösser sein, als sie sein würden, wenn die Erde überall vollkommen starr wäre.

Zusätze zum Capitel VII.

C. Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen festen Körpers, hergeleitet aus dem Princip der Energie.

(a) Bestimmung einer Deformation durch sechs Elemente. — Es sei ein fester Körper von irgend einer Form gegeben, der aus einer Masse besteht, welche in keinem einzelnen Theile irgend eine Art von Isotropie und keine Art von Homogeneität zwischen verschiedenen Theilen zeigt. Der Körper befinde sich in einem nicht deformirten Zustande, und es werde jeder Punkt seiner Oberfläche in einer gegebenen Richtung eine gegebene Strecke weit verschoben. Man soll, nach eingetretenem Gleichgewicht, die Verschiebung jedes Punktes der Substanz bestimmen. Zu diesem Zwecke seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Massenpunktes P der Substanz in ihrer ungestörten Lage; derselbe Punkt P habe, wenn er in der angegebenen Weise verschoben ist, die Coordinaten $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, d. h. es seien α, β, γ die Componenten der gesuchten Verschiebung. Setzen wir dann der Kürze wegen

$$(1)\quad \begin{cases} A = \left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 \\ B = \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}+1\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 \\ C = \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz}+1\right)^2 \\ a = \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\alpha}{dz} + \left(\frac{d\beta}{dy}+1\right)\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\left(\frac{d\gamma}{dz}+1\right) \\ b = \frac{d\alpha}{dz}\left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right) + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\beta}{dx} + \left(\frac{d\gamma}{dz}+1\right)\frac{d\gamma}{dx} \\ c = \left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\left(\frac{d\beta}{dy}+1\right) + \frac{d\gamma}{dx}\frac{d\gamma}{dy}, \end{cases}$$

so ist bewiesen [§ 190 (e) und § 181 (5)], dass diese sechs Grössen A, B, C, a, b, c die von der Substanz in unendlich kleiner Entfernung vom Massenpunkt P erlittene Deformation (abgesehen von der Rotation, welche der Körper vielleicht noch vollführt) vollständig bestimmen, und zwar in der folgenden Weise: —

(b) Es seien ξ, η, ζ die Coordinaten der ungestörten Lage eines unendlich nahe an P liegenden Massenpunktes, bezogen auf Axen, welche durch P gehen und beziehungsweise den Axen der x, y, z parallel sind. Derselbe Punkt habe, auf dieselben durch P gehenden Axen bezogen, die Coordinaten $\xi_,$, $\eta_,$, $\zeta_,$, wenn sich der Körper in seinem deformirten Zustande befindet. Dann ist

$$(2)\quad \xi_,^2 + \eta_,^2 + \zeta_,^2 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2a\eta\zeta + 2b\zeta\xi + 2c\xi\eta,$$

und daher liegen alle Massenpunkte, welche sich im deformirten Zustande auf der Kugelfläche

$$\xi_,^2 + \eta_,^2 + \zeta_,^2 = r_,^2$$

befinden, im undeformirten Zustande auf der Oberfläche des Ellipsoides

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2a\eta\zeta + 2b\zeta\xi + 2c\xi\eta = r_,^2.$$

Dies definirt (§§ 155 bis 165) die homogene Deformation der in der Nähe von P liegenden Masse vollständig.

(c) Die thermodynamischen Principien, durch welche bewiesen wurde [in einer in der ersten Nummer des Quarterly Mathematical Journal, April 1855 veröffentlichten Arbeit über die thermoelastischen Eigenschaften der Materie, über welche im dritten Bande berichtet werden wird], dass Green's dynamische Theorie der ela-

stischen festen Körper ein Theil der neueren dynamischen Wärmetheorie ist, zeigen also, dass, wenn $w\,dx\,dy\,dz$ die Arbeit bezeichnet, die erfordert wird, um ein unendlich kleines ungestörtes Volumen $dx\,dy\,dz$ des festen Körpers in seinen gestörten Zustand zu versetzen, während die Temperatur constant erhalten wird,

$$w = f\,(A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c) \tag{3}$$

sein muss, wo f eine positive Function der sechs Elemente bezeichnet, welche verschwindet, wenn jede der Grössen $A - 1$, $B - 1$, $C - 1$, a, b, c Null ist. Wenn die Gesammtarbeit, deren es bedarf, um die vom ganzen Körper wirklich erlittene Aenderung zu erzeugen, mit W bezeichnet wird, so ist

$$W = \int\!\!\int\!\!\int w\,dx\,dy\,dz, \tag{4}$$

wo die Integration für den ganzen Raum auszuführen ist, den der Körper in seinem ungestörten Zustande einnimmt.

(d) **Bei stabilem Gleichgewicht ist die potentielle Energie der Deformation ein Minimum.** — Die Lage, welche jeder Massenpunkt im Innern des festen Körpers annimmt, wird eine solche sein, dass der Ausdruck (4) zu einem Minimum wird, wobei noch die Bedingung erfüllt sein muss, dass jeder Punkt der Oberfläche in die ihm angewiesene Lage komme; dies ist die Bedingung des stabilen Gleichgewichts, daher liefert die Variationsrechnung

$$\delta W = \int \delta w\,dx\,dy\,dz = 0. \tag{5}$$

Wir erhalten aber, wenn wir nur die von $\delta\alpha$ abhängigen Glieder niederschreiben,

$$\begin{aligned}\delta w = &\left\{2\frac{dw}{dA}\left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)+\frac{dw}{db}\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dw}{dc}\frac{d\alpha}{dy}\right\}\frac{d\delta\alpha}{dx}\\ &+\left\{2\frac{dw}{dB}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dw}{da}\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dw}{dc}\left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)\right\}\frac{d\delta\alpha}{dy}\\ &+\left\{2\frac{dw}{dC}\frac{d\alpha}{dz}+\frac{dw}{da}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{dw}{db}\left(\frac{d\alpha}{dx}+1\right)\right\}\frac{d\delta\alpha}{dz}\\ &+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Wenn wir daher partiell integriren und beachten, dass $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ an der Grenzfläche verschwinden, so ergibt sich

$$\delta W = -\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\left\{\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}\right)\delta\alpha+\text{u. s. w.}\right\}, \tag{6}$$

wo P, Q, R der Kürze wegen die Grössen bezeichnen, welche in

dem vorhergehenden Ausdruck $\frac{d\,\delta\,\alpha}{d\,x}, \frac{d\,\delta\,\alpha}{d\,y}, \frac{d\,\delta\,\alpha}{d\,z}$ multipliciren. Damit $\delta\,W$ verschwinde, müssen in dem jetzt dafür gefundenen Ausdrucke (6) die Multiplicatoren von $\delta\,\alpha$, $\delta\,\beta$, $\delta\,\gamma$ einzeln verschwinden, und wir erhalten somit als Gleichungen des inneren Gleichgewichts

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{d}{d\,x}\left\{2\,\frac{d\,w}{d\,A}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}+1\right)+\frac{d\,w}{d\,b}\,\frac{d\,\alpha}{d\,z}+\frac{d\,w}{d\,c}\,\frac{d\,\alpha}{d\,y}\right\} \\ +\frac{d}{d\,y}\left\{2\,\frac{d\,w}{d\,B}\,\frac{d\,\alpha}{d\,y}+\frac{d\,w}{d\,a}\,\frac{d\,\alpha}{d\,z}+\frac{d\,w}{d\,c}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}+1\right)\right\} \\ +\frac{d}{d\,z}\left\{2\,\frac{d\,w}{d\,C}\,\frac{d\,\alpha}{d\,z}+\frac{d\,w}{d\,a}\,\frac{d\,\alpha}{d\,y}+\frac{d\,w}{d\,b}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,x}+1\right)\right\}=0, \\ \qquad\text{u. s. w.} \qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

wo die zweite und dritte Gleichung, die wir nicht angegeben haben, ihres symmetrischen Baues wegen sofort niedergeschrieben werden können.

(e) **Beweis, dass die Gleichungen (7), wenn die Oberflächenverschiebung gegeben ist, eine und nur eine Lösung zulassen, wenn es keine Configuration instabilen Gleichgewichts gibt.** — Aus der Eigenschaft, dass w nothwendig positiv ist, wenn irgend eine Deformation vorhanden ist, folgt, dass auch im Innern eine gewisse Deformation vorhanden sein muss, welche $\int\int\int w\,d\,x\;d\,y\;d\,z$ den der vorgeschriebenen Oberflächenbedingung unterworfenen kleinsten möglichen Werth annehmen lässt, und dass daher auch die Lösung der Gleichungen (7) unter Beobachtung dieser Bedingung möglich ist. Von welcher Beschaffenheit nun auch der feste Körper hinsichtlich der Elasticitätsdifferenz, die in irgend einem Theil in verschiedenen Richtungen stattfinde, oder hinsichtlich der Heterogenität von Punkt zu Punkt sein möge, und einer wie grossen Form- und Dimensionenänderung er auch unterworfen sein möge, wenn es keine innere Configuration instabilen und folglich nur eine Configuration stabilen Gleichgewichts geben kann, welche die für die Punkte der Oberfläche vorgeschriebene Verschiebung enthält, und bei welcher keine störende Kraft auf das Innere einwirkt, so muss w nicht nur positiv, sondern eine solche Function von A, B, u. s. w. sein, dass die Gleichungen (7) nur eine Lösung besitzen. Offenbar ist dies der Fall, wenn der feste Körper in seinem undeformirten Zustande homogen ist.

(f) **Verallgemeinerungen.** — Es ist leicht, in einer der vorhergehenden ähnlichen allgemeinen Untersuchung die Wirkungen einer auf die innere Substanz einwirkenden Kraft mit in Rechnung zu ziehen, wie wir sie oben in §§ 730 . . . 737 für eine Kugelschale von homogener, isotroper Masse betrachtet haben. Ferner ist es leicht, die allgemeine Untersuchung dem Falle anzupassen, in welchem nicht die Verschiebungen der Oberflächenpunkte, sondern die auf dieselben einwirkenden Kräfte gegeben sind.

(g) **Fall unendlich kleiner Deformationen. Green's Theorie.** — Welches auch die allgemeine Form der Function f für irgend einen Theil der Substanz sein möge, da dieselbe immer positiv ist, so kann sie ihr Zeichen nicht ändern, wenn $A-1$, $B-1$, $C-1$, a, b, c ein anderes Zeichen erhalten, und muss daher für unendlich kleine Werthe dieser Grössen eine homogene Function zweiten Grades derselben sein, die constante Coefficienten hat. (Es ist von Nutzen zu bemerken, dass f daher für alle Werthe der Veränderlichen A, B, u. s. w. in derselben Form ausgedrückt werden kann, und dass jeder der variabeln Coefficienten dieses Ausdrucks für alle Werthe der Veränderlichen immer von endlicher Grösse ist.) Für unendlich kleine Deformationen ist demnach Green's Theorie der elastischen festen Körper auf eine homogene Function zweiten Grades der Deformationscomponenten basirt, und zwar drückt diese Function die zur Hervorbringung der Deformation erforderliche Arbeit aus. Setzen wir also

$$A-1=2e,\ B-1=2f,\ C-1=2g \tag{8}$$

und bezeichnen die Coefficienten mit $\frac{1}{2}(e,e)$, $\frac{1}{2}(f,f)$, $\cdots$, (e,f), $\cdots$ (e,a), ..., so erhalten wir, wie oben in § 673,

$$(9)\quad \begin{cases} w=\frac{1}{2}\{(e,e)e^2+(f,f)f^2+(g,g)g^2+(a,a)a^2+(b,b)b^2+(c,c)c^2 \\ \qquad +(e,f)ef+(e,g)eg+(e,a)ea+(e,b)eb+(e,c)ec \\ \qquad +(f,g)fg+(f,a)fa+(f,b)fb+(f,c)fc \\ \qquad +(g,a)ga+(g,b)gb+(g,c)gc \\ \qquad +(a,b)ab+(a,c)ac \\ \qquad +(b,c)bc\} \end{cases}$$

(h) **Dynamische Gleichungen des inneren Gleichgewichts.** — Wenn die Deformationen unendlich klein sind, so ist

jedes der Producte $\frac{dw}{dA}\frac{d\alpha}{dx}, \frac{dw}{db}\frac{d\alpha}{dz}$, u. s. w. eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Wir können diese Producte daher fortlassen und die Gleichungen (7) mit Rücksicht auf (8) auf die Form

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\frac{dw}{de} + \frac{d}{dy}\frac{dw}{dc} + \frac{d}{dz}\frac{dw}{db} = 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{dw}{dc} + \frac{d}{dy}\frac{dw}{df} + \frac{d}{dz}\frac{dw}{da} = 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{dw}{db} + \frac{d}{dy}\frac{dw}{da} + \frac{d}{dz}\frac{dw}{dg} = 0 \end{cases}$$

bringen; dies sind die Gleichungen des inneren Gleichgewichts. Aus (9) ersehen wir, dass $\frac{dw}{de}, \cdots, \frac{dw}{da}, \cdots$ lineare Functionen der Deformationscomponenten e, f, g, a, b, c sind. Eine derselben wollen wir als Beispiel vollständig niederschreiben:

$$(11) \quad \frac{dw}{de} = (e, e)e + (e, f)f + (e, g)g + (e, a)a + (e, b)b + (e, c)c.$$

Wenn wieder α, β, γ die Componenten der Verschiebung bezeichnen, welche irgend ein innerer Massenpunkt P von der anfänglichen Lage (x, y, z) aus erleidet, so ist nach (8) und (1)

$$(12) \quad \begin{cases} e = \frac{d\alpha}{dx}, \quad f = \frac{d\beta}{dy}, \quad g = \frac{d\gamma}{dz} \\ a = \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}, b = \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}, c = \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}. \end{cases}$$

Es ist zu bemerken, dass die Coefficienten (e, e), (e, f), u. s. w. im Allgemeinen Functionen von (x, y, z) sind; jeder dieser Coefficienten ist aber eine Constante, wenn der feste Körper in seinem undeformirten Zustande homogen ist.

(i) **Im Falle unendlich kleiner Deformationen haben die Gleichungen des inneren Gleichgewichts nur eine Lösung, wenn die Oberflächenverschiebung gegeben ist.** — Es ist jetzt leicht, für den Fall unendlich kleiner Deformationen direct zu beweisen, dass die Gleichungen des inneren Gleichgewichts sowohl für einen heterogenen, als auch für einen homogenen festen Körper, dessen Oberfläche der angegebenen Bedingung unterworfen ist, nur eine Lösung zulassen. Zu diesem Zwecke seien α, β, γ Verschiebungscomponenten, welche den Gleichungen genügen, und es bezeichnen α', β', γ' beliebige andere Functionen von x, y, z, welche die-

selben Oberflächenwerthe wie α, β, γ haben. Wenn ferner $e', f', \ldots w'$ Functionen bezeichnen, die in derselben Weise von α', β', γ', wie e, f, ..., w von α, β, γ abhängen, so ist nach dem Taylor'schen Satze

$$w' - w = \frac{dw}{de}(e' - e) + \frac{dw}{df}(f' - f) + \frac{dw}{dg}(g' - g)$$
$$+ \frac{dw}{da}(a' - a) + \frac{dw}{db}(b' - b) + \frac{dw}{dc}(c' - c) + H;$$

darin bezeichnet H dieselbe homogene Function zweiten Grades von $e' - e$, u. s. w., welche w von e, u. s. w. ist. Substituiren wir für $e' - e$, u. s. w. die Werthe, welche die Formeln (12) liefern, so geht die letzte Gleichung über in

$$w' - w = \frac{dw}{de}\frac{d(\alpha' - \alpha)}{dx} + \frac{dw}{db}\frac{d(\alpha' - \alpha)}{dz} + \frac{dw}{dc}\frac{d(\alpha' - \alpha)}{dy} + \cdots + H.$$

Wenn wir dies mit $dx\, dy\, dz$ multipliciren und sodann partiell integriren, so erhalten wir einfach der Gleichungen (10) wegen, und weil $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ auf der Umgrenzungsfläche verschwinden.

$$(13) \qquad \iiint (w' - w)\, dx\, dy\, dz = \iiint H\, dx\, dy\, dz.$$

Nun ist aber H seiner Natur nach positiv. Folglich erfordert jeder von dem durch α, β, γ definirten abweichende innere Zustand, vorausgesetzt nur, dass er dieselbe Umgrenzungsfläche hat, zu seiner Hervorbringung eine grössere Arbeit als w, und zwar ist diese Mehrarbeit gleich der Arbeit, die nöthig sein würde, um vom undeformirten Zustande aus eine Verschiebung zu erzeugen, die α, β, γ superponirt die andere Verschiebung ausmachen würde. Da nun α, β, γ nur den Bedingungen (11) genügen und die gegebenen Oberflächenwerthe haben, so ergibt sich, dass nur eine Lösung diese Bedingungen erfüllen kann.

(j) **Die Gleichungen haben nicht nothwendig nur eine Lösung, wenn die auf die Oberfläche wirkenden Kräfte gegeben sind.** — Wenn aber (wie Stokes ausgeführt hat) nicht die Verschiebung, sondern die Kraft gegeben ist, welcher die Oberfläche ausgesetzt ist, oder wenn von aussen her eine Kraft auf die innere Substanz des Körpers einwirkt, so ist die Lösung im Allgemeinen nicht eindeutig, und es kann selbst bei einer unendlich kleinen Verschiebung Configurationen instabilen Gleichgewichts geben. Es möge z. B. ein Theil des Körpers aus einem Stahlstabmagneten bestehen und ein zweiter solcher Magnet ausserhalb des Körpers so gehalten werden, dass beide Magnete in derselben Linie liegen, und dass zwei

gleichnamige Pole einander genähert sind. Dann wird das Gleichgewicht instabil sein, und es wird Lagen stabilen Gleichgewichts geben, bei denen der innere Stab gegen die Richtung des äusseren schwach geneigt ist, wofern nicht die Starrheit des übrigen Theiles des Körpers eine gewisse Grenze überschreitet.

(k) **Bedingung der Isotropie.** — Wenn wir jetzt zum allgemeinen Problem zurückkehren, in welchem die Deformationen nicht als unendlich klein vorausgesetzt werden, so sehen wir, dass, wenn der feste Körper in jedem Theil isotrop ist, die w ausdrückende Function von A, B, C, a, b, c bloss eine Function der Wurzeln der Gleichung [§ 181 (11)]

$$(14)\quad \begin{cases}(A-\zeta^2)(B-\zeta^2)(C-\zeta^2)-a^2(A-\zeta^2)\\ \quad -b^2(B-\zeta^2)-c^2(C-\zeta^2)+2abc=0\end{cases}$$

sein muss, welche (d. h. die positiven Werthe von ζ) die Verhältnisse der Elongation längs der Hauptaxen des Deformationsellipsoides sind. Es ist unnöthig, hier auf den analytischen Ausdruck dieser Bedingung einzugehen. Für den Fall, dass jede der Grössen $A-1$, $B-1$, $C-1$, a, b, c unendlich klein ist, erfordert dieselbe offenbar, dass

$$(15)\begin{cases}(e,e)=(f,f)=(g,g);(f,g)=(g,e)=(e,f);(a,a)=(b,b)=(c,c);\\ (e,a)=(f,b)=(g,c)=0;\ (b,c)=(c,a)=(a,b)=0;\\ (e,b)=(e,c)=(f,c)=(f,a)=(g,a)=(g,b)=0\end{cases}$$

sei. Die 21 Coefficienten reduciren sich daher auf folgende drei: —

(e, e), was wir mit dem einen Buchstaben $\mathfrak{A}$ bezeichnen
(f, g), „ „ „ „ „ „ $\mathfrak{B}$ „
(a, a), „ „ „ „ „ „ n „

Es ist klar, dass dies nothwendig und hinreichend ist für eine cubische Isotropie, d. h. für eine vollkommene Gleichheit der elastischen Eigenschaften nach drei zu einander senkrechten Richtungen OX, OY, OZ hin. Für eine sphärische Isotropie dagegen, d. h. für eine vollständige Isotropie nach allen durch die Substanz gehenden Richtungen hin, ist weiter erforderlich, dass

$$(16)\qquad \mathfrak{A}-\mathfrak{B}=2n$$

sei; dies lässt sich leicht auf zwei Weisen darthun: analytisch, indem man zwei der Coordinatenaxen in ihrer eigenen Ebene durch einen Winkel von 45° dreht; geometrisch, indem man die Natur der durch eins der Elemente a, b, c dargestellten Deformation (eine „einfache Schiebung") untersucht und mit der Resultante von c und

$f = -e$ (was auch eine einfache Schiebung ist) vergleicht. Es empfiehlt sich jetzt,

$$(17) \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 2m, \text{ also } \mathfrak{A} = m + n, \ \mathfrak{B} = m - n$$

zu setzen, und danach geht der Ausdruck der für die Volumeneinheit genommenen potentiellen Energie über in

$$(18) \begin{cases} 2w = m(e+f+g)^2 \\ \qquad + n(e^2+f^2+g^2-2fg-2ge-2ef+a^2+b^2+c^2). \end{cases}$$

Wenn wir dies in (9) benutzen und für e, f, g, a, b, c die aus (12) entnommenen Werthe substituiren, so erhalten wir unmittelbar für die Gleichungen des inneren Gleichgewichts dieselben Gleichungen wie in § 698 (6).

(l) **Componenten des für eine unendlich kleine Deformation erforderten elastischen Zwanges.** — Um die von den Massenpunkten, welche zu beiden Seiten einer Fläche innerhalb des festen Körpers liegen, auf einander ausgeübte Kraft, wie sie durch § 662 (1) ausgedrückt ist, zu finden, haben wir offenbar, wenn wir die beziehungsweise von P, Q, R, S, T, U (§ 662) bei einer unendlich kleinen Aenderung der Gestalt oder der Dimensionen des Körpers geleistete Arbeit betrachten,

$$(19) \begin{cases} P = \dfrac{dw}{de}, \ Q = \dfrac{dw}{df}, \ R = \dfrac{dw}{dg}, \\ S = \dfrac{dw}{da}, \ T = \dfrac{dw}{db}, \ U = \dfrac{dw}{dc}. \end{cases}$$

Für einen isotropen festen Körper liefert also (18) die Ausdrücke, die wir oben in § 673 (12) gebraucht haben.

(m) **Moduln der Starrheit und des Widerstandes gegen eine Compression.** — Um die Coefficienten m und n in Verbindung mit den Grundbegriffen der Elasticität fester Körper zu interpretiren, nehmen wir zunächst an, es sei

$$a = b = c = 0 \text{ und } e = f = g = \frac{1}{3}\delta,$$

mit anderen Worten, die Substanz erfahre eine in allen Richtungen gleichmässige Ausdehnung, welche das Volumen in dem Verhältniss von 1 zu $1 + \delta$ vergrössert. In diesem Falle verwandelt sich (18) in

$$w = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{3}n\right)\delta^2,$$

und wir erhalten

$$\frac{dw}{d\delta} = \left(m - \frac{1}{3}n\right)\delta.$$

Folglich ist $\left(m - \frac{1}{3}n\right)\delta$ die für die Flächeneinheit genommene zur Oberfläche normale Kraft, deren es bedarf, um irgend einen Theil des Körpers in der durch δ ausgedrückten Ausdehnung zu erhalten. Danach misst $m - \frac{1}{3}n$ die durch die Volumenänderung ins Leben gerufene elastische Kraft oder den elastischen Widerstand gegen die Volumenänderung und kann, als Elasticitätsmodulus angesehen, die Volumenelasticität genannt werden [vergleiche §§ 692, 693, 694, 688, 682 und 680]. Was man gewöhnlich die „Zusammendrückbarkeit" nennt, wird durch $\dfrac{1}{m - \frac{1}{3}n}$ gemessen.

Weiter sei $e = f = g = b = c = 0$; dies liefert

$$w = \frac{1}{2}na^2 \text{ und nach (19) } S = na.$$

Hieraus geht hervor, dass die für die Flächeneinheit genommene Tangentialkraft, die erfordert wird, um eine unendlich kleine Schiebung (§ 171) von der Grösse a zu erzeugen, na ist. Folglich misst n die dem Körper inne wohnende Kraft, einer Formänderung zu widerstehen und seine anfängliche Gestalt wieder anzunehmen, wenn dieselbe durch eine äussere Kraft geändert ist, d. h. n misst die Starrheit der Substanz.

D. Ueber die säculare Abkühlung der Erde *).

(a) Achtzehn Jahre lang hat mich der Gedanke beunruhigt, dass wesentliche Principien der Thermodynamik von denjenigen Geologen übersehen worden sind, welche sich allen Hypothesen ohne Unterschied widersetzen, nach denen in der Entwicklung der Erde verschiedene scharf von einander getrennte Perioden zu unterscheiden seien, und welche behaupten, dass wir nicht nur jetzt auf der Erde Beispiele all der verschiedenen Wirkungen vor uns haben, durch welche die Erdrinde im Laufe der Zeit modificirt worden ist, sondern dass diese Wirkungen nie oder doch nicht im Ganzen in früherer Zeit heftiger gewesen sind als jetzt.

(b) **Abnahme des Energievorraths im Sonnensystem.** — Es unterliegt keinem Zweifel, dass das Sonnensystem, sogar in seinem jetzigen Zustande, nicht einige Hunderttausend oder Millionen Jahre bestanden haben kann, ohne dass ein sehr beträchtlicher Theil der gesammten Energie, welche das System anfänglich für Sonnenwärme und vulcanische Wirkung besass (durch Abgabe nach aussen, nicht durch Vernichtung), unwiederbringlich verloren sei. Es ist ganz gewiss, dass der im Sonnensystem enthaltene Energievorrath in allen vergangenen Zeiten grösser gewesen ist als jetzt. Man könnte sich nun zwar denken, dass die Geschwindigkeit, mit welcher diese Energie durch die Sonnenstrahlung oder durch vulcanische Wirkungen in der Erde oder in anderen dunkeln Körpern des Systems aufgebraucht worden ist, in gewissen Perioden der Vergangenheit nahezu ebenso

*) Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 1862 (W. Thomson).

gross oder vielleicht gar kleiner gewesen ist als jetzt; es ist aber weit wahrscheinlicher, dass zu jeder Zeit nach dem Beginn der gegenwärtigen Ordnung der Dinge der säculare Verlust in einer gewissen directen Proportion zu dem gesammten Energievorrath gestanden hat und daher von Jahr zu Jahr sehr langsam kleiner geworden ist.

(c) Ich habe versucht, dies für die Sonnenwärme in einem neulich in Macmillan's Magazine (März 1862) veröffentlichten Artikel zu beweisen, in welchem ich gezeigt habe, dass die Sonne höchst wahrscheinlich vor einer Million Jahren wärmer war, als sie jetzt ist. Folglich haben die geologischen Speculationen, welche sich darauf stützen, dass in früherer Zeit die Temperaturextreme grösser, die Stürme und Fluthen heftiger, die Vegetation üppiger und die Pflanzen und Thiere gröber und zäher gewesen seien, mehr Wahrscheinlichkeit für sich, als diejenigen der Vertreter einer äussersten Gleichförmigkeit in der Geschichte der Erde. Ein „Mittelweg", der in wissenschaftlichen Untersuchungen freilich nicht immer der sicherste ist, scheint es doch in diesem Falle zu sein. Es ist wahrscheinlich, dass die Annahme grosser Katastrophen, die alles Leben von der Erde vertilgten und plötzlich die ganze Oberfläche derselben zerstörten, durchaus falsch ist; ebenso ist es aber auch unmöglich, dass Hypothesen vollständig richtig sein können, nach welchen die Wärme und die Stürme 1,000,000 Jahre hindurch von gleicher Grösse gewesen seien.

(d) Fourier's mathematische Theorie der Wärmeleitung ist eine schöne Bearbeitung eines besonderen Falles aus der allgemeinen Theorie der „Zerstreuung von Energie" *). Eine Eigenthümlichkeit der praktischen Lösungen, welche Fourier's Arbeit darbietet, besteht darin, dass in jedem Falle eine Temperaturvertheilung, welche in einer unbegrenzten Zukunft allmälig ausgeglichen wird, durch eine Function der Zeit ausgedrückt wird, die für alle länger als eine gewisse bestimmbare Epoche verflossenen Zeiten ins Unendliche divergirt. Die Vertheilung der Wärme in einer solchen Epoche ist eine ursprüngliche, d. h. sie kann nicht durch natürliche Vorgänge aus einem vorausgehenden Zustande der Materie herrühren. Sie wird daher in Fourier's grossem mathematischen Gemälde passend eine „willkürliche ursprüngliche Wärmevertheilung" ge-

*) *Proceedings of Royal Soc. Edin.*, Febr. 1852. „On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy". Siehe auch „On the Restoration of Energy in an Unequally Heated Space", *Phil. Mag.*, 1853, 1. Halbjahr.

nannt, da sie nur durch die Wirkung einer Kraft herbeigeführt werden konnte, die im Stande war, die Gesetze der todten Materie zu modificiren. In einem vor ungefähr neunzehn Jahren im Cambridge Mathematical Journal *) veröffentlichten Artikel gab ich das mathematische Criterium für eine wirklich ursprüngliche Vertheilung, und in einer vor der Facultät der Universität Glasgow im Jahre 1846 gelesenen Antrittsrede „De Motu Caloris per Terrae Corpus" theilte ich als eine Anwendung dieser Principien mit, dass ein ganz vollständiges geothermisches System uns die Daten zur Bestimmung einer ursprünglichen Epoche in dem Problem der Wärmeleitung der Erde liefern würde. Auf der Zusammenkunft der Gesellschaft britischer Naturforscher zu Glasgow im Jahre 1855 forderte ich, dass man specielle geothermische Tabellen entwerfe, um dadurch absolute Daten in der Geologie zu erhalten, und führte einige Fälle aus, besonders den der Salzquellen in Kreuznach in Rheinpreussen, in welchen Eruptionen basaltischen Gesteins Spuren ihres vulcanischen Ursprungs in rückständiger Wärme zu hinterlassen scheinen **). Ich hoffe, dass dieser Rath jetzt befolgt und sich in gewissem Grade als nützlich erweisen wird, obwohl die Einflüsse, welche auf die Temperatur im Erdinnern störend einwirken, wie Professor Philipps in einer anderen Zuschrift an die geologische Gesellschaft gezeigt hat, zu gross sind, als dass wir sehr genaue oder zufrieden stellende Resultate erwarten dürften.

(e) Der Hauptzweck der vorliegenden Mittheilung ist der, aus der bekannten allgemeinen Zunahme der Temperatur in der Erde den Zeitpunkt zu bestimmen, in welchem zuerst jener consistentior status eintrat, welcher nach Leibnitz's Theorie der Ausgangspunkt jeder geologischen Geschichte ist.

(f) **Temperaturzunahme im Erdinnern.** — In allen Theilen der Welt, in welchen die Erdrinde in Tiefen untersucht worden ist, die gross genug waren, um den grossen Einfluss der unregelmässigen und der jährlichen Variationen der Temperatur der Oberfläche zu vermeiden, hat man gefunden, dass die Temperatur allmälig steigt, wenn man tiefer in die Erde hinabgeht. Ueber die Grösse der Zunahme (für die man in einigen Gegenden nur $\frac{1}{110}$ Grad F., in anderen gar $\frac{1}{15}$ Grad F. für die Tiefe von 1 engl. Fuss

*) Feb. 1844. — „Note on Certain Points in the Theory of Heat".
**) British Association Report of 1855 (Glasgow) Meeting.

erhielt) hat man noch nicht an hinreichend vielen Orten Beobachtungen angestellt, um einen zuverlässigen Durchschnittswerth für die Rinde der ganzen Erde zu bestimmen. Als einen ungefähren Mittelwerth nimmt man gewöhnlich $\frac{1}{50}$ Grad F. per engl. Fuss an, mit anderen Worten: es wird als ein Ergebniss der Beobachtung angenommen, dass die Temperatur um etwa 1° F. steigt für jede 50 engl. Fuss, die man in die Erde hinabgeht.

(g) **Säcularer Wärmeverlust der Erde.** — Die Thatsache, dass die Temperatur mit der Tiefe steigt, involvirt einen unaufhörlichen Wärmeverlust aus dem Erdinnern, indem aus demselben Wärme in die Rinde oder durch diese in den Weltraum geleitet wird. Da nun die Erdrinde nicht von Jahr zu Jahr wärmer wird, so muss die Erde im Ganzen einen säcularen Wärmeverlust erleiden. Möglicher Weise ist die Wirkung dieses Verlustes keine Abkühlung, sondern nur ein Verbrauch der potentiellen Energie, welche in diesem Falle kaum etwas Anderes sein könnte, als die chemische Verwandtschaft zwischen den die Erdmasse bildenden Substanzen. Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass die Erde im Ganzen entweder von Jahr zu Jahr kälter wird, oder dass sich die Wärme, die sie verliert, in ihrem Innern durch temporäre dynamische (d. h. in diesem Falle chemische) Wirkung wieder erzeugt. Mit Lyell*), der die chemische Hypothese adoptirte, vorauszusetzen, dass die Substanzen, die sich vereinigen, elektrolytisch durch die thermoelektrischen Ströme wieder getrennt werden möchten, welche durch die bei der Verbindung der Substanzen erzeugte Wärme erregt werden, und dass auf diese Weise die chemische Wirkung und die daraus folgende Wärmeerzeugung in einem endlosen Cyclus sich fortsetzten, verletzt die Principien der Physik in derselben Weise und demselben Grade, wie der Glaube, dass eine mit einem sich selbst aufziehenden Gehwerk construirte Uhr die Erwartungen ihres geistreichen Erfinders, dass sie ewig fortgehen würde, erfüllen könnte.

(h) Es muss in der That zugegeben werden, dass viele geologische Schriftsteller, welche die „Uniformität" vertheidigen und in anderen Beziehungen ihren Gegenstand tief philosophisch zu behandeln verstanden, in einer ganz sophistischen Weise gegen die Annahme stürmischerer älterer Entwicklungsperioden angekämpft

---

*) *Principles of Geology*, chap. XXXI, ed. 1853.

haben. Wenn sie sich damit begnügt hätten, darzuthun, dass viele vorhandene Erscheinungen, obschon sie auf eine äusserste Gewalt und einen plötzlichen Wechsel hindeuten, doch durch eine lang fortgesetzte Wirkung oder durch plötzliche Aenderungen zu Stande gebracht sind, die keine grössere Intensität als einige von denen haben, mit denen wir innerhalb der Perioden der menschlichen Geschichte bekannt geworden sind, so würde ihre Stellung unangreifbar gewesen sein und könnte jedenfalls nur durch eine detaillirte Discussion der von ihnen vorgebrachten Thatsachen angegriffen werden. Es würde ein überraschendes, aber nicht absolut unglaubliches Resultat sein, dass die vulcanische Wirkung im Ganzen niemals heftiger gewesen ist, als während der letzten zwei oder drei Jahrhunderte; aber es ist ebenso gewiss, dass sich jetzt weniger vulcanische Energie als vor 1000 Jahren in der ganzen Erde befindet, wie es keinem Zweifel unterliegt, dass ein Kriegsschiff, nachdem es fünf Stunden hindurch ohne frische Munition zu erhalten Schüsse und Bomben in nahezu gleichen oder ungleichen Intervallen abgefeuert hat, weniger Pulver enthält, als sich beim Beginn seiner Thätigkeit darauf befand. Und doch ist diese Wahrheit von vielen der ersten Geologen der Gegenwart ignorirt oder bestritten worden, weil sie glauben, dass die Thatsachen, die sich innerhalb ihres Gesichtskreises befinden, keine grössere Heftigkeit in den früheren Veränderungen der Erdoberfläche beweisen oder für eine nahezu gleichmässige Wirkung in allen Perioden sprechen.

(i) **Die chemische Hypothese zur Erklärung der Erdwärme ist nicht unmöglich, aber sehr unwahrscheinlich.** — Man könnte die chemische Hypothese zur Erklärung der Wärme des Erdinnern als nicht unwahrscheinlich ansehen, wenn sich eine Zunahme der Temperatur mit der Tiefe nur in isolirten Gegenden ergeben hätte, und in der That ist kaum daran zu zweifeln, dass die chemische Wirkung einen bemerkenswerthen (möglicher Weise jedoch negativen) Einfluss auf die Wirkung der Vulcane ausübt. Dass aber in einer grossen unbekannten Tiefe unter der Oberfläche überall eine langsame gleichmässige „Verbrennung“ oder chemische Verbindung irgend einer Art vor sich gehe, die allmälig, wenn die chemischen Verwandtschaftskräfte successive in einer Schicht nach der anderen gesättigt werden, immer weiter in die Erde eindringt, scheint ausserordentlich unwahrscheinlich, obgleich man nicht behaupten kann, dass es absolut unmöglich oder allen Analogien in der Natur entgegen wäre. Doch ist beim gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft offenbar die weniger hypothetische Ansicht vorzu-

ziehen, nach welcher die Erde nichts als ein chemisch unthätiger, in der Abkühlung begriffener warmer Körper ist.

(j) Mangelhaftigkeit der Poisson'schen Hypothese. — Poisson's berühmte Hypothese, dass die jetzige Wärme des Erdinnern aus einem in einer früheren Periode erfolgten Durchgang des Sonnensystems durch wärmere Regionen des Weltenraumes herrühre, kann nicht den Umstand erklären, dass die Petrefactenbildung während dieser Epoche äusserer Wärme keine Unterbrechung erlitt. Forbes hat an drei verschiedenen Stellen in der Nähe von Edinburg Beobachtungen über die Temperatur des Erdinnern angestellt. Aus einem Mittelwerth der aus diesen Beobachtungen hergeleiteten Werthe des durch die Wärmecapacität der Volumeneinheit der Erdrinde ausgedrückten Leitungsvermögens derselben finde ich, dass, wenn der vorausgesetzte Durchgang durch einen wärmeren Theil des Weltraums vor nicht weniger als 1250 und nicht mehr als 5000 Jahren stattfand, die Temperatur jenes Raumes 25° bis 50° F. höher gewesen sein muss, als die jetzige mittlere Temperatur der Erdoberfläche, um die jetzige allgemeine Zunahme der Temperatur mit der Tiefe in der Erde — 1° F. per 50 engl. Fuss Tiefe — zu erklären. Die Geschichte widerlegt diese Annahme. Ferner werden, denke ich, die Geologen und Astronomen zugeben, dass die Erde vor 20,000 Jahren nicht in einem Raume sich befunden haben kann, der um 100° F. wärmer als jetzt die Erdoberfläche ist. Wenn aber der von Poisson vorausgesetzte Uebergang aus einer wärmeren in eine kältere Region vor mehr als 20,000 Jahren stattfand, so muss die Temperaturdifferenz mehr als 100° F. betragen haben, und daher hätte alles animalische und vegetabilische Leben zerstört werden müssen. Je weiter wir daher Poisson's warme Region zurückversetzen, und je wärmer wir sie voraussetzen, um so besser ist es für die Geologen, welche möglichst lange Perioden fordern; am besten ist für ihren Zweck aber Leibnitz's Theorie, welche einfach voraussetzt, dass die Erde früher eine glühende Flüssigkeit war, ohne zu erklären, wie sie in diesen Zustand gelangte. Wenn wir die Temperatur einer schmelzenden Felsmasse gleich ungefähr 10,000° F. (eine äusserst hohe Schätzung) annehmen, so kann die Erstarrung vor 200,000,000 Jahren erfolgt sein. Oder wenn wir voraussetzen, dass Felsmassen schon bei einer Temperatur von 7000° F. schmelzen (was mit der gewöhnlichen Annahme mehr übereinstimmt), so können wir annehmen, dass die Erstarrung vor 98,000,000 Jahren stattgefunden hat.

(k) **Wahrscheinliche Grenzwerthe des Wärmeleitungsvermögens und der Wärmecapacität der Erdoberfläche.** — Diese Bestimmungen gründen sich auf die unten entwickelte Theorie von Fourier. Die grösste Veränderung, die wir an ihnen zu machen haben, um die Differenzen in den Verhältnissen des Leitungsvermögens zur specifischen Wärme, die sich an den drei verschiedenen Stellen bei Edinburg ergeben haben, in Rechnung zu ziehen, besteht darin, dass man sie auf ungefähr die Hälfte reducirt oder sie um etwas mehr als die Hälfte vergrössert. Eine Reduction der bei Greenwich angestellten Beobachtungen der Erdwärme, die mir neuerdings Professor Everett aus Windsor mitgetheilt hat, liefert für die Greenwicher Felsmassen Zahlen, die zwischen den bei Edinburg erhaltenen liegen. Wir sind aber völlig unwissend in Betreff der Wirkungen, welche hohe Temperaturen auf das Leitungsvermögen und die specifische Wärme der Steine ausüben, und in Betreff der latenten Schmelzwärme derselben. Daher müssen wir in einer Berechnung, wie ich sie zu machen versucht habe, sehr weite Grenzen einräumen; ich glaube aber, dass wir mit vieler Wahrscheinlichkeit sagen können, dass die Erstarrung der Erde vor nicht weniger als 20,000,000 Jahren und vor nicht mehr als 400,000,000 Jahren stattgefunden haben kann; denn im ersteren Falle würde die Wärme des Erdinnern grösser sein müssen, als sie jetzt ist; im letzteren Falle würde die Temperatur mit der Tiefe nicht in dem Grade zunehmen, welchen die kleinsten durch directe Beobachtungen erhaltenen Resultate angeben. Ich schliesse daraus, dass Leibnitz's Epoche der Entstehung des consistentior status wahrscheinlich zwischen jenen Grenzen liegt.

(l) **Mathematischer Ausdruck für die innere Temperatur in der Nähe der Oberfläche eines heissen festen Körpers, der anfängt sich abzukühlen.** — Die mathematische Theorie, auf welche diese Berechnungen sich gründen, ist sehr einfach, nämlich bloss eine Anwendung einer der elementaren Lösungen, welche Fourier für das Problem gegeben hat: In einem festen Körper, der sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstreckt, zu irgend einer Zeit die Variation der Temperatur von Punkt zu Punkt und die in irgend einem Punkte wirklich vorhandene Temperatur unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass die Temperatur zu einer anfänglichen Epoche zu beiden Seiten einer gewissen unendlich grossen Ebene zwei verschiedene constante Werthe hatte. Die Lösung für die beiden gesuchten Elemente ist folgende: —

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{\sqrt{\pi \varkappa t}} e^{-\frac{x^2}{4 \varkappa t}},$$

$$v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} dz\, e^{-z^2};$$

darin bezeichnen

$\varkappa$ das durch die Wärmecapacität der Masseneinheit ausgedrückte Leitungsvermögen des festen Körpers;

V die halbe Differenz der beiden anfänglichen Temperaturen;

v_0 das arithmetische Mittel dieser Temperaturen;

t die Zeit;

x den Abstand irgend eines Punktes von der Mittelebene;

v die Temperatur des Punktes x zur Zeit t; und folglich

$\frac{dv}{dx}$ (nach der Bezeichnung der Differentialrechnung) die für die Längeneinheit senkrecht zu den isothermalen Ebenen genommene Grösse der Variation der Temperatur.

(m) Diese Lösung zu beweisen, haben wir nur Folgendes darzuthun: —

(1) Dass der Ausdruck für v der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \varkappa \frac{d^2 v}{dx^2},$$

Fourier's Gleichung für die „lineare Wärmeleitung", genügt;

(2) Dass, wenn $t = 0$ ist, der Ausdruck für v für alle positiven Werthe von x in $v_0 + V$, für alle negativen Werthe von x in $v_0 - V$ übergeht;

(3) Dass der Ausdruck für $\frac{dv}{dx}$ der nach x genommene Differentialquotient des Ausdrucks für v ist.

Die Sätze (1) und (3) werden direct durch Differentiation bewiesen. Um (2) zu beweisen, haben wir, wenn $t = 0$ und x positiv ist,

$$v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dz\, e^{-z^2},$$

oder nach dem bekannten Werthe $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ des bestimmten Integrals

$\int_0^{\infty} dz\, e^{-z^2}$,

$$v = v_0 + V;$$

da nun für alle Werthe von t das zweite Glied für gleiche positive und negative Werthe von x gleiche positive und negative Werthe hat, so folgt, wenn $t = 0$ und x negativ ist,

$$v = v_0 - V.$$

Die bewundernswerthe Analyse, durch welche Fourier zu Lösungen gelangte, die die obige umfassen, bildet ein äusserst interessantes und wichtiges mathematisches Studium. Sie findet sich in seiner Théorie Analytique de la Chaleur, Paris 1822.

(n) Die Fig. 90 auf Seite 444 stellt durch zwei Curven beziehungsweise die vorhergehenden Ausdrücke für $\frac{dv}{dx}$ und v dar.

(o) Die in dieser Weise ausgedrückte und erläuterte Lösung lässt sich für eine gewisse Zeit ohne merklichen Irrthum auf den Fall einer Vollkugel anwenden, welche ursprünglich auf eine gleichmässige Temperatur erwärmt, und deren Oberfläche sodann plötzlich einer Einwirkung unterworfen wurde, die für alle folgende Zeit die Oberfläche in einer anderen constanten Temperatur erhält. Wenn z. B. der betrachtete Fall der einer aus fester Felsmasse bestehenden Kugel von 8000 engl. Meilen Durchmesser ist, so kann die Lösung mit kaum merklichem Fehler auf mehr als 1000 Millionen Jahre angewandt werden. Denn wenn die Felsmasse hinsichtlich des Leitungsvermögens und der specifischen Wärme von einer gewissen mittleren Beschaffenheit ist, so wird der Werth von $\varkappa$, wie ich in einer früheren Mittheilung an die königliche Gesellschaft *) gefunden habe, 400 sein; dabei ist als Längeneinheit der britische Fuss und als Zeiteinheit das Jahr angenommen; die Gleichung, welche die Lösung ausdrückt, geht dann über in

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{35{\cdot}4} \cdot \frac{1}{t^{1/2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{1600\,t}},$$

und wenn wir t den Werth 1,000,000,000 oder einen etwas kleineren Werth ertheilen, so wird der Exponentialfactor weniger als $e^{-5{\cdot}6}$ (was ungefähr gleich $\frac{1}{270}$ ist und daher als unmerklich angesehen werden kann), wenn x grösser als 3,000,000 engl. Fuss oder 568 engl. Meilen ist. Danach wird während der ersten 1000 Millionen Jahre die Variation der Temperatur in Tiefen, welche 568 Meilen überschreiten, nicht merklich; sie ist also auf eine so dünne

*) „On the Periodical Variations of Underground Temperature." *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, March 1860.

Kruste beschränkt, dass der Einfluss der Krümmung vernachlässigt werden kann.

(p) Vertheilung der Temperatur 100 Millionen Jahre nach Beginn der Abkühlung einer hinlänglich grossen Felsmasse. — Wenn wir jetzt voraussetzen, die Zeit vom Beginn der Veränderung an sei 100 Millionen Jahre, so geht die Gleichung über in

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V}{354,000} e^{-\frac{x^2}{160,000,000,000}}.$$

Die Zeichnung zeigt daher (S. 444), wie die Temperatur in der Erde jetzt variiren würde, wenn die ganze Masse derselben anfänglich fest gewesen wäre und vor 100 Millionen Jahren überall dieselbe Temperatur besessen hätte, und wenn die Temperatur ihrer Oberfläche plötzlich überall um V Grad erniedrigt und sodann constant erhalten worden wäre; die hierbei benutzten Maasse sind folgende: —

(1) Für die längs OX zu messenden Tiefen unter der Oberfläche stellt die Länge a 400,000 engl. Fuss dar.

(2) Für die Curve der Temperaturzunahme per Fuss Tiefe stellt die längs der OY parallelen Ordinaten zu messende Länge b $\frac{1}{354,000}$ von V per Fuss dar. Wenn z. B. $V = 7000^0$ ist, so wird dieser Maassstab so beschaffen sein, dass b $\frac{1}{50\cdot6}$ eines Grades per Fuss darstellt.

(3) Für die Curve des Temperaturüberschusses drückt die längs der OY parallelen Ordinaten zu messende Länge b die Grösse $\frac{V}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$ aus, ist also 7900^0, wenn $V = 7000^0$ ist.

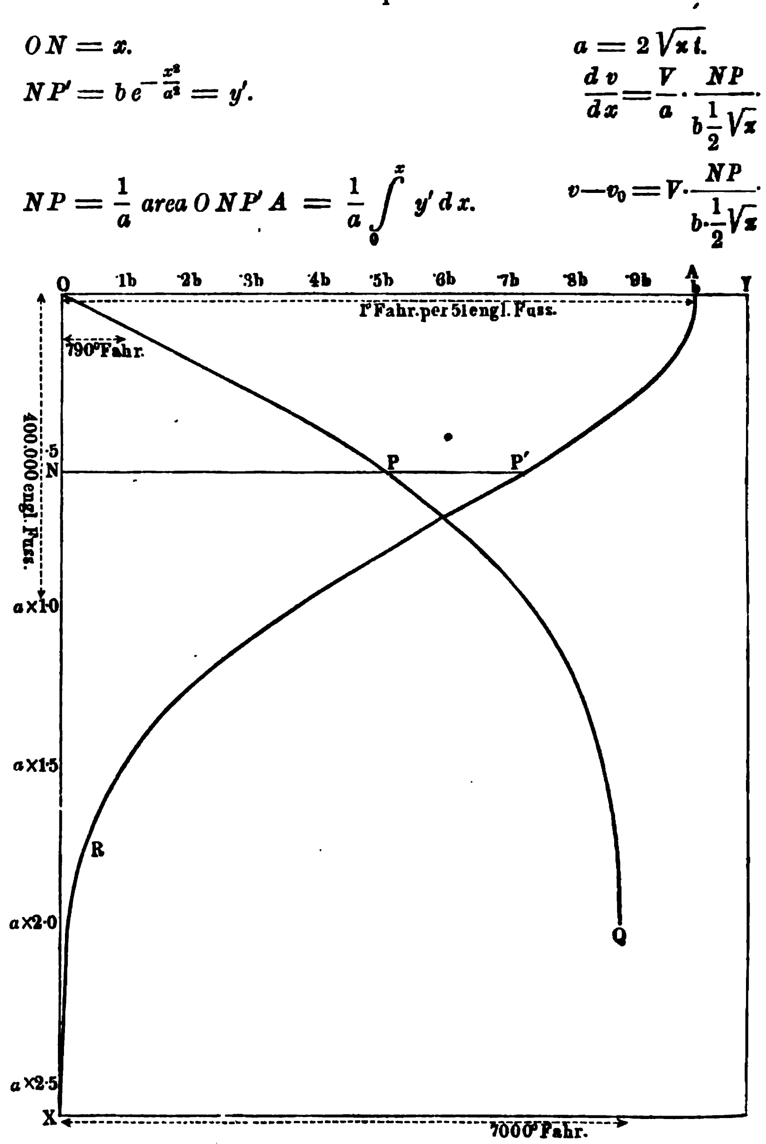
Danach nimmt die Temperatur von der Erdoberfläche nach innen zu für die ersten 100,000 Fuss um ungefähr $\frac{1}{51}$ Grad F. per Fuss zu. Unter dieser Tiefe beginnt die Temperatur merklich langsamer zu steigen. Bei einer Tiefe von 400,000 Fuss beträgt ihre Zunahme nur noch ungefähr $\frac{1}{141}$ Grad per Fuss. Bei einer Tiefe von 800,000 Fuss ist die Zunahme auf weniger als $\frac{1}{50}$ ihres anfänglichen Werthes gesunken, d. h. beträgt weniger als $\frac{1}{2550}$ Grad per Fuss; in dieser Weise wird die Zunahme rasch kleiner, wie aus

Zunahme der Temperatur in der Erde.

$ON = x.$ $\quad a = 2\sqrt{\varkappa t}.$

$NP' = b e^{-\frac{x^2}{a^2}} = y'.$ $\quad \frac{dv}{dx} = \frac{V}{a} \cdot \frac{NP}{b \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}.$

$NP = \frac{1}{a} \text{ area } ONP'A = \frac{1}{a} \int_0^x y' \, dx.$ $\quad v - v_0 = V \cdot \frac{NP}{b \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}.$



Die Curve OPQ zeigt den Ueberschuss der Temperatur über die der Oberfläche.
Die Curve $AP'R$ zeigt die Grösse der Temperaturzunahme nach dem Mittelpunkt der Erde zu.

der Curve ersichtlich ist. Dies ist im Ganzen die wahrscheinlichste Darstellung der jetzigen Temperatur der Erde in Tiefen von 100 Fuss an, wo die jährlichen Variationen aufhören merklich zu sein, bis zu 100 Meilen, unterhalb welcher Grenze die Masse der Erde (sei sie nun flüssig oder fest) entweder ganz oder mit Ausnahme eines von Anfang an kalten Kernes, wahrscheinlich die dem Druck in jeder Tiefe entsprechende Schmelztemperatur oder doch eine davon nur sehr wenig abweichende Temperatur hat.

(q) **Das Klima wird durch die Erdwärme nicht merklich beeinflusst.** — Die oben dargelegte Theorie wirft Licht auf die so oft discutirte Frage: — Kann die Erdwärme lange geologische Perioden hindurch auf das Klima von Einfluss gewesen sein? — und erlaubt uns, dieselbe ganz entschieden zu verneinen. In dem Falle, den wir vorausgesetzt haben, würde die Temperaturzunahme 10,000 Jahre nach dem Beginn der Abkühlung in der Nähe der Oberfläche 2° F. per Fuss Tiefe betragen. Die Ausstrahlung von der Erde und der Atmosphäre in den Weltraum (über welche wir noch keine zufriedenstellende absolute Messung haben) würde im jetzigen Zustande der Erde fast gewiss genügend stark sein, um zu verhindern, dass eine Zunahme um 2° F. per Fuss Tiefe die Temperatur der Oberfläche um mehr als etwa 1° erhöht; und daraus schliesse ich, dass das allgemeine Klima nicht länger, als etwa während der ersten 10,000 Jahre nach dem Beginn der Erstarrung der Oberfläche durch die aus dem Innern zugeleitete Wärme merklich beeinflusst gewesen sein kann. Unzweifelhaft kann allerdings an einzelnen Orten eine Erhöhung der Temperatur durch warme Quellen oder durch Eruptionen geschmolzener Lava stattfinden, und überall würde während der ersten drei oder vier Millionen Jahre auf die Vegetation, wenn eine solche so bald nach der Epoche der Erstarrung existirt hätte, die merklich höhere Temperatur von Einfluss gewesen sein, welche die einen Fuss weit oder noch tiefer in die Erde eindringenden Pflanzenwurzeln angetroffen hätten.

(r) Welches auch die Grösse solcher Wirkungen zu irgend einer Zeit ist, dieselbe würde sich nach dem umgekehrten Verhältniss der Quadratwurzeln der seit der Anfangsepoche verflossenen Zeiten verringern. Wenn wir also 10,000 Jahre nach diesem Zeitpunkt 2° Zunahme per Fuss Tiefe haben, so würde die Zunahme nach

40,000	Jahren	1	Grad per Fuss
160,000	"	$\frac{1}{2}$	" " "
4,000,000	"	$\frac{1}{10}$	" " "
100,000,000	"	$\frac{1}{50}$	" " "

betragen. Es ist daher wahrscheinlich, dass während der letzten 96,000,000 Jahre die Zunahme der Temperatur nach dem Mittelpunkt der Erde hin allmälig von $\frac{1}{10}$ bis zu $\frac{1}{50}$ Grad F. per Fuss kleiner geworden ist, und dass die Dicke der Erdrinde, durch welche hindurch irgend ein festgesetzter Grad der Abkühlung zu Stande gekommen ist, in derselben Periode allmälig von $\frac{1}{5}$ ihrer jetzigen Grösse zu dieser letzteren zugenommen hat. Steht dies nicht im Ganzen mit den richtig interpretirten Zeugnissen der Geologie in Uebereinstimmung? Stimmen nicht die ausgedehnten Basaltmassen, das allgemeine Auftreten von Bergketten, die gewaltsamen Verschiebungen und Durchbrechungen der Schichten, das bedeutende Vorherrschen umgestaltender Thätigkeit (welche in Tiefen von wenigen Meilen, vielleicht nicht einmal so tief stattgefunden haben muss) alle darin überein, zu beweisen, dass die Zunahme der Temperatur im Innern der Erde viel rascher gewesen sein muss, und es wahrscheinlich zu machen, dass die vulcanische Energie, die Erdbeben und jede Art der sogenannten plutonischen Wirkung in den früheren Perioden der Erde im Ganzen weit reichlicher und heftiger thätig gewesen ist als in der Gegenwart?

(s) **Einwände.** — Gegen diese Anwendung der mathematischen Theorie lassen sich jedoch folgende Einwände erheben: —

(1) Die Erde war einst ganz oder wenigstens auf ihrer ganzen Oberfläche geschmolzen, und man kann von ihr nicht oder doch nur mit grosser Unwahrscheinlichkeit voraussetzen, wie es in dem mathematischen Problem geschieht, dass sie je ein gleichmässig erwärmter fester Körper gewesen sei, dessen Temperatur die jetzige Temperatur der Erdoberfläche um 7000° übertroffen habe.

(2) Keine Wirkung in der Natur ist im Stande, eine Erniedrigung der Temperatur der Oberfläche um 7000° in einem Augenblick zu erzeugen und für alle spätere Zeit zu unterhalten.

Den zweiten Einwand, den wir zuerst vornehmen wollen, er-

ledige ich durch die Bemerkung, die, glaube ich, wohl nicht bestritten werden kann, dass eine der Luft und dem Himmel frei ausgesetzte grosse Masse geschmolzenen Gesteins, nachdem sie erst sich mit einer Kruste überzogen hat, in wenigen Stunden, oder in wenig Tagen oder doch in wenig Wochen eine so kalte Oberfläche besitzen wird, dass man ungestraft darüber hingehen kann. Folglich wird nach 10,000 Jahren oder in der That schon nach einem einzigen Jahre ihr Zustand ziemlich derselbe sein, als wenn die von ihrer Oberfläche erlittene Temperaturerniedrigung in einem Augenblick erzeugt und für alle folgende Zeit constant erhalten wäre. Den ersten Einwand beantworte ich damit, dass ich sage, dass, wenn die latente Schmelzwärme und die Variationen des Leitungsvermögens und der specifischen Wärme der Erdrinde bis zu ihrem Schmelzpunkt hinauf experimentell bestimmt sein werden, es leicht sein wird, die oben gegebene Lösung so zu modificiren, dass sie für den Fall einer flüssigen Kugel passt, welche in Folge der Wärmeleitung durch die feste Rinde in ein äusseres kaltes Medium allmälig von aussen nach innen zu erstarrt. Inzwischen können wir sehen, dass diese Modification keine beträchtliche Aenderung in der Temperatur hervorbringen wird, die sich für einen Punkt der Rinde ergibt, wofern sich nicht, entgegen dem, was wir nach der Analogie erwarten, die bei der Erstarrung frei gewordene latente Wärme als gross erweist im Vergleich zu der Wärme, welche eine gleiche Masse des festen Körpers abgibt, während sie sich von der Temperatur des Erstarrungspunktes zu derjenigen der Oberfläche abkühlt. Was aber die Sache näher trifft, ist, dass der Einwand, so plausibel er auch erscheint, trotzdem nicht stichhaltig ist, und dass das oben gelöste Problem aller Wahrscheinlichkeit nach weit mehr der wirklichen Geschichte der Erde entspricht, als das durch diesen Einwand vorgeschlagene modificirte Problem. Obwohl die Erde einst ganz oder wenigstens auf ihrer ganzen Oberfläche geschmolzen war, so ging sie demnächst doch wahrscheinlich in einen fester Körper über, dessen Temperatur überall oder überall in den äusseren Schichten, die geschmolzen gewesen waren, die des Schmelzpunktes war, und die Oberfläche fing nicht an abzukühlen, bevor die Erstarrung in dieser Weise oder doch nahezu in dieser Weise vollständig war. Dass diese Ansicht die richtige ist, kann kaum bezweifelt werden, wenn man die folgenden Gründe beachtet.

(t) Zunächst werden wir voraussetzen, dass die Erde zu einer Zeit aus einem festen Kern bestand, der überall mit einem sehr tiefen Ocean geschmolzener Felsmassen bedeckt und der Abkühlung

durch Ausstrahlung in den Weltraum überlassen war. Dies ist der Zustand, in welchen ein kalter Körper, der viel kleiner als unsere Erde ist, durch den Zusammenstoss mit vielen noch kleineren kalten Körpern gelangen würde, und steht daher in Uebereinstimmung mit der Hypothese über die Vorgeschichte der Erde, die wir als eine wahrscheinliche ansehen können. Es ist darin als ein besonderer Fall die mehr verbreitete Annahme enthalten, dass die Erde einst vollständig geschmolzen war, ein Zustand, der durch den Zusammenstoss von zwei nahezu gleichen Massen hätte herbeigeführt sein können. Die Beweise, welche die meisten Geologen zu der Ueberzeugung gebracht haben, dass die Erde einen feurig-flüssigen Anfang hatte, beziehen sich aber nur auf eine sehr kleine Tiefe unterhalb der Oberfläche und liefern uns durchaus keine Mittel, zwischen den wirklich stattfindenden Erscheinungen und denjenigen zu unterscheiden, die sich ergeben haben würden, wenn die Erde entweder eine vollständige Kugel flüssiger Felsmasse oder ein bis zu einer Tiefe von mehr als 50 bis 100 Meilen mit einer solchen Flüssigkeit bedeckter fester kalter Kern gewesen wäre. Indem wir daher von jeder Hypothese in Betreff der Antecedentien absehen, aus welchen der anfängliche feurig-flüssige Zustand der Erde durch natürliche Ursachen hervorging, und indem wir einfach annehmen, was die Geologie als wahrscheinlich erweist, dass die Erdoberfläche zu einer Zeit ganz mit geschmolzenen Felsmassen bedeckt war, brauchen wir nicht vorauszusetzen, dass die Tiefe dieser Lava mehr als 50 oder 100 Meilen betrug, obschon wir die Annahme einer grösseren Tiefe oder einer vollständig flüssigen Kugel nicht auszuschliessen brauchen.

(u) **Convectives Gleichgewicht der Temperatur.** — In dem Process der Abkühlung muss die Flüssigkeit [wie ich bei einer Betrachtung der Sonne in einem Artikel in Macmillan's Magazine (März 1862) und in einer Betrachtung der Atmosphäre der Erde in einer Mittheilung an die Literary and Philosophical Society von Manchester *) bemerkt habe] durch Fortführung (Convection) der Wärme dazu gebracht werden, dass sie einem bestimmten Gesetz der Temperaturvertheilung genügt, welches ich „das convective Gleichgewicht der Temperatur" genannt habe. Das heisst, die Temperaturen in den verschiedenen Theilen im Innern müssen für verschiedene Werthe des Drucks um solche Differenzen der Temperaturen von

*) *Proceedings*, Jan. 1862. „On the Convective Equilibrium of Temperature in the Atmosphere".

einander abweichen, wie sie irgend ein Theil der Flüssigkeit zeigen würde, wenn er mit der Temperatur und dem Druck einer bestimmten Schicht gegeben und dann einer Variation des Drucks ausgesetzt, dabei aber verhindert worden wäre, Wärme zu verlieren oder zu gewinnen. Der Grund davon ist die grosse Langsamkeit der eigentlichen Wärmeleitung und der folglich überwiegende Einfluss, welchen die grossen Ströme in einer continuirlichen Flüssigkeitsmasse auf die Vertheilung der Temperatur in der Masse ausüben.

(v) Das thermo-dynamische Gesetz, welches den Zusammenhang ausdrückt zwischen Temperatur und Druck in einer flüssigen Masse, der man nicht gestattet, Wärme zu verlieren oder zu gewinnen, ist theoretisch erforscht und in den Fällen von Luft und Wasser von Joule und mir selbst *) experimentell bewahrheitet. Es zeigt, dass die Temperatur in der Flüssigkeit von der Oberfläche nach unten zu wächst, wenn, wie es am wahrscheinlichsten der Fall ist, die Flüssigkeit bei der Abkühlung sich zusammenzieht. Wenn die Flüssigkeit andererseits, gleichwie Wasser in der Nähe seines Gefrierpunktes, bei der Abkühlung sich ausdehnte, so würde die Temperatur nach den eben ausgesprochenen convectiven und thermodynamischen Gesetzen (§§ u, v) thatsächlich in grösseren Tiefen niedriger als in der Nähe der Oberfläche sein, selbst wenn die Flüssigkeit sich von der Oberfläche aus abkühlt, und nur eine sehr dünne Schicht leichterer und kälterer Flüssigkeit, welche durch wirkliche Leitung Wärme verlöre, würde längs der Oberfläche bestehen, bis die Erstarrung an der Oberfläche anfinge.

(w) **Wirkung des Drucks auf die Temperatur.** — Ferner wird nach dem von meinem Bruder, Professor James Thomson **), erforschten und von mir ***) für Wasser experimentell bewahrheiteten thermo-dynamischen Gesetz des Gefrierens die Temperatur des Gefrierpunktes in grossen Tiefen des grossen Drucks wegen höher als an der Oberfläche sein, wenn sich die Flüssigkeit beim Gefrieren

*) Joule, „On the Changes of Temperature produced by the Rarefaction and Condensation of Air, *Phil. Mag.* 1845. Thomson, „On a Method for Determining Experimentally the Heat evolved by the Compression of Air: Dynamical Theory of Heat, Part IV, *Trans. R. S. E.*, Session 1850 bis 1851; wieder abgedruckt in *Phil. Mag.* Joule and Thomson, „On the Thermal Effects of Fluids in Motion", Trans. R. S. *London*, Juni 1853 und Juni 1854. Joule and Thomson, „On the Alterations of Temperature accompanying Changes of Pressure in Fluids", *Proceeding R. S.* London, Juni 1857.

**) „Theoretical Considerations regarding the Effect of Pressure in lowering the Freezing-Point of Water", *Trans. R. S. E.*, Jan. 1849.

***) *Proceedings R. S. E.*, Session 1849 bis 1850.

zusammenzieht, oder niedriger als an der Oberfläche, wenn sich die Flüssigkeit beim Gefrieren ausdehnt.

(x) In welchem Zusammenhange die Temperatur der Erstarrung für jeden Druck mit der entsprechenden Temperatur des convectiven Gleichgewichts steht, ist unmöglich zu sagen ohne Kenntniss — und diese besitzen wir noch nicht — der durch die Wärme bewirkten Ausdehnung, sowie der specifischen Wärme der Flüssigkeit, ferner der beim Uebergang aus dem flüssigen in den festen Zustand eintretenden Aenderung des Volumens und der frei werdenden latenten Wärme.

(y) **Erörterung der Frage, ob die Erstarrung an der Oberfläche oder im Centrum oder auf dem Boden begonnen hat.** — Wenn wir z. B. voraussetzen, wie es höchst wahrscheinlich richtig ist, dass sich die Flüssigkeit sowohl bei ihrer Abkühlung bis zum Gefrierpunkt, als auch beim Gefrieren selbst zusammenzieht, so können wir ohne bestimmte numerische Daten in Betreff jener Elemente nicht angeben, ob die durch Anwendung eines gegebenen Drucks erzeugte Erhöhung der Temperatur der Erstarrung oder der wirklichen Temperatur eines Theils der Flüssigkeit, die sich gerade noch über ihrem Gefrierpunkt befand, die grössere ist. Wenn die erstere grösser ist als die letztere, so würde die Erstarrung am Boden oder im Centrum beginnen, falls kein fester Kern da ist, an dem sie ihren Anfang nehmen könnte, und würde von da nach aussen zu vorschreiten; in diesem Falle könnte keine vollständige dauernde Ueberkrustung der ganzen Oberfläche erfolgen, bis die ganze Kugel fest geworden ist, ausgenommen möglicher Weise unregelmässige, verhältnissmässig kleine Räume voll Flüssigkeit.

(z) Wenn dagegen die durch Anwendung eines Drucks auf einen gegebenen Theil der Flüssigkeit erzeugte Erhöhung der Temperatur grösser ist als die durch den gleichen Druck erzeugte Erhöhung der Temperatur des Gefrierpunktes, so wird die Oberflächenschicht der Flüssigkeit zuerst den Gefrierpunkt erreichen und auch wirklich zuerst gefrieren.

(aa) Wenn aber nach der zweiten Voraussetzung des § v die Flüssigkeit sich in der Nähe ihres Gefrierpunktes bei ihrer Abkühlung ausdehnte, so würde der feste Körper wahrscheinlich ebenfalls von kleinerem specifischen Gewicht sein als die Flüssigkeit in ihrem Gefrierpunkt. Folglich würde sich die Oberfläche dauernd mit einer festen Kruste überziehen, und diese Kruste würde fortwährend nach innen zu wachsen, da durch die Kruste Wärme nach aussen geleitet, folglich immer mehr Flüssigkeit im Innern gefrieren würde. Auf

diese Weise würde der Zustand erzeugt, der von den meisten Geologen vorausgesetzt wird.

(bb) **Wichtigkeit einer experimentellen Bestimmung der bei der Erstarrung geschmolzener Felsmassen eintretenden Volumenänderung.** — Bischof's Experimente, deren Zuverlässigkeit, so viel mir bekannt ist, niemals angezweifelt wurde, zeigen aber, dass geschmolzener Granit, Schiefer und Trachyt sich sämmtlich beim Gefrieren um etwa 20 Proc. zusammenziehen. Es sollten in der That über diesen so wichtigen Gegenstand mehr Experimente angestellt werden, sowohl um die von Bischof für Steinmassen erhaltenen Resultate zu bewahrheiten, als auch um zu bestimmen, wie sich in dieser Beziehung Eisen und andere nicht oxydirte Metalle verhalten. Inzwischen müssen wir es als wahrscheinlich ansehen, dass die geschmolzene Masse der Erde beim Festwerden in der That eine beträchtliche Contraction erlitten hat.

(cc) **Bischof's Experimente, welche eine Contraction beweisen, machen es wahrscheinlich, dass die Erdoberfläche sich nicht abkühlen konnte, so lange nicht das Innere im Ganzen erstarrt war.** — Wenn daher nach irgend welchen Relationen zwischen den verwickelten physikalischen Umständen, die hier in Betracht kommen, die Erstarrung wirklich an der Oberfläche begann, entweder überall oder in irgend einem Theil derselben, so musste, so lange nicht die ganze Kugel erstarrt war, die fest gewordene Oberflächenschicht zerbrochen und auf den Boden oder zum Centrum hin gesunken sein, bevor sie eine hinreichende Dicke erlangt haben konnte, um auf einer unter ihr liegenden specifisch leichteren Flüssigkeit stabil zu bleiben. Es ist in der That ganz klar, dass, wenn die Erde zu irgend einer Zeit aus einer festen Granitschicht von etwa 50 oder 100 Fuss Dicke und einer davon umschlossenen continuirlichen geschmolzenen Masse bestanden hätte, die in ihren oberen Theilen, wo der Druck klein ist, ein um 20 Proc. kleineres specifisches Gewicht als die feste Rinde besessen hätte, dieser Zustand nur wenige Minuten gedauert haben könnte. Die Starrheit einer festen Schale, deren Fläche so ungeheuer gross im Vergleich zur Dicke ist, musste gleich Null sein, und bei der geringsten Störung würde ein Theil sich biegen, bersten und die Flüssigkeit über die ganze Rinde auslaufen lassen. In Folge davon würde die Rinde selbst in Stücke zerbrechen, und diese müssten zu Boden sinken oder sämmtlich nach dem Mittelpunkt hin fallen und

dort einen Kern bilden, falls ein solcher nicht schon vorhanden ist, so dass bei ihm die Erstarrung beginnen könnte.

(dd) Es ist jedoch kaum möglich, dass sich eine solche continuirliche Kruste jemals zu einer Zeit auf der ganzen geschmolzenen Oberfläche gebildet haben und hinterher eingesunken sein kann. Die in § y angegebene Art der Erstarrung scheint im Ganzen am meisten in Uebereinstimmung mit dem zu sein, was wir über die physikalischen Eigenschaften der Masse wissen, um die es sich handelt. So weit das Resultat in Betracht kommt, fällt sie, glaube ich, mit der Ansicht zusammen, welche Hopkins*) als die wahrscheinlichste adoptirt hat. Mag es nun daher kommen, dass der Zustand für die ganze Erdsubstanz oder für einige Theile derselben mehr der in § z beschriebene war, was wohl als möglich erscheint, oder mag die Ursache in der Zähigkeit (wie sie Mörtel besitzt) liegen, welche in einer geschmolzenen Flüssigkeit sich zeigen muss, deren Bestandtheile während der Abkühlung dadurch, dass sie vor Vollendung der Erstarrung bei verschiedenen Temperaturen krystallisiren, getrennt werden, und welche wir thatsächlich an der aus den heutigen Vulcanen ausströmenden Lava bemerken: es ist wahrscheinlich, dass, wenn die ganze Kugel oder eine sehr dicke Oberflächenschicht derselben, die noch flüssig oder auch schon zähe sein konnte, bis in die Nähe der Temperatur der vollständigen Erstarrung abgekühlt war, eine Bekrustung an der Oberfläche beginnen musste.

(ee) Es ist wahrscheinlich, dass sich so über ausgedehnten Theilen der Oberfläche eine Kruste bilden kann, und dass dieselbe zeitweilig [sei es nun wegen der in ihr enthaltenen blasenartigen Hohlräume, die noch eine Folge des Aufwallens der Flüssigkeit an einigen Orten sind, oder auf alle Fälle wegen der Zähigkeit der Flüssigkeit] oben auf der Flüssigkeit liegen bleibt, bis sie eine hinreichend grosse Dicke erlangt hat, um der Schwerkraft zu gestatten, ihren Anspruch geltend zu machen und die schwerere starre Masse unter die leichtere Flüssigkeit zu senken. Dieser Process muss so lange seinen Fortgang nehmen, bis die gesunkenen Krustentheile vom Boden aus ein hinlänglich eng geripptes Skelett aufbauen, so dass eine neu entstandene Kruste, indem sie gewissermaassen die kleiner gewordenen Flächen der Lavateiche oder Seen überbrückt, bestehen bleiben kann.

---

*) Siehe dessen Report on „Earthquakes and Volcanic Action". British Association Report for 1847.

(ff) **Wahrscheinliche Ursachen der Vulcane und der Erdbeben.** — Hat sich so ein Theil der Flüssigkeit in einen von Hohlräumen durchzogenen festen Körper verwandelt, so muss die flüssig gebliebene Masse ihres kleineren specifischen Gewichts wegen fortwährend bestrebt sein, sich an die Oberfläche hindurchzuarbeiten. Es kann dies dadurch geschehen, dass Massen des festen Körpers von den Decken der Hohlräume oder Tunnel herabfallen, wodurch Erdbebenstösse verursacht werden, oder dass die Decke, wenn sie recht dünn ist, ganz durchbricht, wodurch entweder zwei solcher Hohlräume sich vereinigen, oder der Flüssigkeit eines derselben gestattet wird, frei über die äussere Fläche der Erde hinzufliessen; endlich gelangt die flüssig gebliebene Masse noch durch das allmälige Sinken der festen Masse nach oben, welches daher rührt, dass nach den neuerdings von Professor James Thomson veröffentlichten Ansichten *) Theile derselben unter dem grossen Zwange, dem sie ausgesetzt sind, wieder schmelzen müssen. Die Resultate, welche sich aus diesem Streben der flüssigen Masse ergeben müssen, scheinen hinlänglich gross und mannigfaltig zu sein, um alle Erscheinungen der Erdbeben, der Hebungen und Senkungen fester Massen und der Eruptionen geschmolzener Felsmassen zu erklären, sowohl diejenigen, die wir auf der Erde jetzt vor sich gehen sehen, als auch alle diejenigen, welche die Geologie uns kennen lehrt.

(gg) Diese Schlüsse, die wir bloss aus einer Betrachtung der Aufeinanderfolge von Abkühlung und Erstarrung gezogen haben, wie sie nach dem von Bischof für die specifischen Gewichte fester und geschmolzener Steinmassen erhaltenen Resultate nothwendig erfolgen, stehen hinsichtlich des jetzigen Zustandes des Erdinnern in vollständiger Uebereinstimmung mit §§ 832 . . . 849; danach ist die Erde nicht, wie gewöhnlich vorausgesetzt wird, ganz flüssig bis auf eine dünne feste Schale von 30 bis 100 Meilen Dicke, sondern sie ist im Ganzen sicherlich von grösserer Starrheit, als eine continuirliche Glaskugel von demselben Durchmesser, und wahrscheinlich auch starrer, als eine ebenso grosse Stahlkugel.

*) *Proceedings of the Royal Society of London*, 1861. „On Crystallization and Liquefaction as influenced by Stresses tending to Change of Form in Crystals".